УДК 336.76

# ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ НА РЕШЕНИЯ ИНВЕСТОРА: ДОБАВЛЕНИЕ БЕЗРИСКОВОГО АКТИВА

**Мочалина Е.П., Иванкова Г.В.**

*ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова», Москва, e-mail: Mochalina.EP@rea.ru, Ivankova.GV@rea.ru*

В настоящее время в современной литературе проблема влияния структуры портфеля на решение инвестора представлена как рассмотрение и расчет соотношения риск / доходность, интерпретация коэффициента бета и избыточной доходности портфеля. В некоторых случаях решение об инвестировании принимается на основе информации об избыточной доходности активов. В работе же представлена задача именно исследования структуры портфеля ценных бумаг содержащего безрисковый актив (в терминах весов), рассмотрены некоторые его свойства и представлены числовые характеристики. Выведена формула для нахождения весов оптимального портфеля, содержащего безрисковый актив. Дана оценка риска для эффективного портфеля. Авторами построена и иллюстрирована модель комбинированного портфеля, демонстрирующая возможности принятия решения инвестором, склонным к разным уровням риска. Формирование портфеля, соответствующего риск-аппетиту инвестора и его цели по доходности – основная задача управляющего портфелем (или самого инвестора). Проведенный в работе анализ методологии портфельного инвестирования (с использованием безрискового актива как инструмента понижения риска, принимаемого на себя инвестором) и оценка качества инвестиционных решений может рассматриваться как рекомендация для составления диверсифицированного портфеля на российском рынке ценных бумаг, соответствующего риск-аппетиту инвестора.

**Ключевые слова: инвестиционный анализ, портфельные инвестиции, портфельная теория, оптимальный портфель, эффективная граница, риск, безрисковый актив**

# THE INFLUENCE OF THE PORTFOLIO STRUCTURE TO THE INVESTOR’S DECISIONS: ADDING A RISKFREE ASSET

**Mochalina E.P., Ivankova G.V.**

*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, e-mail: Mochalina.EP@rea.ru, Ivankova.GV@rea.ru*

Nowadays the modern literature reflects the problem of the influence of the portfolio structure on the investor’s decision as consideration and calculation the risk / return ratio, interpreting the beta coefficient and excess portfolio return. In some cases, the investment decision is made based on information about the excess return on assets. The paper presents the task of studying the structure of a securities portfolio containing a risk-free asset (in terms of weights), considers some of its properties and presents its numerical characteristics. A formula for finding the weights of the optimal portfolio containing a risk-free asset has been derived. An assessment of the risk for an effective portfolio is given. The authors have built and illustrated a combined portfolio model that demonstrates the decision-making opportunities of an investor prone to different levels of risk. Construction of a portfolio that corresponds to the risk appetite of the investor and his target in terms of profitability is the key problem for portfolio manager (or the investor himself). The analysis of the portfolio investment methodology (using a risk-free asset as a risk mitigation tool accepted by the investor) and the assessment of the quality of investment decisions carried out in this work can be considered as a recommendation for compiling a diversified portfolio in the Russian securities market that corresponds to the investor’s risk appetite.

**Keywords: investment analysis, portfolio investments, portfolio theory, optimal portfolio, effective frontier, risk, risk-free asset**

Работы Г. Марковица [1] и Дж. Тобина [2] являются основными в современной портфельной теории. Портфель Тобина – это комбинированный портфель, состоящий из рискованных и безрисковых активов и имеющий минимальный риск при заданной целевой доходности портфеля [2]. На практике в качестве безрискового актива часто рассматривают облигации федерального займа (ОФЗ) или государственные краткосрочные бескупонные облигации (ГКО), поскольку именно они имеют максимальный уровень надежности.

С появлением выбора безрискового актива как части инвестирования, лицо, принимающее решение, может приобрести этот актив, а также добавить его в уже рассматриваемый рискованный портфель. Соответственно, это расширяет множество инвестиционных возможностей, меняет вид и форму эффективной границы [1]. Инвесторы заинтересованы в выборе решения из «обновленного» эффективного множества, поэтому все изменения, возникшие при добавлении в рассматриваемый портфель безрискового актива, должны быть проанализированы.

Принятие решения инвестором на практике представляет собой постановку и решение следующих задач: оценка будущей доходности и измерение риска (для расчета которого используется дисперсия выборки [3, с. 451, 462]). Поскольку предполагается наличие на рынке безрискового актива, то получаем задачу о разделении предполагаемого инвестируемого бюджета в определённых долях между рыночной частью портфеля и безрисковым активом. Для этого следует провести анализ и численную оценку параметров возможных решений построенного комбинированного портфеля. В работе для этих целей используется метод количественных оценок, который в настоящее время является одним из основных инструментов для исследования области финансов и инвестиций.

## Материалы и методы исследования

Пусть $\overline{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ – $m$-й единичный вектор; $\overline{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ – вектор возможных доходностей рискованных активов (случайных величин); $\overline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$ – вектор ожидаемых доходностей активов; $C_{n\times n} = \left\{c_{ij}\right\}$ – ковариационная матрица доходностей активов; $\overline{x}^*_\mu = \begin{pmatrix} x_1^*(\mu) \\ \dots \\ x_n^*(\mu) \end{pmatrix}$ – вектор, описывающий структуру оптимального портфеля с целевой ожидаемой доходностью μ.

***Утверждение.*** *Имеет место линейная зависимость между ковариацией доходности оптимального портфеля с доходностью m-го актива* $\left(cov\left(r(\Pi)_\mu, \xi_m\right)\right)$ *и ожидаемой доходностью m-го актива* $\left(r_m = M\left(\xi_m\right)\right), m = 1,\dots,n.$

***Доказательство.*** По определению доходность оптимального портфеля будет равна

$$r(\Pi)_\mu = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\mu)\cdot\xi_k = \left(x_1^*(\mu) \quad \dots \quad x_n^*(\mu)\right)\cdot\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \overline{x}_\mu^{*T}\cdot\overline{\xi}.$$

Ее ковариация с доходностью $m$-го актива $\xi_m$ может быть записана следующим образом:

$$cov\left(r(\Pi)_\mu, \xi_m\right) = cov\left(\overline{x}_\mu^{*T}\cdot\overline{\xi}, \xi_m\right) = cov\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^*(\mu)\cdot\xi_k, \xi_m\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\mu)\cdot cov\left(\xi_k, \xi_m\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\mu)\cdot c_{mk} = \left(c_{m1} \quad \dots \quad c_{mn}\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1^*(\mu) \\ \dots \\ x_n^*(\mu) \end{pmatrix} = \left(\overline{e}_m^{\,T}\cdot C\right)\cdot\overline{x}_\mu^*.$$

С учетом [4]

$$x_\mu^* = \mu\left[\frac{c}{ac-b^2}C^{-1}\cdot\overline{r} - \frac{b}{ac-b^2}C^{-1}\cdot\overline{e}\right] + \left[\frac{a}{ac-b^2}C^{-1}\cdot\overline{e} - \frac{b}{ac-b^2}C^{-1}\cdot\overline{r}\right]$$

где

$$a = \overline{r}^T\cdot C^{-1}\cdot\overline{r}\ , b = \overline{r}^T\cdot C^{-1}\cdot\overline{e},\ c = \overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\overline{e},$$

и того, что $\overline{e}_m^{\,T}\cdot\overline{r} = r_m$, получаем

$$cov\left(r(\Pi)_\mu, \xi_m\right) = \left(\overline{e}_m^{\,T}\cdot C\right)\cdot\overline{x}_\mu^* =$$

$$= \overline{e}_m^{\,T} \cdot C \cdot \left( \frac{\mu c}{ac-b^2} \cdot C^{-1} \cdot \overline{r} - \frac{\mu b}{ac-b^2} \cdot C^{-1} \cdot \overline{e}_m + \frac{a}{ac-b^2} \cdot C^{-1} \cdot \overline{e}_m - \frac{b}{ac-b^2} \cdot C^{-1} \cdot \overline{r} \right) =$$

$$= \overline{e}_m^{\,T} \cdot \frac{\mu c}{ac-b^2} \cdot C \cdot C^{-1} \cdot \overline{r} - \overline{e}_m^{\,T} \cdot \frac{\mu b}{ac-b^2} \cdot C \cdot C^{-1} \cdot \overline{e}_m + \frac{a}{ac-b^2} \cdot \overline{e}_m^{\,T} \cdot C \cdot C^{-1} \cdot \overline{e}_m -$$

$$- \frac{b}{ac-b^2} \cdot \overline{e}_m^{\,T} \cdot C \cdot C^{-1} \cdot \overline{r} = \frac{\mu c - b}{ac-b^2} \cdot r_m + \frac{a - \mu b}{ac-b^2}.$$

Таким образом, можем сделать вывод, что все точки $\left(r_m, cov\left(r(\Pi)_\mu, \xi_m\right)\right), m = 1,\ldots,n,$ лежат на одной прямой. То есть имеет место линейная связь.

Добавим теперь к множеству активов безрисковый актив $F$, имеющий доходность $r_f$ и риск ноль (то есть дисперсия доходности этого актива рана нулю). Сформируем новый портфель $\Pi_1$ следующим образом:

$$w_F = \delta,\ w_\Pi = 1 - \delta,$$

здесь П – портфель, состоящий из первоначальных (рискованных) активов и имеющий структуру $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ ($x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$). Тогда

$$r(\Pi_1) = \delta \cdot r_f + (1-\delta) \cdot \left(\overline{x}^T \cdot \overline{r}\right), \sigma(\Pi_1) = (1-\delta) \cdot \sqrt{\overline{x}^T \cdot C \cdot \overline{x}}.$$

Геометрически инвестиционная возможность, соответствующая портфелю $\Pi_1$, будет лежать на прямой, соединяющей точки $(0, r_f)$ и $\left(\sqrt{\overline{x}^T \cdot C \cdot \overline{x}}, \overline{x}^T \cdot \overline{r}\right)$ (рис. 1).

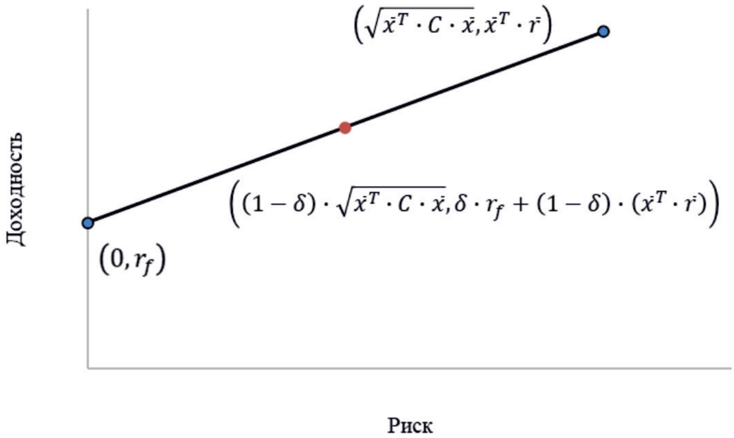


*Рис. 1. Портфель $\Pi_1$*

Изменяя вес безрискового актива, очевидно, можно получить все точки отрезка. Таким образом, добавляя все такие прямые линии к множеству инвестиционных возможностей можно получить новое множество инвестиционных возможностей (с учетом наличия безрискового актива). ***Эффективная граница*** множества инвестиционных возможностей без учета безрискового актива – это, как известно, его подмножество, представляющее собой объединение всех недоминируемых возможностей. Технически (в результате всех вычислений) получается функция, выражающая зависимость риска портфеля от его ожидаемой доходности. Расширим теперь задачу поиска оптимального портфеля следующим образом: вектор структуры портфеля, вектор ожидаемых доходностей, вектор доходностей и ковариационная матрица дополняются безрисковой доходностью (весом актива с такой доходностью соответственно). Пусть вес безрискового актива составляет $x_0$, доходность – $r_f$. Тогда получаем

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{x} \end{pmatrix}, \tilde{r} = \begin{pmatrix} r_f \\ \overline{r} \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} r_f \\ \overline{\xi} \end{pmatrix}.$$

Поэтому расширенная задача оптимизации будет иметь следующий вид:

$$\sqrt{\overline{x}^T \cdot C \cdot \overline{x}} \to \min$$

$$\begin{cases} \overline{r}^T \cdot \overline{x} + x_0 \cdot r_f = \mu \\ \overline{e}^T \cdot \overline{x} + x_0 = 1 \end{cases},$$

где $\overline{e} - n$ -мерный вектор, состоящий из единиц.

Докажем следующую ***теорему***:

*Для расширенной модели Марковица (которая включает безрисковый актив) структура оптимального портфеля имеет следующий вид:*

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{\grave{\imath}}^* = \frac{1}{\boldsymbol{d}} \cdot \begin{pmatrix} \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{e} \cdot \overline{\ }\boldsymbol{C}\right)^{\boldsymbol{T}} \cdot \overline{\boldsymbol{r}}^{1} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{f}} \cdot \overline{\ }\right) \\ \left(\grave{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}}\right) \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}} \cdot \overline{\boldsymbol{e}}\right) \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}} \cdot \overline{\boldsymbol{e}}\right)^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}} \cdot \overline{\boldsymbol{e}}\right).$$

Все эффективные портфели в этом случае [5, с. 109] есть линейная комбинация безрискового актива (или портфеля со структурой $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ и ***рыночного портфеля***, имеющего структуру

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{market}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\boldsymbol{C}^{-1} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}} \cdot \overline{\boldsymbol{e}}\right)}{\overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{f}} \cdot \overline{\boldsymbol{e}}\right)} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Заметим, что рыночный портфель зависит от множества допустимых портфелей, состоящего из портфелей, формируемых из ценных бумаг, имеющихся на рынке.

***Доказательство.*** Стандартный подход при решении задачи нелинейной оптимизации – метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в этом случае будет иметь вид

$$L = \overline{x}^T \cdot C \cdot \overline{x} - \lambda_1 \cdot \left(\overline{r}^T \cdot \overline{x} + x_0 \cdot r_f - \mu\right) - \lambda_2 \cdot \left(\overline{e}^T \cdot \overline{x} + x_0 - 1\right).$$

Далее следует составить систему уравнений, представляющих собой все частные производные этой функции, и приравнять их к нулю. В этом случае удобно записать функцию Лагранжа в явном виде

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot c_{ij} \cdot x_j - \lambda_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i + x_0 \cdot r_f - \mu\right) - \lambda_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_0 - 1\right).$$

Для нахождения $\partial L / \partial x_k \left(k = 1, \dots, n\right)$ можно, например, применить рассуждения, аналогичные проведенным авторами в работе [4]. Это приведет к уравнению

$$\boldsymbol{C} \cdot \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{e}} = 0.$$

Остается еще найти частные производные по $x_0, \lambda_1, \lambda_2$. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = -\lambda_1 \cdot r_f - \lambda_2, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\overline{r}^T \cdot \overline{x} - x_0 \cdot r_f + \mu, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -\overline{e}^T \cdot \overline{x} - x_0 + 1.$$

Следовательно, необходимо найти решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C\cdot\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\bar{\boldsymbol{e}}=0 \\ \boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{r_f}+\boldsymbol{\lambda}_2=0 \\ \bar{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{r_f}=\mu \\ \bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}_0=1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения находим, что $\lambda_2=-\lambda_1\cdot r_f$. В силу существования $C^{-1}$ (из условия) первое уравнение системы дает вектор структуры портфеля $\bar{x}$:

$$C\cdot\bar{x}=\lambda_1\cdot\bar{r}+\lambda_2\cdot\bar{e}=\lambda_1\cdot\bar{r}+(-\lambda_1\cdot r_f)\cdot\bar{e}=\lambda_1\cdot(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e})\Rightarrow\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot(\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}).$$

Подставим полученный результат в оставшиеся уравнения системы. Имеем

$$\begin{cases}\lambda_1\cdot\bar{r}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)+x_0\cdot r_f=\mu \\ \lambda_1\cdot\bar{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)+x_0=1\end{cases}.$$

Применим правило Крамера для нахождения $\lambda_1$. Определитель матрицы системы равен

$$\Delta=\bar{r}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)-r_f\cdot\bar{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)=\left(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right).$$

А $\Delta_1=\mu-r_f$. Поэтому

$$\lambda_1=\frac{\mu-r_f}{\left(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)},$$

$$\bar{x}_\mu^*=\frac{\mu-r_f}{\left(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right).$$

Из четвертого уравнения теперь легко находим, что

$$x_0(\mu)=1-\bar{e}^T\cdot\bar{x}_\mu^*=1-\frac{\left(\mu-r_f\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}{\left(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)-\left(\mu-r_f\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}{\left(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}=$$

$$=\frac{(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T-\bar{e}^T\cdot\mu+r_f\cdot\bar{e}^T)\cdot C^{-1}\cdot(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e})}{(\bar{r}^T-r_f\cdot\bar{e}^T)\cdot C^{-1}\cdot(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e})}=\frac{(\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\mu}\cdot\bar{\boldsymbol{e}})^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot(\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\bar{\boldsymbol{e}})}{(\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\bar{\boldsymbol{e}})^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot(\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\bar{\boldsymbol{e}})}.$$

Теорема доказана.

Далее, заметим, что $\left(C^{-1}\right)^T=C^{-1}$ (симметричность ковариационной, а значит, и обратной матрицы), а также что $d$ – число. Следовательно, $d^T=d$. Поэтому, если доходность рискованного портфеля с оптимальной структурой равна $r(\Pi)_\mu$, то риск (стандартное отклонение), соответственно, будет равен

$$\sigma(\Pi)_\mu=\sqrt{\bar{x}_\mu^{*T}\cdot C\cdot\bar{x}_\mu^*}=\sqrt{\frac{\left(\mu-r_f\right)\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)^T\cdot\left(C^{-1}\right)^T\cdot C\cdot\left(\mu-r_f\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}{\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}}=$$

$$=\frac{\left(\mu-r_f\right)}{\sqrt{\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\bar{r}-r_f\cdot\bar{e}\right)}}.$$

Доходность рыночного портфеля (по определению) есть $\overline{x}_{market}{}^{T}\cdot\tilde{\xi}$. Тогда, с учетом (1), симметричности ковариационной, а значит, и обратной матрицы, а также того, что в знаменателе стоит число, его ожидаемая доходность и дисперсия будут равны

$$\overline{r}\left(\Pi_{market}\right)=M\left(\overline{x}_{market}{}^{T}\cdot\tilde{\xi}\right)=\frac{\overline{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)}{\overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)};\tag{2}$$

$$\sigma^2\left(\Pi_{market}\right)=\overline{x}_{market}{}^{T}\cdot C\cdot\overline{x}_{market}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)^T\cdot\left(C^{-1}\right)^T}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{C^{-1}\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)}{\left(\overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)\right)^2}.\tag{3}$$

Эффективная граница, как функция стандартного отклонения, будет в этом случае прямой линией, проходящей через точки (0, $r_f$) и $\left(\sigma\left(\Pi_{market}\right),\overline{r}\left(\Pi_{market}\right)\right)$ (рис. 1) и имеющей (см. утверждение) следующее уравнение:

$$\overline{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\Pi}\right)\right)=\boldsymbol{r_f}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\overline{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{\Pi_{market}}\right)-\boldsymbol{r_f}}{\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\Pi_{market}}\right)}.\tag{4}$$

Пусть П – произвольный портфель со структурой $\tilde{x}$. Тогда, снова учетом (1) и свойств ковариационной матрицы, имеем

$$cov\left(\tilde{x}^T\cdot\tilde{\xi},\overline{x}_{market}\cdot\tilde{\xi}\right)=\tilde{x}^T\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\cdot\overline{x}_{market}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \overline{x}^T\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{C^{-1}\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)}{\overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\left(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}}\right)}\end{pmatrix}.\tag{5}$$

Таким образом, мы снова получили, что ковариация представляет собой линейную функцию. На этот раз от $\tilde{x}$. Обозначив его доходность посредством $r$(П) и используя тот факт, что его ожидаемая доходность складывается из ожидаемой доходности безрискового актива и рискованного портфеля, получаем

$$\overline{r}\left(\Pi\right)=\tilde{x}^T\cdot\tilde{r}=x_0\cdot r_f+\overline{x}^T\cdot\overline{r}.$$

В силу того, что $\overline{x}^T\cdot\overline{e}=1-x_0$ последнее выражение можно переписать в виде

$$\overline{x}^T\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)=\overline{r}\left(\Pi\right)-x_0\cdot r_f-r_f\cdot\left(1-x_0\right).\tag{6}$$

Теперь легко установить линейную зависимость между $cov\left(r\left(\Pi\right),r\left(\Pi_{market}\right)\right)$ и $\overline{r}\left(\Pi\right)$. Действительно, из (5) и (6) имеем

$$cov\left(r\left(\Pi\right),r\left(\Pi_{market}\right)\right)=cov\left(\overline{x}^T\cdot\tilde{\xi},\overline{x}_{market}{}^{T}\cdot\tilde{\xi}\right)=\frac{\overline{x}^T\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot\left(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e}\right)}=$$

$$=\frac{\overline{r}\left(\Pi\right)-x_0\cdot r_f-r_f\cdot(1-x_0)}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}=\frac{\overline{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{\Pi}\right)-\boldsymbol{r_f}}{\overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot(\overline{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r_f}\cdot\overline{\boldsymbol{e}})}.\tag{7}$$

Далее, из (2) и (3) можно сделать вывод, что

$$\frac{r(\Pi_{market})-r_f}{\sigma^2(\Pi_{market})}=\frac{\overline{r}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})-r_f\cdot\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}\cdot\frac{\left(\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})\right)^2}{(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}=$$

$$=\frac{(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}\cdot\frac{\left(\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})\right)^2}{(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}=\boldsymbol{\overline{e}^T\cdot C^{-1}\cdot(\overline{r}-r_f\cdot\overline{e})}.$$

Теперь (7) можно переписать в виде

$$cov\left(r(\Pi),r(\Pi_{market})\right)=\frac{\overline{r}(\Pi)-r_f}{\dfrac{r(\Pi_{market})-r_f}{\sigma^2(\Pi_{market})}}\Rightarrow$$

$$\overline{r}(\Pi)=\frac{r(\Pi_{market})-r_f}{\sigma^2(\Pi_{market})}\cdot cov\left(\overline{x}^T\cdot\tilde{\xi},\overline{x}_{market}{}^T\cdot\tilde{\xi}\right)+r_f.$$

Поскольку (по определению [6, с. 509])

$$\beta(\Pi)=\frac{cov\left(\overline{x}^T\cdot\tilde{\xi},\overline{x}_{market}{}^T\cdot\tilde{\xi}\right)}{\sigma^2(\Pi_{market})},$$

последнее уравнение можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\overline{r}(\Pi)=r_f.+\beta(\Pi)\cdot(r(\Pi_{market})-r_f)}.$$

Величина в скобках здесь – это избыточная доходность рыночного портфеля. Теперь мы готовы доказать следующее

***Утверждение.*** *Для произвольного портфеля* П *верно следующее:*

1) $\boldsymbol{\overline{r}(\Pi)=r_f.+\beta(\Pi)\cdot(r(\Pi_{market})-r_f)}$;

2) $D(\Pi)\ge\left(r(\Pi)-r_f\right)^2/\left(r(\Pi_{market})-r_f\right)^2\cdot\sigma^2(\Pi_{market})$. *Строгое равенство будет иметь место тогда и только тогда, когда* $\rho(\Pi,\Pi_{market})=1$ *(то есть портфель является эффективным);*

3) $\beta(\Pi)=\rho(\Pi,\Pi_{market})\cdot\sigma(\Pi)/\sigma(\Pi_{market})$. *Для эффективного портфеля* $\beta(\Pi)=$ $=\sigma(\Pi)/\sigma(\Pi_{market})$.

***Доказательство.*** Нам осталось доказать только 2). Для произвольного портфеля $\Pi_1=(1-\omega)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\omega\cdot\overline{x}_{market}$, в котором вес рискованной части равен коэффициенту $\omega=\beta(\Pi)=\left(r(\Pi)-r_f\right)/\left(r(\Pi_{market})-r_f\right)$ ожидаемая доходность будет равна $r(\Pi)$. Действительно:

$$r(\Pi_1)=(1-\omega)\cdot r_f+\omega\cdot r(\Pi_{market})=\left(1-\frac{r(\Pi)-r_f}{r(\Pi_{market})-r_f}\right)\cdot r_f+$$

$$+\frac{r(\Pi)-r_f}{r(\Pi_{market})-r_f}\cdot r(\Pi_{market})=\frac{\left(r(\Pi_{market})-r_f\right)\cdot r_f+\left(r(\Pi)-r_f\right)\cdot r(\Pi_{market})}{r(\Pi_{market})-r_f}=r(\Pi).$$

А сам портфель $П_1$ будет лежать на эффективной границе. Следовательно, из (4) имеем

$$\sigma^2(П) = D(П) \geq \frac{\left(r(П) - r_f\right)^2}{\left(r(П_{market}) - r_f\right)^2} \cdot \sigma^2(П_{market}).$$

Из 1) следует, что

$$\frac{\left(r(П) - r_f\right)^2}{\left(r(П_{market}) - r_f\right)^2} = \frac{cov^2\left(r(П), r(П_{market})\right)}{\sigma^4(П_{market})}.$$

Применив к числителю дроби неравенство Коши – Буняковского [7, с. 105], получаем

$$\frac{\left(r(П) - r_f\right)^2}{\left(r(П_{market}) - r_f\right)^2} \leq \frac{\sigma^2(П) \cdot \sigma^2(П_{market})}{\sigma^4(П_{market})} = \frac{D(П)}{\sigma^2(П_{market})}.$$

Равенство будет иметь место только в случае, если $cov\left(r(П), r(П_{market})\right) = D(П) \cdot D(П_{market})$, то есть $\rho(П, П_{market}) = 1.$ Тем самым 2) доказано.

## Результаты исследования и их обсуждение

Для лучшего понимания результатов рассмотрим продолжение примера, рассмотренного авторами в работе [4].

***Пример [4].*** Рассмотрим задачу добавления безрискового актива (ОФЗ SU52003RMFS9, купон 2,5%) к следующему портфелю: акции ПАО «Центр международной торговли» (WTCMP), акции Волгоградэнергосбыт (VGSB), ПАО ТГК-1 (TGKA), акции Татнефть (TATNP) акции компании Селигдар (SELGP). Исходные данные загружены с сайта Московской Фондовой Биржи [8] (данные на 16.03.2021). Основные показатели рискованных активов представлены таблица, эффективная граница комбинированного портфеля на рис. 2.

Основные параметры активов портфеля

| Параметры активов | WTCMP | VGSB | TGKA | TATNP | SELGP |
|---|---|---|---|---|---|
| Риск | 0,3537298 | 0,9027569 | 0,3520088 | 0,4142920 | 0,4825203 |
| Ожидаемая доходность | 0,549179468 | 0,016211624 | 0,588725112 | 0,932287324 | 0,120334357 |

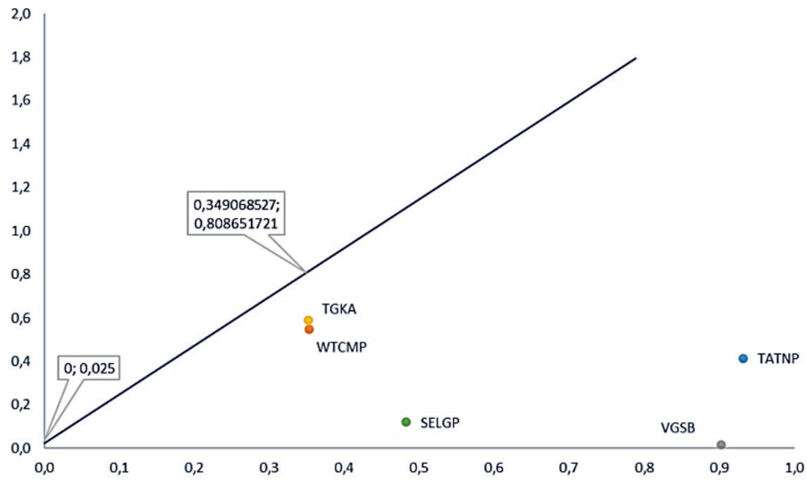


*Рис. 2. Эффективная граница комбинированного портфеля: добавление в портфель ОФЗ SU52003RMFS9*

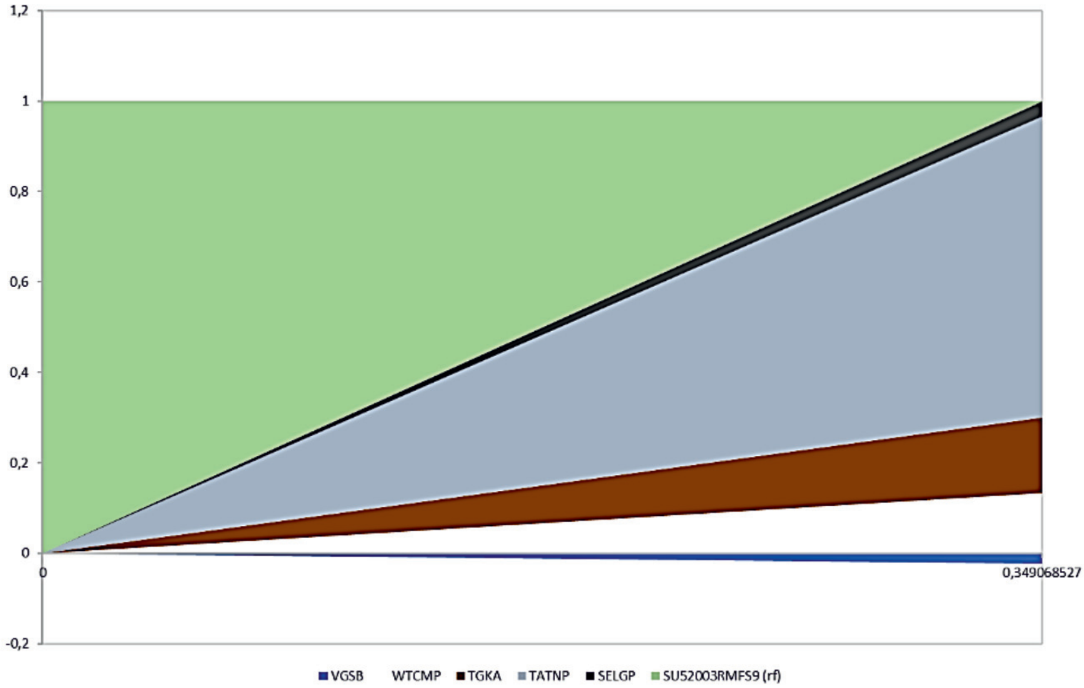


*Рис. 3. Структура портфеля в случае включения в портфель ОФЗ SU52003RMFS9*

То, что добавление безрискового актива принципиально изменило форму эффективной границы, показано на рис. 2. Очевидно, что введение в структуру портфеля безрискового актива существенно расширяет возможности инвестора, снижая его риски. Далее, рис. 3 демонстрирует вклад каждого из пяти рискованных активов в консолидированный риск портфеля. Такая картина позволяет инвестору понять, что увеличение доходности (а значит, и риска) комбинированного портфеля может быть достигнуто за счет короткой продажи самого низкодоходного актива (VGSB) и вложения всех свободных средств в самую перспективную компанию – «Татнефть» (что по факту приводит к скачкообразному увеличению ее доли в комбинированном портфеле). Переход за границу касательного портфеля приводит к тому, что добавление выбранной ОФЗ уже нецелесообразно: это очевидно из рис. 3 (доля безрискового актива в этой точке равна нулю). На рис. 2 и 3 – фактически наглядное руководство для инвестора по формированию комбинированного портфеля.

## Заключение

В работе рассмотрена теорема о том, что при существовании безрискового актива и портфелем рискованных активов, выбор инвестором – это выбор между безрисковым активом и тем же портфелем рисковых активов. Проведен анализ структуры комбинированного портфеля, влияющий на возможные решения инвестора. Для иллюстрации результата авторы исследовали и представили пример построения оптимального портфеля, содержащего безрисковый актив (на реальных данных российского фондового рынка). Построенный пример демонстрирует, что риск-аппетит инвестора определяется долей безрискового актива в комбинированном портфеле.

## Список литературы

1. Markowitz H.M. Portfolio selection. The Journal of Finance.1952. Vol. 7. Issue 1. P. 77–91.

2. Tobin J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk: The Review of Economic Studies. 1958. Vol. 25. No. 2. P. 65–86.

3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: МЦНМО, 2016. 900 с.

4. Мочалина Е.П., Иванкова Г.В. Влияние структуры портфеля на решения инвестора // Фундаментальные исследования. 2021. № 9. С. 38–44.

5. Касимов Ю.Ф., Аль-Натор М.С., Колесников А.Н. Основы финансовых вычислений. Портфели активов, оптимизация и хеджирование. М.: КНОРУС, 2019. 322 с.

6. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. М.: Инфра-М, 2018. 1028 с.

7. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: URSS, 2021. 656 с.

8. Официальный сайт Московской Фондовой Биржи. [Электронный ресурс]. URL: https://www.moex.com/ (дата обращения: 16.10.2021).