УДК 330.44

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ ЗАО «ФОТОН»

Асхакова Ф.Х., Лайпанова З.М., Мамчуев А.М.

ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева», Карачаевск, e-mail: asxakova@bk.ru

В статье рассматриваются методы решения двойственной балансовой модели. К цели работы относится разработка методики неотрицательного решения двойственной балансовой модели, с учетом его обусловленности, программная реализация разработанной методики, разработка модели межотраслевого баланса ЗАО «Фотон» и нахождение его неотрицательного решения с помощью разработанной программы. Для осуществления поставленной цели в работе описывается двойственная балансовая модель. Устойчивость рассматриваемой модели зависит от числа обусловленности его матрицы. Если матрица хорошо обусловлена, то решение модели становится устойчивым и модель называется корректно поставленной, в противном случае – неустойчивым, модель называется некорректно поставленной. Если для решения корректно поставленной модели применить «точные» методы, то погрешности вычисления накапливаются. Поэтому в данной работе для решения корректно поставленной модели будем применять приближенные методы, а если модель некорректно поставлена, то метод регуляризации. Поэтому в работе описывается методика неотрицательного решения исследуемой модели итерационным методом в случае хорошей обусловленности его матрицы и методика неотрицательного решения методом регуляризации в случае плохой обусловленности его матрицы. На основании разработанных методик описан алгоритм неотрицательного решения двойственной модели, реализованный в программу на языке программирования C++. Приводится модель межотраслевого баланса ЗАО «Фотон», построенная на основе статистических данных за 2018–2021 гг. Приведен пример неотрицательного решения балансовой модели ЗАО «Фотон». Полученный в ходе исследования результат показывает, что модель ЗАО «Фотон» имеет положительное решение.

Ключевые слова: двойственная модель, метод итерации, метод регуляризации, C++, ЗАО «Фотон»

METHODS OF SOLVING THE BALANCE MODEL OF CJSC «PHOTON»

Askhakova F.Kh., Laypanova Z.M., Mamchuev A.M.

Karachay-Cherkessia State University U.D. Aliev, Karachaevsk, e-mail: asxakova@bk.ru

The article discusses the methods of solving the dual balance model. The purpose of the work includes the development of a methodology for the non-negative solution of the dual balance model, taking into account its conditionality, the software implementation of the developed methodology, the development of a model of the intersectoral balance of CJSC "Photon" and finding its non-negative solution using the developed program. To achieve this goal, the paper describes a dual balance model. The stability of the model under consideration depends on the number of conditionality of its matrix. If the matrix is well conditioned, then the solution of the model becomes stable and the model is called correctly posed, otherwise unstable and the model is called incorrectly posed. If "exact" methods are applied to solve a correctly posed model, then calculation errors accumulate. Therefore, in this paper, we will use approximate methods to solve a correctly posed model, and if the model is incorrectly posed, then the regularization method. Therefore, the paper describes the method of non-negative solution of the model under study by the iterative method in the case of well-conditioned matrix and the method of non-negative solution by the regularization method in the case of poor conditioning of its matrix. Based on the developed techniques, an algorithm for the non-negative solution of the dual model is described, implemented in a program in the C ++ programming language. The model of inter-industry balance of CJSC "Photon", built on the basis of statistical data for 2018-2021, is given. An example of a non-negative solution of the balance model of CJSC "Photon" is given. The result obtained during the study shows that the model of CJSC "Photon" has a positive solution.

Keywords: dual model, iteration method, regularization method, C++, CJSC «Photon»

В модельных задачах с высокой размерностью в процессе решения с целью построения матриц, размеры которых достигали до 1000, разрабатываются генераторы матриц. Поэтому необходимо для решения подобных задач разработать программные продукты. Известно, что в процессе построения балансовых моделей, погрешности исходных данных модели приводят как к небольшим погрешностям, так и к большим погрешностям результатов решения.

Известно, что при применении модели для решения практических задач ее исходные данные могут быть заданы неточно. Известно, что если небольшие ошибки исходных данных незначительно влияют на результат решения модели, то в этом случае модель называется корректно поставленной, а если значительно влияют на результат решения, то в этом случае модель называется некорректно поставленной.

В случае, когда исходные данные, допускающие некоторые неточности, приводят к незначительным погрешностям результатов ее решения, то для решения задач можно применить итерационные методы. А в случае, когда исходные данные, допускающие некоторые неточности, приводят к значительным погрешностям результатов ее решения, можно применить метод регуляризации.

Цель исследования – разработать методики неотрицательного решения двойственной балансовой модели с учетом её обусловленности, реализовать в программу разработанную методику, разработать модель межотраслевого баланса ЗАО «Фотон» и найти его неотрицательное решение с помощью разработанной программы.

Материалы и методы исследования

Для получения результатов исследования были использованы метод итерации и метод регуляризации. Применены усредненные статистические данные за 2018–2021 гг. ЗАО «Фотон».

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим балансовую модель вида [1–3]:

$$x = Ax + f \qquad (1)$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ является технологической матрицей размерности $n \times n$, которая обладает неотрицательными элементами.

Известно, что модель, двойственная к модели (1), имеет вид

$$p = A^T p + v, \qquad (2)$$

где p является вектором цен производимой отраслями продукции, v является вектором добавленной стоимости,

$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ является матрицей транспонированной к матрице A модели (1).

Известно, что в случае прибыльности модели (2) модель (1) является продуктивной и, наоборот, в случае продуктивности модели (1) модель (2) является прибыльной.

Далее представим модель (2) в виде

$$(I - A^T)p = v. \qquad (3)$$

Обозначим $(I - A^T) = D$, тогда модель (3) будет иметь вид

$$Dp = v. \qquad (4)$$

Является ли решение (4) устойчивым, зависит от незначительных погрешностей исходных данных (4) и погрешности, которая появляется при большой размерности n, приводящей к незначительным погрешностям полученного решения.

Обозначим через $\tilde{D}$ и $\tilde{v}$ отличные от точных значений величины (4), тогда модель имеет вид

$$\tilde{D}\tilde{p} = \tilde{v}. \qquad (5)$$

Относительно моделей (4) и (5) получим $\left\|\tilde{D} - D\right\| \le \xi$, $\left\|\tilde{v} - v\right\| \le \delta$, где ξ является погрешностью $\tilde{D}$, δ является погрешностью вектора $\tilde{v}$.

Тогда относительную погрешность решения (5) можно представить в виде

$$\frac{\|\delta v\|}{\|v\|} \le cond(D)\left(\frac{\delta}{\|v\|} + \frac{\xi}{\|D\|}\right) = D \quad D$$

$$= \|D\| \cdot \left\|D^{-1}\right\| \left(\frac{\delta}{\|v\|} + \frac{\xi}{\|D\|}\right) =$$

$$= {\mu(D)_{max}}\Big/{\mu(D)_{min}} \left(\frac{\delta}{\|v\|} + \frac{\xi}{\|D\|}\right) =$$

$$= \sqrt{\lambda(D^*D)_{max}}\Big/\sqrt{\lambda(D^*D)_{min}} \left(\frac{\delta}{\|v\|} + \frac{\xi}{\|D\|}\right),$$

где $cond(D)$ является числом обусловленности D; $\mu(D)$ является сингулярным числом; λ является собственным числом.

Решение модели (4) является устойчивым в зависимости от числа обусловленности матрицы. Например, в случае $condA^T \le 1000$ решение (4) является устойчивым, а в случае $condA^T > 1000$ решение (4) является неустойчивым.

При первом случае для неотрицательного решения рассматриваемой модели применяем итерационный метод. В таком методе точность результата подсчета в каждой итерации определяется лишь результатом предшествующей итерации, практически не зависящем от предыдущих подсчетов [4, с. 136]:

$$p_{k+1} = A^T p_k + v, \; p_0 = \theta, \; k = 0, 1, 2, \dots \qquad (6)$$

Известно, что матрица A^T из (4) является прибыльной, если $\|A^T\| < 1$.

Если $\|A^T\| < 1$ истинно, то решение (2):

1) существует и оно единственное;

2) при $\forall p_0$ процесс (6) сходится и справедливой является следующая оценка:

$$\|p_k - p\| \le \|A^T\| \, \|p_0 - p\|, \qquad (7)$$

где p является решением (2).

В системе (6) нет ограничения $p \ge 0$.

Если элементы A^T, v имеют некоторые погрешности, то иногда можно получить решение p, к большим погрешностям и для этого случая надо применить метод регуляризации.

Предположим, что (4) некорректно поставлена и

$$\left\|\tilde{D}-D\right\|\leq\xi\,,\ \left\|\tilde{v}-v\right\|\leq\delta\,. \qquad (8)$$

Будем искать приближенное решение (5), применяя метод регуляризации [5, 6].

Из [5, 7] известно, что нахождение решения (4) на основе (5) сводится к поиску p^{α}, минимизирующего сглаживающий функционал:

$$M^{\alpha}\left[p,\tilde{v},\tilde{D}\right]=\left\|\tilde{D}p-\tilde{v}\right\|^{2}+\alpha\,\Omega\left[p\right],\ \alpha>0,(9)$$

где $\Omega[p]$ = $\|p\|^2$ называется стабилизирующим функционалом, $\alpha = \alpha(\delta)$ – параметром регуляризации.

Из [5, 7] известно о существовании одного p^{α}, которое можно определить при любом фиксированном $\alpha > 0$ из

$$\alpha\ p_{k}^{\alpha}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{d}_{ik}\ \tilde{d}_{ij}\ p_{j}^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{d}_{ik}\ v_{i}\,, \qquad (10)$$

$$p_{j}^{\alpha}\geq 0,\quad j=1,\ldots,n\,.$$

Опишем следующий алгоритм:

1. Вводим значение n.
2. Вводим значения элементов A^T.
3. Вводим значения элементов $\tilde{v}$.
4. Задаём начальное приближение p_0.
5. Задаём погрешность $\varepsilon > 0$, для вычисления p.
6. Вычисляем $condA^T$.
7. Если $condA^T \leq 1000$, то переходим к пункту 8, иначе переходим к шагу 11.
8. Проверяется выполнимость условия $\left\|\tilde{A}^{T}\right\|<1$.
9. Если условия пунктов 7, 8 выполнимы, то для вычисления применяем формулу (4) до достижения необходимой погрешности $\varepsilon > 0$.
10. В случае невыполнимости условия из пункта 8 вычисляем другую норму $\left\|A^{T}\right\|$.
11. Задаем $\alpha_1 > 0$.
12. При α_1, находим p^{α_1} из (10).
13. При известных α_1, p^{α_1}, вычисляем $M^{\alpha_1}\left[p^{\alpha_1},\tilde{v},\tilde{D}\right]$ из (9).
14. Задаем $\alpha_2 > 0$, $\alpha_2 < \alpha_1$.
15. При α_2, находим p^{α_2} из (10).
16. При известных α_2, p^{α_2}, вычисляем $M^{\alpha_2}\left[p^{\alpha_2},\tilde{v},\tilde{D}\right]$ из (9).
17. Если $M^{\alpha_2}\left[p^{\alpha_2},v,\tilde{D}\right]<M^{\alpha_1}\left[p^{\alpha_1},\tilde{v},\tilde{D}\right]$, то переходим к шагу 19.
18. Если $M^{\alpha_2}\left[p^{\alpha_2},\tilde{v},\tilde{D}\right]>M^{\alpha_1}\left[p^{\alpha_1},\tilde{v},\tilde{D}\right]$, то $p=p^{\alpha_1}$.
19. Задаем $\alpha_3 > 0$, $\alpha_3 < \alpha_2$.
20. При α_3, находим p^{α_3} из (10).
21. При α_3, p^{α_3}, вычисляем $M^{\alpha_3}\left[p^{\alpha_3},\tilde{v},\tilde{B}\right]$ из (9).
22. Если $M^{\alpha_3}\left[p^{\alpha_3},\tilde{v},\tilde{D}\right]<M^{\alpha_2}\left[p^{\alpha_2},\tilde{v},\tilde{D}\right]$, то переходим к шагу 24.
23. Если $M^{\alpha_3}\left[p^{\alpha_3},\tilde{v},\tilde{D}\right]>M^{\alpha_2}\left[p^{\alpha_2},\tilde{v},\tilde{D}\right]$, то $p=p^{\alpha_2}$.
24. Задаем $\alpha_4 > 0$, $\alpha_4 < \alpha_3$.
25. Таким образом, продолжается до тех пор, пока на (k+1)-м шаге не отыщутся α_{k+1}, $p^{\alpha_{k+1}}$, при которых

$$M^{\alpha_{k+1}}\left[p^{\alpha_{k+1}},\tilde{v},\tilde{D}\right]>M^{\alpha_{k}}\left[p^{\alpha_{k}},\tilde{v},\tilde{D}\right],$$

то $p=p^{\alpha_k}$ и процесс завершается.

Описанный алгоритм был реализован в программный продукт на языке программирования С ++.

В таблице представлена принципиальная схема межотраслевого баланса ЗАО «Фотон», для построения которой были применены усредненные статистические данные ЗАО «Фотон» за 2018–2021 гг.

Принципиальная схема межотраслевого баланса ЗАО «Фотон» за 2018–2021 гг.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли (тыс. руб.)				Конечный спрос (тыс. руб.)	Валовой продукт (тыс. руб.)
	1	2	3	4		
Производство и распределение электроэнергии	0	4551,1	0	0	19047,3	23598.4
Производство хлебобулочных изделий	1015,6	1663,2	0	0	8331,8	11010.6
Строительство жилых и нежилых зданий	2131,4	0	9134,6	0	17279,6	28545.6
Гостиничный комплекс	354,6	0	0	2190,4	11143,9	13688.8
Амортизация Оплата труда Чистый доход	20096,8	4796,3	19411,01	11498,5		
Валовой продукт	23598.4	11010.6	28545.6	13688.8		

Из таблицы видно, что:

− отрасль по производству «Производство и распределение электроэнергии» в среднем производит валовую продукцию на сумму 23598,4 тыс. руб.;

− отрасль по производству «Производство хлебобулочных изделий» в среднем производит валовую продукцию на сумму 11010,6 тыс. руб.;

− отрасль по производству «Строительство жилых и нежилых зданий» в среднем производит валовую продукцию на сумму 28545,6 тыс. руб.;

− отрасль по производству «Гостиничный комплекс» в среднем производит валовую продукцию на сумму 13688,8 тыс. руб.

Из таблицы получим:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0.04 & 0.1 & 0.02 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} 20096.8 & 4796.3 & 19411.01 & 11498.5 \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 23598.4 & 11010.6 & 28545.6 & 13688.8 \end{pmatrix}.$$

Если ЗАО «Фотон» в 2023 г. увеличит значение вектора v на 17% относительно усредненных данных, т.е.

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} 23513.24 & 5611.6 & 22710.9 & 13453.2 \end{pmatrix}.$$

Вводим исходные данные в программу и получим, что матрица хорошо обусловлена $condA^T \leq 1000$ и

$$p = \begin{pmatrix} 27933.2 & 20981.1 & 32444.1 & 16816.5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

− отрасль по производству «Производство и распределение электроэнергии» в 2023 г. должна произвести валовую продукцию на сумму 27933,2 тыс. руб.;

− отрасль по производству «Производство хлебобулочных изделий» в 2023 г. должна произвести валовую продукцию на сумму 20981,1 тыс. руб.;

− отрасль по производству «Строительство жилых и нежилых зданий» в 2023 г. должна произвести валовую продукцию на сумму 32444,1 тыс. руб.;

− отрасль по производству «Гостиничный комплекс» в 2023 г. должна произвести валовую продукцию на сумму 16816,5 тыс. руб.

Заключение

Результаты решения показывают, что матрица двойственной модели ЗАО «Фотон» имеет хорошую обусловленность. Она является прибыльной и продуктивной.

Результаты исследования могут представлять интерес для хозяйствующих субъектов при решении их балансовых моделей любой обусловленности.

Список литературы

1. Дужински Р.Р., Таточенко Т.В., Шадчнева А.В. Определения производственных показателей посредством метода «затраты – выпуск» в системе управления производством // Вектор экономики. 2017. № 5 (11). С. 29.

2. Дужински Р.Р., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. Экономико-математический анализ статической устойчивости экономических систем // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2016. № 4 (55). С. 58–72.

3. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 2002, 391 с.

4. Асхакова Ф.Х., Аргуянова А.Б. Разработка алгоритма численного решения балансовой модели и применение его компьютерной реализации при планировании сельскохозяйственного производства // Гуманитарные и социально-экономические науки. 2015. № 1 (80). С. 134–138.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач: учебное пособие для вузов. 3-е изд., испр. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 288 с.

6. Сумин М.И. Метод регуляризации А.Н. Тихонова для решения операторных уравнений первого рода: учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. 56 с.

7. Асхакова Ф.Х. Решение плохо обусловленной модели, двойственной к модели Леонтьева – Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3. С. 87–93.