УДК 51-77:330

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИНИМИЗАЦИИ ОБЩИХ ЗАТРАТ В УПРАВЛЕНИИ ЗАПАСАМИ

[1,2]Зайцева И.В., [3]Малафеев О.А., [4]Резеньков Д.Н., [4]Рыжов А.В., [4]Пожидаев С.В.

[1]ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет», Санкт-Петербург, e-mail: irina.zaitseva.stv@yandex.ru;

[2]ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь;

[3]ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», Санкт-Петербург;

[4]Ставропольский филиал ФГКОУ ВО «Краснодарский университет Министерства внутренних дел Российской Федерации», Ставрополь

В статье рассмотрены математические модели оптимального управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров. Авторами представлена формула наиболее экономичного размера заказа при заданной функции полезности акционеров. Разработана модель управления запасами при постоянной интенсивности спроса, нулевом времени доставки заказа и издержках вследствие дефицита. Построены динамические модели взаимодействия трех акционеров при различных условиях. Для разработанных авторами моделей найдены компромиссные решения взаимодействия. Цель статьи – исследовать математические модели оптимального управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров. Задачи работы – рассмотреть математические модели оптимального управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров, особенности применения математических методов для решения задач в зависимости от ограничений, предъявляемых к управлению запасами. Результатами исследования являются построенные математические модели и методы их решения, приведен пример использования математических моделей. В первой модели найдено компромиссное решение управления запасами производственного комплекса при двух видах издержек, а именно: постоянных издержках выполнения заказа и издержках, приходящихся на единицу товара. Во второй модели найдено компромиссное решение управления запасами при трех видах издержек, а именно: постоянные издержки выполнения заказа, издержки, приходящиеся на единицу товара, и издержки вследствие дефицита товара. Представлен пример практической реализации построенной динамической модели компромиссного многоагентного взаимодействия трех акционеров на примере предприятия, состоящего из складского комплекса, транспортной компании и магазина. В качестве принципа оптимальности принимается компромиссное решение управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров.

Ключевые слова: математическая модель, динамическая модель, управление, компромиссные решения

ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING OF MINIMIZING TOTAL COSTS IN INVENTORY MANAGEMENT

[1,2]Zaytseva I.V., [3]Malafeev O.A., [4]Rezenkov D.N., [4]Ryzhov A.V., [4]Pozhidaev S.V.

[1]Russian State Hydrometeorological University, St. Petersburg, e-mail: irina.zaitseva.stv@yandex.ru;

[2]Stavropol State Agrarian University, Stavropol;

[3]Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg;

[4]Stavropol branch of the Krasnodar University of the Ministry of the Interior of the Russian Federation, Stavropol

In the article, the authors consider mathematical models of optimal inventory management of the production complex with multi-agent interaction of shareholders. The authors present a formula for the most economical order size for a given shareholder utility function. A model of inventory management with constant demand intensity, zero order delivery time, and costs due to shortage is developed. Dynamic models of interaction between the three shareholders under different conditions are constructed. For the models developed by the authors, compromise solutions of interaction are found. The purpose of the article is to investigate mathematical models of optimal inventory management of the production complex with multi-agent interaction of shareholders. Objectives of the work: to consider mathematical models of optimal inventory management of the production complex with multi-agent interaction of shareholders, features of the application of mathematical methods for solving problems depending on the restrictions imposed on inventory management. The results of the study are the constructed mathematical models and methods of their solution, an example of the use of mathematical models is given. In the first model, a compromise solution was found for managing the inventory of the production complex with two types of costs, namely. fixed order execution costs and costs per unit of product. In the second model, a compromise solution for inventory management is found for three types of costs, namely, the fixed costs of order fulfillment, the costs per unit of goods and the costs due to the shortage of goods. An example of the practical implementation of the built dynamic model of compromise multi-agent interaction of three shareholders is presented on the example of an enterprise consisting of a warehouse complex, a transport company and a store. As the principle of optimality, a compromise decision is made to manage the inventory of the production complex with multi-agent interaction of shareholders.

Keywords: mathematical model, dynamic model, management, compromise solutions

Основной математической моделью, которая применяется для планирования запасов, является так называемая классическая модель экономического размера заказа (EOQ – Economic order quantity) [1]. Данная модель описана во многих работах, в частности в книге [2]. В работе исследован вопрос минимизации суммарных издержек при управлении запасами производственного комплекса. В данной работе рассматривается задача управления запасами предприятия, состоящего из трех акционеров: складского комплекса, транспортной компании и магазина. В качестве принципа оптимальности принимается компромиссное решение управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров [3–7].

1. Постановка задачи о нахождении компромиссного решения в моделях управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров

В условиях рыночной экономики для производственного комплекса актуальной становится постановка задачи о минимизации суммарных издержек хранения, транспортировки запасов и издержек, связанных с заказом. При этом издержки постоянны для каждого заказа и не связаны с объемом заказа. Так же следует учитывать издержки вследствие дефицита товара. В качестве решения задачи нахождения подходящей политики работы производственного комплекса будем принимать компромиссное решение для динамической модели многоагентного взаимодействия функционирования комплекса. Рассмотрим издержки трех видов: Co – издержки выполнения заказа или затраты на подготовительно-заключительные операции; Cu – издержки хранения, приходящиеся на единицу товара; Cz – издержки вследствие дефицита, приходящиеся на единицу товара в течение единицы времени. При решении задачи нахождения оптимальной политики управления запасами получаем разные значения оптимального размера заказа. Таким образом, возникает задача нахождения подходящей политики работы предприятия.

2. Модели управления запасами производственного комплекса

2.1. Модель Уилсона управления запасами

Математические модели управления запасами (УЗ) позволяют найти оптимальный уровень запасов некоторого товара, минимизирующий суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара. Модель Уилсона является простейшей моделью УЗ и описывает ситуацию закупки товара, которая характеризуется следующими допущениями: интенсивность потребления является известной и постоянной величиной; время поставки заказа является известной и постоянной величиной; каждый заказ поставляется в виде одной партии; затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа; затраты на хранение запаса пропорциональны его размеру. В системе управления запасами с течением времени уровни запасов уменьшаются, пополнение запасов происходит за счет поступления заказа. Затем процесс повторяется [8–10].

Рассмотрим случай, когда заказ для пополнения запасов является одной партией. В таком случае количество запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает нуля. Затем поступает заказ, размер которого равен Q, и уровень запасов восстанавливается до максимального значения. Таким образом, допускается, что спрос известен заранее и что пополнение запасов происходит мгновенно. Теперь определяем наиболее экономичный размер заказа, который обеспечивает работу нашей модели при минимальных издержках. Каждый производственный период связан с затратами на подготовительно-заключительные операции. Будем считать, что затраты на подготовительно-заключительные операции не зависят от того, какое количество продукции будет закуплено, поэтому годовые затраты на подготовительно-заключительные операции пропорциональны числу производственных периодов за год.

Определение наилучшего размера партии можно сформулировать в виде математической задачи [11–13]. Пусть S – годовой сбыт, N – число производственных периодов в году Co – затраты на подготовительно-заключительные операции, Cu – издержки хранения запасов, приходящиеся на единицу запасов (стоимость материалов, рабочей силы и других постоянных расходов), k – годовая процентная ставка, налагающаяся на капитал. Для начала будем считать, что общие переменные издержки E включают в себя только две составляющие Cu и Co.

Годовые издержки хранения запасов определяются по формуле

$$E_{xp} = \frac{S}{2N}Cuk\,, \qquad (1)$$

где $S/2N$ – среднее число единиц хранящегося товара.

Общие годовые затраты на подготовительно-заключительные операции составляют

$$E = CoN\,. \qquad (2)$$

Сумма этих двух величин равна общим годовым переменным издержкам

$$E = CoN + \frac{S}{2N}Cuk\,. \qquad (3)$$

Оптимальным числом производственных периодов является No, минимизирующее (3). Чтобы найти *No*, найдем производную по *N* и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial E}{\partial N} = Co - SCuk2N^2 = 0, \quad (4)$$

откуда

$$No = \sqrt{SCuk/2Co} \quad (5)$$

является минимумом, так как вторая производная положительна.

Количество продукции, заказанной за один период *Qo* (или размер заказа), при котором издержки минимальны, равняется общему годовому спросу, деленному на число производственных периодов, обеспечивающих работу при минимальных издержках:

$$Qo = \frac{S}{No} = \sqrt{\frac{2CoS}{Cuk}}. \quad (6)$$

Теперь найдем размер заказа *Q*. Учитывая, что $q = S/N$, где *q* – размер заказа, формулу (3) можно записать в виде

$$E = \frac{CoS}{q} + \frac{Cukq}{2}. \quad (7)$$

Дифференцируя по *q*, получаем $\frac{\partial E}{\partial q} = -\frac{CoS}{q^2} + \frac{Cuk}{2}$. Отсюда находим решение нашей задачи (формула Уилсона) в виде

$$qo = Q = \sqrt{\frac{2CoS}{Cuk}}. \quad (8)$$

Выражения (5) и (6) можно записать в другой форме [14]. В некоторых отраслях удобно говорить о запасах, имея в виду их стоимости, выражая годовое потребление через стоимость проданных товаров. Годовое потребление можно записать как $A = SCu$. Размер заказа определяется по формуле $q = QCu$. Теперь можно записать выражения $E = nCo + \frac{Ak}{2n}$ и $no = \sqrt{\frac{Ak}{2Co}}$. Стоимость заказа составляет

$$qo = \frac{A}{no} = \sqrt{\frac{2ACo}{k}}. \quad (9)$$

Стоимость среднего размера запасов составляет $qo/2$. Средний размер запасов, выраженный через годовой сбыт, равен

$$f = \frac{qo}{2A} = \sqrt{\frac{Co}{2Ak}}. \quad (10)$$

Логарифмируя, получаем

$$\log f = \frac{1}{2\log\left(\frac{Co}{2k}\right)} - \frac{1}{2\log A}. \quad (11)$$

Первый член правой части этого выражения – постоянная величина, так как *Co* и *k* – постоянные. Разовые поставки дорогостоящих товаров должны быть невелики.

2.2. Модель управления запасами при постоянной интенсивности спроса, нулевом времени доставки заказа и издержках вследствие дефицита

Рассмотрим случай, когда имеется дефицит и издержки вследствие дефицита. Полностью проанализировать влияние дефицита на различные политики управления запасами можно, только когда каждому дефициту будут сопоставлены определенные издержки. Вместо нахождения издержек вследствие дефицита можно исследовать политику управления запасами и вычислить величину этих издержек при такой политике [15–17]. Значение издержек вследствие дефицита для политики управления запасами проиллюстрируем на примере.

Рассмотрим задачу управления запасами, в которой дефицит будет наблюдаться во время τ_1 и задолженный спрос удовлетворяется при поступлении заказа Q'. Будем полагать, что спрос равномерный и что допускается возможность дефицита. Будем использовать следующие обозначения: *Co* – издержки выполнения заказа или затраты на подготовительно-заключительные операции; *Cu* – издержки хранения, приходящиеся на единицу товара; *Cz* – издержки вследствие дефицита, приходящиеся на единицу товара в течение единицы времени, *k* – процентная ставка на капитал, вложенный в запас, Q' – размер заказа, *S* – годовой спрос, $N = S/Q$ – число заказов, подаваемых за год, τ – длительность цикла заказа, $\tau N = 1$ год, *M* – максимальный запас. В данном случае в каждом цикле наличные запасы имеются в течение промежутка τ_1 и средний размер этих запасов равен $M/2$. Дефицит наблюдается в течение промежутка τ_2, и среднее число недостающих единиц товара составляет $(Q' - M)/2$. По определению $\tau = \tau_1 + \tau_2$. По геометрическому построению получаем $\frac{\tau_1}{M} = \frac{\tau_2}{Q' - M}$, следовательно, $\tau_1 = (\frac{M}{Q'})\tau$, $\tau_2 = (\frac{Q' - M)}{Q'}$. Общие переменные издержки за период τ будут состоять из трех частей: издержки выполнения заказа, издержки хранения запасов и издержки вследствие дефицита.

Следовательно, будем иметь следующие общие издержки:

$$E = CoN + Cuk\frac{M^2}{2Q'}N\tau + Cz\frac{(Q'-M)^2}{2Q}\tau_2 N. \quad (12)$$

Так как

$$\tau = \frac{1}{N}, \quad (13)$$

$$N = \frac{S}{Q}, \quad (14)$$

то, следовательно,

$$E = \frac{CoS}{Q'} + \frac{CuKM^2}{2Q'} + \frac{Cz(Q'-M)^2}{2Q'}. \quad (15)$$

Дифференцируя данное уравнение по M и Q' и приравнивая результаты к нулю, получаем оптимальные значения M и Q':

$$\frac{\partial E}{\partial M} = \frac{CukM}{Q'} - \frac{Cz}{Q'}(Q'-M) = 0. \quad (16)$$

Следовательно,

$$M = \frac{CzQ'}{Cz + Cuk}. \quad (17)$$

3. Компромиссное решение в динамической модели многоагентного взаимодействия

Рассмотрим динамическую модель многоагентного взаимодействия $\Gamma_{\text{Н}} = \left(I = \{1,2,...,n\}, \{(X_i, d_i)\}_1^n, \{H_i\}_1^n\right)$ функционирования предприятия, где I – множество акционеров, $X_i = (x_1,...x_n (i = \overline{1,n}))$ – множество политик управления, а $H_i : X = \Pi X_i \to R_1 (i = \overline{1,n})$, функция выигрыша i игрока, причем у каждого акционера имеется своя собственная функция издержек хранения запасов $E_i : X = \Pi X_i \to R_1 (i = \overline{1,n})$.

Функция дохода акционера i выражается формулой

$$H_i = A_i - E_i, \quad (18)$$

где A_i – общий доход акционера i.

У каждого акционера свои издержки E_i, состоящие из Cu_i (стоимость продукции) и Co_i (затраты на подготовительно-заключительные операции), No_i (оптимальное число производственных периодов), X_i – множество политик управления.

Годовые издержки хранения запасов определяются по формуле

$$E_i^{xp} = \frac{S}{2N}Cu_i k_i, \quad (19)$$

где $S/2N$ – среднее число единиц хранящегося товара.

Общие годовые затраты на подготовительно-заключительные операции составляют

$$E_i^{ПЗО} = Co_i N. \quad (20)$$

Сумма этих двух величин равна общим годовым переменным издержкам

$$E_i = Co_i N + \frac{SCu_i k_i}{2N}. \quad (21)$$

Трудность заключается в том, что подобранные коэффициенты Cu_i, Co_i дают различное оптимальное число периодов.

Пусть теперь Cu_i, Co_i – издержки двух типов, для каждого агента. Решая задачу на оптимизацию для каждого агента, получим разные числа периодов, оптимальных для каждого агента. Таким образом, возникает задача нахождения подходящей политики управления производственным комплексом. В качестве принципа оптимальности принимается компромиссное решение в динамической модели многоагентного взаимодействия.

Пусть X – компактное метрическое пространство. $H_i : X \to R_1, I = [1,...,n]$ суть непрерывные функции, $M_i = \max H_i(x) \mid x \in X$. Компромиссное решение C_H определяется следующим образом $C_H = \arg\min_{x\in X}\max_{i\in I}(M_i - H_i(x))$.

Обозначим через C_H^1 множество C_H. Упорядочим в точке x по величине отклонение от максимума все функции H_i, ... , Hn и выберем те точки C_H^1, для которых отклонение от максимума второй по порядку функции минимально, и обозначим это множество C_H^2. Выразим это следующим образом: $C_H^2 = \arg\min_{x\in C_H}\max_{i\in I}(M_i - H_i(x))$. По аналогии определим $C_H^k = \arg\min_{x\in C_H^{k-1}}\max_{i\in I}(M_i - H_i(x))$ для всех $k = 1,..., n$ множества C_h^k компактны [18, 19]. Компромиссным решением $x^* \in X$ называется $x^* = \arg(C_h^k)$, при $\dim(C_h^k) = 1$.

4. Практическая реализация модели Уилсона управления запасами

Рассмотрим простой пример нахождения компромиссного решения. Пусть есть три заинтересованных лица ($n = 3$): владелец склада, транспортная компания (обеспечивает доставку на склад) и владелец магазина (хранит свои товары на складе). В нашей задаче компромиссным решением будет количество закупок в году. Владелец склада имеет доход $A_i = S \cdot Cn_1$, где Cn_1 – стоимость хранения единицы товара, S – годовой сбыт. Тогда прибыль составит $H_1 = A_1 - E_1$, E_1 – общие издержки, рассчитываемые по формуле (21).

Рассмотрим задачу для конкретного случая. Возьмем стоимость хранения единицы товара $Cu_1 = 100$, годовой сбыт $S = 12$ единиц товара, годовая процентная ставка $k_1 = 0{,}05$, затраты на подготовительно-заключительные операции $Co_1 = 20$, прибыль склада будет $H_1 = 1200 - \left(\frac{12}{2N} \cdot 100 \cdot 0{,}05 + 20N\right)$. Транспортная компания доставляет единицы груза по стоимости $Cu_2 = 100$, $S_2 = 12$, $k_2 = 0{,}2$, $Co_2 = 20$. Доход будет равен $A_2 = Cu_2 \cdot S_2$, $H_2 = 1200 - \left(\frac{12}{2N} \cdot 100 \cdot 0{,}2 + 20N\right)$. Владелец магазина продает свою продукцию по цене $Cu_3 = 2000$, тогда издержки магазина будут равны $E_3 = E + A_1 + A_2$. Пусть стоимость единицы товара на оптовом складе равна 1000, тогда $H_3 = 24000\text{-}2400\text{-}E_3$.

Построим модель по доходам в зависимости от количества периодов закупок:

$$H = \begin{pmatrix} 1150 & 1145 & 1130 & 1112 & 1094 & 1075 & 1056 & 1036 & 1016 & 997 & 977 & 957 \\ 1060 & 1100 & 1100 & 1090 & 1076 & 1060 & 1042 & 1015 & 1006 & 988 & 969 & 950 \\ 12000 & 10725 & 10760 & 10771 & 10763 & 10775 & 10836 & 10891 & 10940 & 10879 & 10824 & 10774 \end{pmatrix}.$$

Выбирая наибольшее число из каждой строчки, получаем идеальный вектор $M = (1150, 1100, 12000)$. Поскольку первый столбец этого ряда имеет наименьшее значение, то компромиссным решением будет $x^* = 1$.

Заключение

В данной работе рассмотрены математические модели оптимального управления запасами производственного комплекса, которые позволяют минимизировать суммарные издержки хранения запасов. Авторами представлен пример практической реализации построенной динамической модели компромиссного многоагентного взаимодействия. В качестве принципа оптимальности принимается компромиссное решение управления запасами производственного комплекса при многоагентном взаимодействии акционеров. Разработанные авторами статьи математические модели позволяют разработать новые теоретические подходы к исследованию систем управления запасами, пригодных для практического применения.

Список литературы

1. Букан Д.Ф., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. М.: Наука, 1967. 423 с.

2. Шрайбфедер Дж. Эффективное управление запасами. М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. 304 с.

3. Бурмак В.В., Широченко Н.В. Моделирование решений по управлению запасами в условиях колебания потребности и недопустимости дефицита // Логистические системы в глобальной экономике. 2015. № 5. С. 476–477.

4. Калинина А.С. Моделирование процессов управления запасами и ресурсами на промышленном предприятии, определение и роль этих процессов // Актуальные вопросы экономики и управления: материалы III Междунар. науч. конф. М.: Буки-Веди, 2015. С. 90–93.

5. Kostyukov K.I., Zaytseva I.V., Bondarenko G.V., Svechinskaya T.A., Nechaeva S.V. Workforce planning as an element of control system. Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences. 2016. Т. 7. № 6. P. 2315–2319.

6. Zaytseva I., Poddubnaya N., Malafeev O., Vanina A., Novikova E. Solving a dynamic assignment problem in the socio-economic system. Journal of Physics: Conference Series. 2019. P. 012092.

7. Базилевский М.П., Носков С.И. Об одной математической модели управления запасами предприятия // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2016. № 16. С. 38–40.

8. Зайцева И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография. Ставрополь: НОУ ВПО СКСИ, 2009. 112 с.

9. Парушина Н.В., Ефимина О.А. Управление оборотным капиталом предприятия на основе применения экономико-математических моделей // Научные Записки ОрелГИЭТ. 2010. № 2. С. 149–152.

10. Гусева Е.Н. Экономико-математическое моделирование: учеб. пособие. М.: НОУ ВПО МПСИ, 2011. 216 с.

11. Калмакова Н.А., Подповетная Ю.В., Резанович Е.А. Методика определения рационального уровня оборотных средств промышленного предприятия // Вестник ЮУрГУ. Серия «Экономика и менеджмент». 2018. Т. 12. № 3. С. 70–75.

12. Козлов А.В. Целочисленные и игровые модели и методы управления запасами продукции: автореф. дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13. Санкт-Петербург, 2002. 18 с.

13. Malafeev O., Onishenko V., Zubov A., Bondarenko L., Orlov V., Petrova V., Kirjanen A., Zaytseva I. Optimal location problem in the transportation network as an investment project: a numerical method. AIP Conference Proceedings. 2019. P. 450058.

14. Фирсанова К.А., Ермашкевич Н.С. Сравнительный анализ моделей управления запасами // Вектор экономики. 2020. № 4 (46). С. 91.

15. Анисимова Ю.А., Канторова Л.В. Управление запасами компании // Актуальные проблемы экономики и управления. 2017. № 3 (15). С. 18–21.

16. Друцкая М.В. Проблемы оптимизации уровня запасов // Экономика. Бизнес. Банки. 2015. № 1 (10). С. 30–39.

17. Мальцева О.И., Машрабов Н. Совершенствование моделей формирования объема запасов // АПК России. 2018. Т. 25. № 5. С. 631–634.

18. Слесаренко А.П., Несторенко А.В. Разработка аналитических моделей оптимизации запасов информационной системы логистики предприятия // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. Т. 5. № 3 (71). С. 61–66.

19. Одияко Н.Н., Онипер В.Е. Имитационная модель управления запасами // Фундаментальные исследования. 2016. № 11 (4). С. 846–853.