УДК 338.2

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В РАМКАХ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С УЧЕТОМ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Геворкян Э.А., Синчуков А.В., Татарников О.В.

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова (РЭУ), Москва,
e-mail: gevor_mesi@mail.ru, avsinchukov@gmail.com, ovtatarnikov@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей динамики изменения национального дохода в зависимости от времени в модели гармонического осциллятора с внешним воздействием. Предполагается, что национальный доход как функция от времени соответствует неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (уравнению гармонического осциллятора) с постоянными действительными коэффициентами. При этом считается, что правая часть уравнения (внешние инвестиции) как функция от времени имеет периодический характер. Определен экономический смысл каждого члена дифференциального уравнения. При получении решения дифференциального уравнения без учета затухания были применены метод Эйлера и метод вариации произвольных постоянных. А решение дифференциального уравнения с учетом затухания (затухание за счет транзакционных издержек) найдено с помощью метода комплексных амплитуд. Исследованы особенности решения дифференциального уравнения в случае резонанса, когда частота периодического изменения внешних инвестиций оказывается равной частоте собственных колебаний национального дохода. Проведен численный и графический анализ полученных результатов в зависимости от параметров, характеризующих изменение национального дохода как функцию от времени. Найдена зависимость максимума амплитуды колебаний национального дохода от коэффициента затухания в случае резонанса. Показано, что с увеличением коэффициента затухания максимальное значение амплитуды уменьшается.

Ключевые слова: национальный доход, гармонический осциллятор, внешние периодические инвестиции, резонанс, дифференциальное уравнение

PECULIARITIES OF THE DYNAMICS OF CHANGE OF NATIONAL INCOME WITHIN THE MODEL OF THE HARMONIC OSCILLATOR TAKING INTO ACCOUNT EXTERNAL INFLUENCE

Gevorkyan E.A., Sinchukov A.V., Tatarnikov O.V.

Plekhanov Russian University of economics (REU), Moscow,
e-mail: gevor_mesi@mail.ru, avsinchukov@gmail.com, ovtatarnikov@mail.ru

This article is devoted to the study of features of the dynamics of change of national income as a function of time in the model of the harmonic oscillator with external influence. It is assumed that the national income as a function of time satisfies a non-uniform ordinary differential equation of the second order (the equation of the harmonic oscillator) with constant real coefficients. At the same time, it is considered that the right part of the equation (external investments) as a function of time has a periodic character. The economic meaning of each term of the differential equation is determined. To obtain a solution of the differential equation without taking into account attenuation the Euler method and the method of variation of arbitrary constants were used. And the solution of the differential equation taking into account attenuation (attenuation due to transaction costs) is found using the method of complex amplitudes. The peculiarities of the solution of differential equation in the case of resonance when the frequency of own fluctuations of national income are investigated. Numerical and graphical analysis of the obtained results depending on the parameters that characterize the change of national income as a function of time is performed. The dependence of the maximum amplitude of national income fluctuations on the attenuation coefficient in the case of resonance is found. It is shown, that with an increase of coefficient of attenuation the maximal value of amplitude decreases.

Keywords: national income, harmonic oscillator, external periodic investments, resonance, differential equation

В последние годы в научной литературе нередко встречаются статьи, посвященные исследованиям экономических систем в рамках различных физических моделей [1–3]. В работах [4, 5] авторы исследуют неравновесные экономические процессы, а также закон спроса и предложения на основе физических законов. В работе [6] проведено исследование зависимости национального дохода от времени с применением методов физических исследований. Поставленная задача решается в рамках модели гармонического осциллятора. При этом были рассмотрены свободные колебания осциллятора с затуханием. Целью настоящей работы является выяснение особенностей динамики изменения национального дохода в зависимости от времени в модели осциллятора с внешним периодическим воздействием. Математически задача сводится к решению обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными действительными коэффициентами.

Постановка задачи, метод решения и результаты исследования

Предположим, что национальный доход $Y(t)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению гармонического осциллятора без учета затухания (коэффициент затухания $\eta = 0$), но с внешним периодическим воздействием:

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot Y(t) = F(t), \tag{1}$$

где член $\frac{d^2Y(t)}{dt^2}$ есть темп изменения национального дохода (в физике – ускорение движения), член $\omega_0^2 \cdot Y(t)$ соответствует рыночной силе (в физике – сила, возвращающая систему к точке равновесия), ω_0 – частота собственных колебаний осциллятора ($\eta = 0$), $F(t) = F_0 \cos \omega t$ есть периодически меняющиеся внешние инвестиции (в физике – внешняя действующая сила), ω и $F_0 = \text{const}$ – частота и амплитуда колебаний внешних инвестиций.

Заметим, что в работе [6] показано, что дифференциальное уравнение (1) для функции $Y(t)$, аналогичное дифференциальному уравнению гармонического осциллятора, получается из динамической модели Кейнса, в основе которой лежит основной закон экономического баланса.

Как известно [7], общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$Y(t) = Y_{\text{о.о.}}(t) + Y_{\text{ч.н.}}(t), \tag{2}$$

где $Y_{\text{о.о.}}(t)$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения, а $Y_{\text{ч.н.}}(t)$ есть одно частное решение неоднородного уравнения. Решая соответствующее однородное уравнение методом Эйлера, для $Y_{\text{о.о.}}(t)$, получим:

$$Y_{\text{о.о.}}(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \tag{3}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Для нахождения частного решения $Y_{\text{ч.н.}}(t)$ воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. А именно, $Y_{\text{ч.н.}}(t)$ ищем в виде:

$$Y_{\text{ч.н.}}(t) = c_1(t) \cos \omega_0 t + c_2(t) \sin \omega_0 t, \tag{4}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ пока не известные функции. Подставляя (4) в (1) для определения $c_1(t)$ и $c_2(t)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos \omega_0 t + c_2'(t) \sin \omega_0 t = 0, \\ -c_1'(t)\omega_0 \sin \omega_0 t + c_2'\omega_0 \cos \omega_0 t = F_0 \cos \omega t. \end{cases} \tag{5}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$c_1(t) = -\frac{F_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega \sin \omega t \cdot \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega t \cdot \cos \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{6}$$

$$c_2(t) = \frac{F_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega \sin \omega t \cdot \cos \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega t \cdot \sin \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{7}$$

Если теперь полученные выражения (6) и (7) для $c_1(t)$ и $c_2(t)$ подставить в (4) и провести несложные преобразования, то для $Y_{\text{ч.н.}}(t)$ получим следующее выражение:

$$Y_{\text{ч.н.}}(t) = \frac{F_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{8}$$

Тогда из (2) с учетом (3) и (8) имеем:

$$Y(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{9}$$

Постоянные c_1 и c_2 в (9) определяются из начальных условий Коши:

$$Y(t)\big|_{t=0} = 0, \left.\frac{dY(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad (10)$$

и имеют вид:

$$c_1 = -\frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, c_2 = 0. \qquad (11)$$

Если теперь (11) подставить в (9), то после несложных преобразований для $Y(t)$ получим выражение:

$$Y(t) = \frac{2F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \sin\frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \cdot \sin\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что национальный доход как функция от времени в случае периодического изменения внешних инвестиций носит колебательный характер. Как известно [8], при выполнении условия совпадения частоты колебаний внешних инвестиций с частотой собственных колебаний системы происходит резонанс между двумя колебаниями. Для нахождения выражения национального дохода в случае резонанса перейдем к пределу в (12) при $\omega \to \omega_0$. Имеем:

$$Y_{\text{рез.}}(t) = \lim_{\omega\to\omega_0} Y(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \lim_{\omega\to\omega_0} \left[\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \cdot \left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right)^{-1} \cdot t \sin \omega t \right] = \frac{F_0}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t. \qquad (13)$$

Выражение (13) показывает, что явление резонанса приводит к усилению колебаний. Колебательный характер национального дохода сохраняется, но с увеличением t амплитуда колебаний возрастает (рис. 1).

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда не пренебрегаем затуханием собственных колебаний осциллятора ($\eta \neq 0$), т.е. когда национальный доход удовлетворяет следующему неоднородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2\eta\frac{dY(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot Y(t) = F(t). \qquad (14)$$

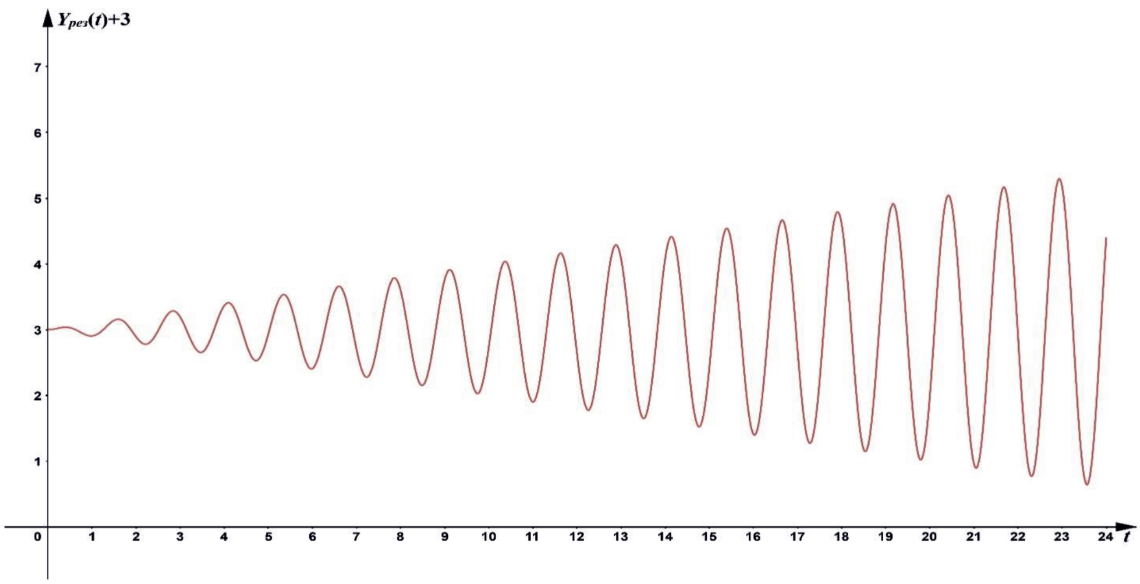

Рис. 1. Зависимость национального дохода от времени в случае резонанса при отсутствии затухания: $\eta = 0$; $\omega_0 = 5$; $F_0 = 1$; $0 \le t \le 24$

Отметим, что член $2\eta\frac{dY(t)}{dt}$ в (14) показывает транзакционные издержки [8] (в физике – сила трения).

Как известно [6], при учете затухания ($\eta \neq 0$) во всех случаях соотношения между η^2 и ω_0^2 $\left(\eta^2 < \omega_0^2, \eta^2 = \omega_0^2, \eta^2 > \omega_0^2\right)$ со временем собственные колебания национального дохода затухают. Поэтому в рассматриваемом случае интерес представляет частное (вынужденное) решение уравнения (14). Для его нахождения будем пользоваться методом комплексных амплитуд, т.е. будем считать, что:

$$Y(t) = Re\bar{Y}(t) = Re\left(\bar{Y}\cdot e^{i\omega t}\right),\ \ F(t) = Re\bar{F}(t) = Re\left(F_0\cdot e^{i\omega t}\right). \tag{15}$$

Нетрудно показать, что через введенные комплексные величины уравнение (14) примет вид:

$$\frac{d^2\bar{Y}(t)}{dt^2} + 2\eta\frac{d\bar{Y}(t)}{dt} + \omega_0^2\cdot\bar{Y}(t) = \bar{F}(t). \tag{16}$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (16) ищем в виде:

$$\bar{Y}_{\text{ч.н.}}(t) = R\cdot e^{i(\omega t - \varphi)}, \tag{17}$$

где R и φ – пока не известные величины. Для их определения потребуем, чтобы (17) удовлетворяло уравнению (16). Подставляя (17) в (16) с учетом того, что:

$$\frac{d\bar{Y}_{\text{ч.н.}}(t)}{dt} = i\omega R\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{-i\varphi},\ \frac{d^2\bar{Y}_{\text{ч.н.}}(t)}{dt^2} = -R\,\omega^2\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{-i\varphi},$$

для величин R и φ получим следующие выражения:

$$R = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4\eta^2\omega^2}},\ \ tg\varphi = \frac{2\eta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{18}$$

Тогда из (17) с учетом (15) и (18), имеем:

$$Y_{\text{ч.н.}}(t) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4\eta^2\omega^2}}\cdot\cos\left(\omega t - arctg\frac{2\eta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right). \tag{19}$$

Заметим, что амплитуда колебаний в (19) принимает максимальное значение при $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\eta^2}$. Если коэффициент затухания η мал по сравнению с частотой ω_0, то максимум амплитуды фактически достигается при частоте ω_0 $\left(\omega \simeq \omega_0\right)$, т.е. когда имеет место резонанс. При этом из формулы (18) получим:

$$R_{\max} = R\big|_{\omega=\omega_0} = \frac{F_0}{4\eta^2\omega_0^2}. \tag{20}$$

Как следует из (20), в случае резонанса амплитуда колебаний национального дохода обратно пропорциональна коэффициенту затухания транзакционных издержек η. Чем больше η, тем меньше $R_{\max}$. Причем при $\eta = 0$ $R_{\max} \to \infty$ (рис. 2).

Из (19) видно, что при резонансе все равно сохраняется колебательный характер национального дохода в зависимости от времени. На самом деле имеем:

$$\lim_{\omega\to\omega_0} Y_{\text{ч.н.}}(t) = \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4\eta^2\omega^2}}\cdot\cos\omega t = \frac{F_0}{2\eta\omega_0}\cdot\cos\omega_0 t. \tag{21}$$

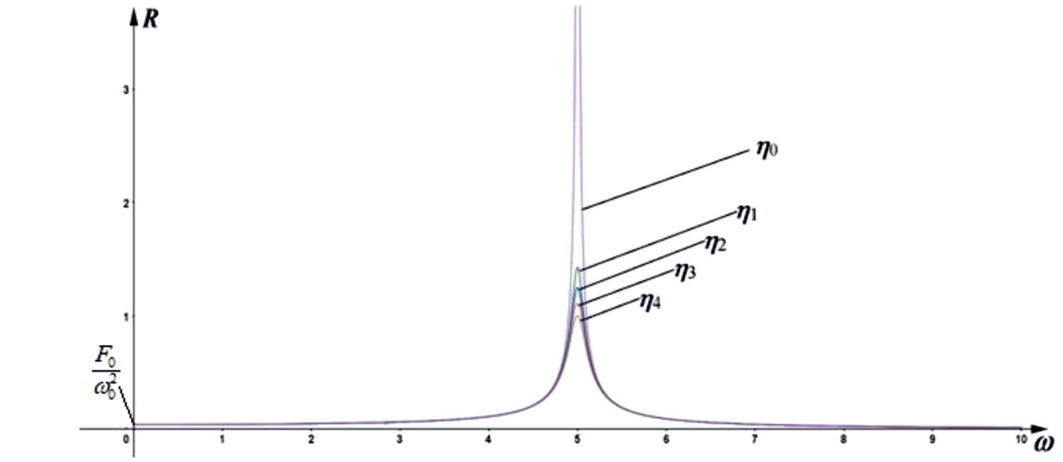

Рис. 2. Зависимость амплитуды колебаний национального дохода от частоты (резонансные кривые): $F_0 = 1$, $0 \le \omega \le 10$, $\omega_0 = 5$, $\eta_1 = 0,07$; $\eta_2 = 0,08$; $\eta_3 = 0,09$; $\eta_4 = 0,1$; $\eta_0 = 0$

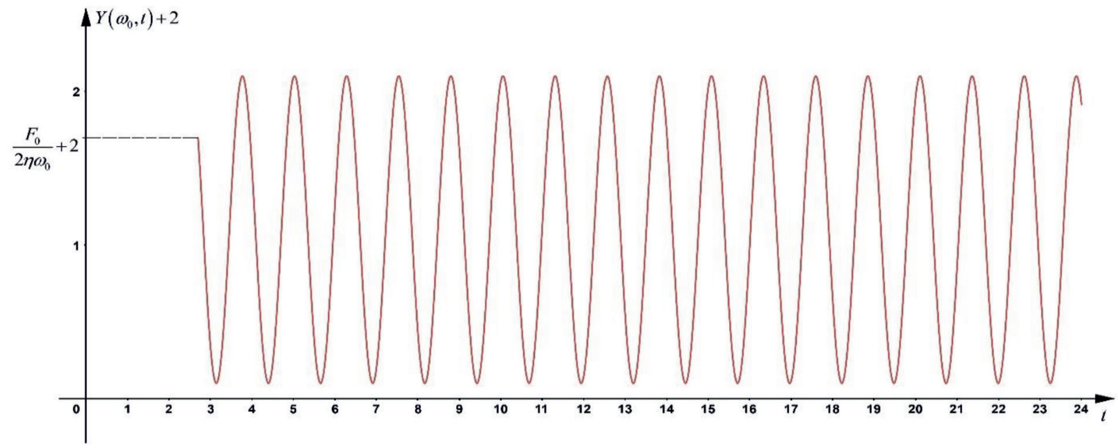

Рис. 3. Установление устойчивых колебаний национального дохода при резонансе: $1 - \omega_0 = 5,6$; $\gamma = 0,1$; $F_0 = 1$; $0 \le t \le 24$

Через определенное время после начала действия внешних периодических сил с частотой ω (внешние периодические инвестиции) по мере приближения к резонансу ($\omega \to \omega_0$) устанавливаются устойчивые колебания национального дохода с постоянной амплитудой (рис. 3).

Полученные в работе результаты показывают, что динамика изменения национального дохода в зависимости от времени имеет особенности при наличии внешних периодических инвестиций. Если при отсутствии внешних инвестиций за счет транзакционных издержек собственные колебания национального дохода со временем затухают, то при наличии периодически меняющихся внешних инвестиций наступает явление резонанса, и это приводит к устойчивым колебаниям национального дохода с постоянной амплитудой.

Заключение

В работе исследована зависимость национального дохода от времени в классической модели гармонического осциллятора с внешним воздействием. При этом рассмотрены случаи, когда затухание не учитывается ($\eta = 0$), и случай с учетом затухания. Проведенный графический анализ полученных в работе аналитических результатов показывает, что наступление резонанса, когда частота периодических колебаний внешних инвестиций становится равной частоте собственных колебаний национального дохода, в случае отсутствия затухания приводит к возрастанию колебаний в зависимости от времени, а при учете затуханий приводит к устойчивому характеру колебаний национального дохода с постоянной амплитудой.

Список литературы

1. Царев И.Г. Физико-математические аналоги в экономике. М.: URSS, ЛЕНАНД, 2005. 216 с.

2. Царев И.Г. Динамические системы в экономике // Аудит и финансовый анализ. 2006. № 3. С. 285–303.

3. Чернавский Д.С. Об эконофизике и ее месте в современной теоретической экономике // УФН. 2011. Т. 181. № 7. С. 767–773.

4. Иванская Е.Ю. Теоретические аспекты исследования неравновесных экономических систем на основе модели гармонического осциллятора // Теория и практика общественного развития. 2015. № 21. С. 57–59.

5. Мудрик Д.Г., Попков С.Ю., Ястребова Е.В. Экономическая физика: закон спроса и предложения, как результат действия универсального закона сохранения материи и энергии в экономике. Понятие сил в экономике // Проблемы экономики и юридической практики. 2017. № 3. С. 10–16.

6. Геворкян Э.А., Синчуков А.В., Татарников О.В. Динамика изменения национального дохода в рамках модели гармонического осциллятора // Фундаментальные исследования. 2018. № 10. С. 26–30.

7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: YOYO Media, 2012. 424 с.

8. Григорьев Ю.М., Кычкин И.С. Колебания и волны. М.: Физматлит, 2018. 400 с.