УДК 330.1:330.47:517.41

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В ГЕОМЕТРИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЭКОНОМИКЕ

[1]Манохин Е.В., [2]Добрынина И.В., [1]Козлова Н.О.

[1]Тульский филиал ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», Тула, e-mail: tula@fa.ru;

[2]ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий», Химки, e-mail: agz@amchs.ru

Нечеткие множества (Fuzzyset) начали изучаться с 1965 года. В дальнейшем нечеткая логика и теория нечетких множеств получили развитие при применении ряда программных средств. Мы покажем, что нечеткие множества можно использовать в геометрии пространств Банаха, а, следовательно, в векторных пространствах, используемых в экономике. В частности, в работе введено понятие нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости, определена нечеткая слабая сходимость, доказан ряд теорем, теоретически обосновывающих использование теории нечетких множеств применительно к банаховым пространствам. Проанализирован ряд примеров использования теории нечетких множеств в экономике, в том числе как инструмента, позволяющего преодолевать ограничения таких традиционных методов моделирования анализа, как задача линейного программирования, регрессионные модели, модели множественного выбора и другие. Имеющиеся многочисленные положительные примеры использования методов теории нечетких множеств и нечеткой логики применительно к экономическим приложениям требуют теоретического обоснования и применительно к их базовому пространству – пространству Банаха. Проведенное исследование показало возможность введения понятия нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости, определения нечеткой слабой сходимости. Доказано, что любое банахово пространство обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для всех его сепарабельных подпространств, а также установлены случаи, когда банахово пространство обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для несепарабельных пространств.

Ключевые слова: нечеткие множества, нормированное пространство, банахово пространство, нечеткая логика, применение нечетких множеств и нечеткой логики в экономике

EXAMPLES OF THE USE OF FUZZY SETS IN THE GEOMETRY OF BANACH SPACES AND ECONOMICS

[1]Manokhin E.V., [2]Dobrynina I.V., [1]Kozlova N.O.

[1]Tula filial of Financial university, Tula, e-mail: tula@fa.ru;

[2]Academy of Civil Protection EMERCOM of Russia, Khimki, e-mail: agz@amchs.ru

Fuzzy sets (Fuzzyset) have been studied since 1965. In the future, fuzzy logic and the theory of fuzzy sets were developed using a number of software tools. We show that fuzzy sets can be used in the geometry of Banach spaces, and, consequently, in vector spaces used in economics. In particular, the paper introduces the concept of a fuzzy weak local uniform convexity, defines a fuzzy weak convergence, and proves a number of theorems that theoretically justify the use of fuzzy set theory in relation to Banach spaces. A number of examples of the use of fuzzy set theory in economics are analyzed, including as a tool that allows overcoming the limitations of such traditional methods of modeling analysis as the linear programming problem, regression models, multiple choice models, and others. The numerous positive examples of using the methods of fuzzy set theory and fuzzy logic in relation to economic applications require theoretical justification in relation to their basic space – the Banach space. The conducted research has shown the possibility of introducing the concept of fuzzy weak local uniform convexity, the definition of fuzzy weak convergence. It is proved that any Banach space has the property of fuzzy weak local uniform convexity in the equivalent norm for all its separable subspaces, and also cases are established when a Banach space has the property of fuzzy weak local uniform convexity in the equivalent norm for non-separable spaces.

Keywords: fuzzy sets, normalized space, Banach space, fuzzy logic, applications of fuzzy sets and fuzzy logic in economics

Приведем классическое определение нечетких множеств.

Определение. Нечетким множеством A называется множество упорядоченных пар вида

$$<x, \mu_A(x)>,$$

где x является элементом некоторого универсального множества X, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности $\mu_A(x)$: $X \to [0; 1]$.

В работе [1] один из авторов показал, что нечеткие множества вкладываются в пространство банаховых сеток или банаховых матриц.

Цель исследования заключается в рассмотрении некоторых примеров использования нечетких множеств, в том числе в геометрии пространств Банаха и экономике.

Материалы и методы исследования

Элементы нечеткой геометрии пространств Банаха

С теорией линейных нормированных пространств можно ознакомиться в оригинальном переиздании книги С. Банаха (на русском языке см. [2]).

Известно, что *H*-свойством обладает каждое локально равномерно выпуклое *(LUR)* банахово пространство. Напомним соответствующее определение:

$$x_0 \in X, (x_n)_0^\infty \subset X, \| x_n \| = 1,$$

$$\| x_n + x_0 \| \to 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \| = 0 \ [3].$$

Пусть X – банахово пространство и x, $(x_n)_0^\infty \subset X$. Известно, что последовательность x_n слабо сходится к элементу x, если $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), f \in X^*$.

Определение. Банахово пространство X называется слабо локально равномерно выпуклым (обозначается $X \in WLUR$), если из условий

$$x, x_n \in X, \|x\| = \|x_n\| = 1, \lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$$

следует слабая сходимость последовательности x_n к элементу x [4].

Определение. Сопряженное банахово пространство X^* называется слабо* локально равномерно выпуклым (обозначается $X^* \in W^*LUR$), если из условий

$$y, y_n \in X^*, \|y\| = \|y_n\| = 1, \lim_{n\to\infty} \|y + y_n\| = 2$$

следует слабая* сходимость последовательности y_n к элементу y [3].

Введем понятие **нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости,** которая есть обобщение слабой и * – слабой локальной равномерной выпуклости пространств Банаха.

Определим нечеткую слабую сходимость.

Пусть X – банахово пространство и x, $(x_n)_0^\infty \subset X$. Последовательность x_n нечетко слабо сходится к элементу x, если $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), f \in \Gamma \subseteq X^*$.

Определение. Пространство X называется нечетко слабо локально равномерно выпуклым, если из условия

$$x, x_n \in X, \|x\| = \|x_n\| = 1, \lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$$

следует нечеткая слабая сходимость последовательности x_n к элементу x, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x) = 0, f \in \Gamma.\ \Gamma \subseteq X^*.$$

Очевидно, если X нечетко слабо локально равномерно выпукло при $\Gamma = X^*$, то получим обычное *WLUR* – свойство пространства X. Если X* нечетко слабо локально равномерно выпукло при $\Gamma = X$, то получим $X^* \in W^*LUR$. Очевидно, что если $\Gamma \supset \Gamma_1$, то из X нечетко слабо локально равномерно выпукло при Γ следует, что X нечетко слабо локально равномерно выпукло при Γ_1.

В случае сепарабельных пространств Γ вопрос о наличии эквивалентной нормы, относительно которой X нечетко слабо локально равномерно выпукло, решается следующим утверждением, которое представляет собой аналог теоремы Кадеца [4] и которое в другой формулировке доказано в работе [5].

ТЕОРЕМА 1. Любое банахово пространство *X* обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для всех Г – сепарабельных подпространств X*.

Пусть T – произвольное множество. Тогда через ℓ_∞ (T) обозначают банахово пространство всех ограниченных вещественных функций на T с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\gamma)| : \gamma \in T\}.$$

Когда T = N – множество целых положительных чисел, просто пишут ℓ_∞.

Известно, что несепарабельное банахово пространство l_∞ не становится локально равномерно выпуклым ни в какой эквивалентной норме, тем не менее отсутствие локальной равномерной выпуклости ни в какой эквивалентной норме не отменяет нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме. Из теоремы 1 получаем

<u>СЛЕДСТВИЕ 1.1.</u> Пространство l_∞ обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для всех Г – сепарабельных подпространств l_∞^*.

Более того, так как l_1 – сепарабельное пространство, $l_1^* = l_\infty$, из теоремы 1 получаем для l_∞ «вполне четкое» свойство слабой* локальной равномерной выпуклости.

<u>СЛЕДСТВИЕ 1.2</u> [5]. **Пространство l_∞ допускает двойственную эквивалентную слабо* локально равномерно выпуклую норму.**

Среди банаховых пространств одним из наиболее исследованных является класс слабо компактно порожденных банаховых пространств (обозначается $X \in WCG$). Известно, если X – сепарабельное пространство, то X – слабо компактно порожденное пространство.

Возникает вопрос: в каких случаях банахово пространство X обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме, если $Г$ – несепарабельное пространство? В этом направлении можно доказать следующие утверждения, которые в другой формулировке доказаны в работе [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X^* \in WCG$ (или $X \in WCG$). Тогда банахово пространство X обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для всех Г-подпространств X*.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X \in WCG$. Тогда банахово пространство X* обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для всех Г-подпространств X.

Экономические приложения теории нечетких множеств

К банаховым пространствам относится векторное пространство, имеющее широкие приложения в экономике. В экономической практике приходится оперировать действительными числами, отражающими прогнозные значения, например, отдельных элементов денежного потока при оценке инвестиционных проектов, экспертные оценки ожидаемого уровня инфляции, цен на сырьевые товары, доходов и т.п. Учитывая, что подобные оценки, как правило, не являются точными, в экономике все в большей степени используются нечеткие числа, нечеткие множества и нечеткая логика.

Волкова Е.С. и Гисин В.Б. выделили четыре укрупненных класса нечетких моделей на основе природы возникновения неопределенности [7]: модели, использующие нечеткие числовые величины (например, в задаче внутренней нормы доходности денежного потока в случае нечетко определенных платежей); модели нечеткого управления на основе лингвистических переменных с использованием определенного количества правил вывода (используются в условиях высокой неопределенности, когда приходится учитывать плохо формализуемые факторы или основываться только на экспертных оценках, например при исследовании влияния норматива достаточности капитала на отношение «банковские активы/ВВП»); оптимизационные модели (например, в задаче нечеткого линейного программирования нечеткими могут являться параметры модели или ограничения), логические модели, использующие нелинейные логические шкалы (например, при оценке аудиторских свидетельств).

В исследовании Лебедевой М.Е. [8] находит подтверждение тезис, что методы теории нечетких множеств используются во всех основных типах моделирования экономических систем: эконометрическом моделировании; моделях общего экономического равновесия; имитационных моделях; балансовых моделях. При анализе и принятии решений в ситуациях с высокой степенью неопределенности прибегают к когнитивному моделированию на основе интеллектуальных карт как способа представления мыслей человека-эксперта. В настоящее время после работ Б. Коско когнитивное моделирование осуществляется на основе нечетких когнитивных карт. Как правило, в экономике к слабо определенным ситуациям относятся макроэкономические процессы. Рассмотренные Лебедевой М.Е. примеры приложения нечетких когнитивных исследований макропроцессов в экономике России, осуществляемые разными исследователями, подтверждают перспективность использования теории нечетких множеств в экономике [8].

Результаты исследования и их обсуждение

Теория нечетких множеств позволяет решать тот же класс задач, который традиционно решается в экономических приложениях. Однако вследствие того, что аппарат теории нечетких множеств оперирует с понятиями, выражаемыми на естественном языке, то получаемые результаты часто оказываются более понятными, легко интерпретируемыми и эффективными, чем при использовании традиционных моделей с высокой степенью абстракции.

Обоснованию применения нечеткой логики к задачам оценки эффективности инвестиционных проектов посвящена, например, работа Тютюкиной Е.Б., Гисина В.Б. [9]. На первом этапе экспертам предлагается оценивать показатели инвестиционного проекта в трех термах («низкое значение», «среднее значение», «высокое значение»). Затем на основе модели нечеткого вывода делается заключение о целесообразности участия инвестора в проекте. При этом мнение экспертов учитывается более полно.

Оценочные суждения на основе методов теории нечетких множеств и нечеткой логики применительно к кредитному скорингу рассмотрены в [10]. Проведенное исследование выявило, что использование в кредитном скоринге нейронных сетей и генетических алгоритмов связано с определенными трудностями интерпретации полученных результатов, в то время как комбинирование указанных методов с методами нечеткой логики допускает более естественное описание результатов вычислений.

Наибольший эффект от применения методов теории нечетких множеств наблюдается при анализе фондового рынка. Например, в работе [11] на основе данных 250 международных компаний построена нечеткая параболическая регрессия отношения «цена – доход», дающая, с одной стороны, инвесторам информацию о компаниях, которые являются недооцененными, и заработать на них определенный доход, а с другой стороны, возможность трансформации прогноза для рынка по фактору «цена – доход» в прогноз капитализации определенной компании.

Жданова О.А., Курагина А.Ю. провели сравнительный анализ традиционной вероятностной модели формирования портфеля ценных бумаг и модели на основе теории нечетких множеств [12]. Нечеткая модель оказалась более информативной применительно к критерию «доходность – риск», а также выявила его существенный рост (то есть снижение риска) при увеличении количества ценных бумаг в портфеле, что согласуется с общепринятой практикой.

Как известно, хорошо разработанный аппарат задач линейного программирования в некоторой степени ограничивал их применение вследствие изменчивости параметров и ограничений модели реальных экономических ситуаций. С использованием методов теории нечетких множеств и нечеткой логики эта проблема преодолевается. Например, в работе [13] исследуется задача оптимизации инвестиционного процесса как задача нечеткого линейного программирования, что позволяет найти оптимальное решение и в условиях неопределенности параметров.

Козловский А.Н. с соавторами показал, что нечетко-логические описания, используемые для моделирования новых нетрадиционных механизмов обеспечения устойчивости предприятий, позволяют повысить эффективность их применения [14]. Внешние воздействия на организацию рассматриваются как нечеткий сигнал, который распространяется по системе организации. Соответственно, последствия также моделируются как нечеткие переменные, а для моделирования ответных мер в виде проектных инициатив используется нечетко-логическое моделирование.

Имеются определенные достижения в применении методов теории множеств к разработкам систем мотивации персонала. Например, Недосекин А.О. с соавторами представил нечеткую модель системы мотивации персонала горнодобывающего предприятия [15]. Проблема заключается в том, что работники более мотивированы на повышение производительности труда, что отражается на их заработке, чем на соблюдение требований в сфере охраны труда и промышленной безопасности. Формирование модели сбалансированных показателей с нечеткими факторами и мягкими связями, а также выявление нечетких калибровочных соотношений позволяет выстроить систему «заработок – штраф» таким образом, чтобы работники были мотивированы как на рост производительности труда, так и на соблюдение требований безопасности.

Заключение

Имеющиеся многочисленные положительные примеры использования методов теории нечетких множеств и нечеткой логики применительно к экономическим приложениям требуют теоретического обоснования и применительно к их базовому пространству – пространству Банаха. Проведенное исследование показало возможность введения понятия нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости, определения нечеткой слабой сходимости. Доказано, что любое банахово пространство обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для всех его сепарабельных подпространств, а также установлены случаи, когда банахово пространство обладает свойством нечеткой слабой локальной равномерной выпуклости в эквивалентной норме для несепарабельных пространств.

Изучение применений теории нечетких множеств и нечеткой логики к задачам, традиционно используемым в экономике, таким как задача линейного программирования, регрессионные модели, модели множественного выбора и другие, показало, что положительные результаты применения связаны со следующими причинами:

– возможностью формулирования задачи на естественном языке, что позволяет учитывать экспертные оценки более полно и повышает содержательную интерпретацию результатов;

– более слабые допущения (нечеткие числа) позволяют получить необходимую информацию для принятия решений в результате оптимизации или моделирования, в том числе и тех в случаях, где жесткие ограничения не приводили к искомому результату.

Список литературы

1. Манохин Е.В. О вложениях совокупности нечетких множеств // Научное обозрение. 2014. № 3. С. 66–68.

2. Банах С. Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 272 с.

3. Devill R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach space. Longman Scientific & Technical, 1993. 376 p.

4. Кадец М.И. О связи между слабой и сильной сходимостью // ДАН УССР. 1959. № 9. С. 949–952.

5. Манохин Е.В. О K-локально равномерно выпуклых пространствах // Известия вузов. Математика. 1991. № 5. С. 32–34.

6. Манохин Е.В. Г-слабо локально равномерная выпуклость в пространствах Банаха // Известия вузов. Математика. 1998. № 1. С. 51–54.

7. Волкова Е.С., Гисин В.Б. Нечеткие методы и модели в экономике // Мягкие измерения и вычисления. 2018. № 9 (10). С. 54–57.

8. Лебедева М.Е. Нечеткая логика в экономике – формирование нового направления // Идеи и идеалы. 2019. Т. 11. № 1–1. С. 197–212.

9. Тютюкина Е.Б., Гисин В.Б. Оценка экономической целесообразности инвестиционных проектов: методологический подход // Инновационное развитие экономики. 2019. № 6 (54). С. 146–155.

10. Волкова Е.С., Гисин В.Б., Соловьев В.И. Методы теории нечетких множеств в кредитномскоринге // Финансы и кредит. 2017. Т. 23. № 35 (755). С. 2088–2106.

11. Козловский А.Н., Недосекин А.О., Кокорин М.С. Нечеткая модель для оценки и прогнозирования системы фондового рынка // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2020. Т. 1. С. 94–96.

12. Жданова О.А., Курагина А.Ю. Построение и апробация модели оптимизации инвестиционного портфеля с применением нечетких множеств по отношению к российскому финансовому рынку // Теория и практика общественного развития. 2016. № 11. С. 46–50.

13. Шаталова А.Ю., Лебедев К.А. нечеткое линейное программирование в задаче оптимального финансирования инвестиционных проектов, максимизирующей получаемый предприятием доход // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015. № 9. С. 35–38.

14. Козловский А.Н., Недосекин А.О., Абдулаева З.И., Никитина Т.А. Нечетко-логическое моделирование устойчивости предприятий: нетрадиционные аспекты // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2020. Т. 1. С. 91–93.

15. Недосекин А.О., Рейшахрит Е.И., Ильенко Е.П. Нечёткая модель системы мотивации персонала с учетом фактора безопасности // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2016. Т. 2. С. 107–110.