УДК 330.322

ВЛИЯНИЕ ФАКТОРА ДИСКРЕТНОСТИ НА СТРУКТУРУ ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ НЕИНСТИТУЦИОНАЛЬНОГО ИНВЕСТОРА

Быстрова Д.А., Грачева Д.А.

ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова», Москва, e-mail: Bystrova.DA@rea.ru, grachdasha@yandex.ru

Для неинституционального инвестора главной является задача управления и формирования финансового портфеля. Поддержкой принятия инвестиционных решений служат экономико-математические модели. Модель оптимального портфеля Г. Марковица позволяет инвестору сформировать портфель ценных бумаг с приемлемым для него уровнем риска и планируемой доходностью. Модель в качестве искомых переменных предполагает доли активов в портфеле. Подобная постановка не учитывает дискретность приобретаемых лотов, так как предполагает, что активы, включаемые в портфель, бесконечно делимы. Но фактор дискретности лотов ценных бумаг является важным аспектом портфельного инвестирования. В статье рассматриваются классическая и целочисленная постановка задачи определения структуры портфеля Г. Марковица для неинституционального инвестора. Исследуется влияние факторов ликвидности (на примере низко-, высоколиквидного и диверсифицированного портфелей), размера начального бюджета инвестора и уровня риска на структуру портфеля при условии целочисленности приобретаемых лотов в сравнении со структурой портфеля, полученной по традиционной модели Г. Марковица. Сделаны выводы о степени влияния каждого из факторов на структуру финансового портфеля, полученной по модели с учетом фактора дискретности лотов ценных бумаг.

Ключевые слова: модель Марковица, оптимальное инвестирование, целочисленность, неинституциональный инвестор

THE INFLUENCE OF A DISCRETE FACTOR ON THE STRUCTURE OF ASSETS PORTFOLIO FORMED BY A NON-INSTITUTIONAL INVESTOR

Bystrova D.A., Gracheva D.A.

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, e-mail: Bystrova.DA@rea.ru, grachdasha@yandex.ru

Optimal portfolio management is a very important task in an assets investment. Economic and mathematic models help investors in financial portfolio decision-making. The Markowitz model of portfolio selection uses weights or proportions as decision variables. Such tasking ignores the fact that assets lot is full-sized and cannot be infinitely divisible. That is why the discrete factor of asset lots included in the portfolio is a key factor in optimal portfolio investment. The article introduces integral modification of classical Markowitz portfolio model that can be used by non-institutional investors for finding optimal portfolio structures with a limitation of their own acceptable risk level. The integer assets structure found by the model compares with weights assets structure found by the traditional Markowitz model across the changes in the following factors: the liquidity of the portfolio, the started budged of the investor and acceptable level of risk. The conclusions about the impact each factor has on the portfolio structures are made.

Keywords: Markowitz model, optimal investment, integer, non-institutional investor

Для неинституционального инвестора важной является задача формирования оптимального портфеля ценных бумаг, отражающего его предпочтения относительно доходности и риска. Неинституциональный инвестор – непрофессиональный участник российского фондового рынка, осуществляющий операцию покупки/продажи финансовых активов с участием профессионального участника – брокера или управляющей компании. Поддержкой принятия инвестиционных решений непрофессиональных инвесторов являются экономико-математические модели. Однако большинство моделей в качестве исходной предпосылки используют утверждение, что продаваемые финансовые активы бесконечно делимы, что не соответствует реалиям фондового рынка, где ценные бумаги продаются целочисленными лотами. Поэтому учет фактора дискретности в моделях управления финансовым портфелем является актуальной проблемой портфельного инвестирования.

Классическая задача управления портфелем представлена в работе Г. Марковица [1], который предложил метод выбора оптимальной структуры портфеля ценных бумаг в условиях риска. Идея заключается в том, что инвестор принимает решение на основе математического ожидания доходности – оценка доходности финансового портфеля, и дисперсии (или среднего квадратического отклонения доходности) – оценка риска. Обладая информацией о прошлых значениях доходностей ценных бумаг, непрофессиональный инвестор с использованием математической модели формирует индивидуальный портфель с учетом риска и планируемой доходности.

В качестве искомых величин в модели Г. Марковиц использовал «веса» ценных бумаг (доли активов в совокупном портфеле), которые определяются выражением

$$w_i = \frac{S_i}{S_0}, \quad (1)$$

где S_i – средства, на которые приобретаются акции i-го эмитента, S_0 – начальный бюджет инвестора.

Модель Г. Марковица имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i * r_i \to \max; \quad (2)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 * \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i+1}^{n} w_i w_j k_{ij} \sigma_i \sigma_j} < \sigma; \quad (3)$$

$$w_i \in [0;1], i = \overline{1;n}; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad (5)$$

где r_i – средняя доходность i-го актива; w_i – доля i-го актива в портфеле; σ_i – среднее квадратическое отклонение доходности i-го актива; а k_{ij} – коэффициент корреляции доходности i-го и j-го активов; σ – приемлемое для инвестора значение риска.

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r_{ij} = \frac{cov(i,j)}{\sigma_i * \sigma_j}, \quad (6)$$

где $cov(i, j)$ – ковариация доходностей i-го и j-го активов, σ_i, σ_j – волатильность i-й и j-й бумаги.

Г. Марковец предложил метод снижения риска, при котором инвесторы одновременно оперируют активами с разными трендами доходности и риска [2]. Наличие в портфеле активов с отрицательным коэффициентом корреляции снижает общий риск портфеля и указывает на необходимость его диверсификации в сравнении с выбором наиболее доходной акции.

Модель (2)–(5) – задача максимизации доходности портфеля с ограничением на риск.

Однако задачу определения структуры оптимального портфеля можно представить и как задачу на минимум риска при ограничении на доходность портфеля. Именно в такой постановке Г. Марковиц впервые представил эту задачу в работе 1952 г.

Модель Г. Марковица использует следующие допущения [3]:

– инвестирование осуществляется за один холдинговый период. В начальный момент ($t = 0$) инвестор вкладывает сумму денег S_0 в портфель акций. В конце холдингового периода ($t = 1$) инвестор продает акции и полученный доход капитализирует по своему усмотрению;

– рынки ценных бумаг являются эффективными: инвесторы имеют доступ к информации о ценах и торгах и не могут оказывать единоличного влияния на рынок, сделки с ценными бумагами осуществляются без трансакционных (в данном случае дополнительных) затрат;

– доходность i-й акции за будущий холдинговый период равна средней арифметической величине ее доходностей на предыдущих шагах;

– запрет на продажу без покрытия. Согласно [4], продажа без покрытия – случай, при котором инвестор приобретает акцию в кредит и одновременно принимает обязательство вернуть ее в момент времени $t = 1$. Он продает приобретенную акцию в момент $t = 0$. Для того, чтобы вернуть бумаги по истечению указанного в обязательствах периода, он должен купить их по курсу, который будет преобладать по окончанию этого периода. Данное допущение выражается в виде ограничения на неотрицательность долей w_i ценных бумаг.

Решение задачи оптимизации структуры портфеля неинституционального инвестора предполагает нахождение долей $w_1 \ldots w_n$ из имеющихся у инвестора в момент $t = 0$ инвестированных средств $S_0 = S_1 + S_2 + \ldots S_n$, которые он направит на приобретение акций портфеля.

После покупки акций в момент $t = 0$ инвестор ожидаемо имеет остатки начального бюджета, и так как предполагается, что активы, включаемые в портфель, бесконечно делимы (что противоречит фактору дискретности торгуемых лотов), то остаток инвестиционных средств переходит на следующий инвестиционный шаг. Таким образом, фактор дискретности является важным аспектом выбора оптимального портфеля неинституционального инвестора.

Ранее возможные подходы к его учету в модели Г. Марковица были предложены А.В. Мищенко, А.С. Сазоновой [5], Л.С. Мангущевой [6], М.А. Халиковым, А.М. Антиколь [7, 8].

В целочисленной модели Г. Марковица в качестве искомой величины выступают x_i – количество лотов акций i-го эмитента в портфеле. Инвестиционные вложения в i-ю акцию S_i в формуле (1) определяются выражением

$$S_i = x_i * c_i, \quad (7)$$

где x_i – количество приобретаемых акций i-го эмитента, c_i – текущая цена i-й акции.

Так как активы можно приобретать только лотами, то доли активов ценных бумаг, вложенных в портфель, в традиционной постановке модели Г. Марковица с учетом (1) и (7) определяются следующим образом:

$$w_i = \frac{x_i * c_i}{S_0}, \quad (8)$$

где x_i – количество лотов акций i-го эмитента в портфеле, c_i – цена i-го актива, S_0 – начальный бюджет инвестора.

Подставим выражение (8) в ограничение на риск (3) и критерий (2) модели (2)–(5). Получим новую модель, в которой x_i – количество приобретаемых лотов акций i-го эмитента в портфеле ценных бумаг – искомая переменная; c_i – текущие цены активов, S_0 – начальный бюджет инвестора. Эти параметры считаются известными на начальный момент времени, так же как и приемлемый для инвестора уровень риска σ.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * c_i * r_i \to \max; \quad (9)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * c_i^2 * \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i+1}^{n} x_i * c_i * x_j * c_j * k_{ij}\sigma_i\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * c_i^2}} < \sigma; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * c_i \le S_0; \quad (11)$$

$$x_i * c_i \ge 0, \quad (12)$$

где r_i – средняя доходность актива i; x_i – количество лотов акций i-го эмитента в портфеле; c_i – текущая цена i-й акции; S_0 – начальный бюджет; σ_i – среднее квадратическое отклонение доходностей активов; а k_{ij} – коэффициент корреляции доходности i-го и j-го активов.

Произведем замену переменной $x_i * c_i = \gamma_i$ (величина начального бюджета S_0, которую инвестор планирует разместить на приобретение лотов акций i-го эмитента).

Запишем полученную оптимизационную модель:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i * r_i \to \max; \quad (13)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 * \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i+1}^{n} \gamma_i * \gamma_j * k_{ij}\sigma_i\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2}} < \sigma; \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \le S_0; \quad (15)$$

$$\gamma_i \ge 0. \quad (16)$$

Постановка задачи с учетом новой переменной γ_i позволяет непрофессиональному инвестору сократить объем расчетов и вместо долей w_i акций каждого эмитента находить суммы γ_i, которые следует потратить на покупку ценных бумаг. Однако данная постановка не учитывает фактор дискретности приобретаемых лотов.

Добавим ограничение на целочисленность x_i – количество приобретаемых лотов акций i-го эмитента и получим новую постановку задачи с учетом дискретности приобретаемых лотов:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * c_i * r_i \to \max; \quad (17)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * c_i^2 * \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i+1}^{n} x_i * c_i * x_j * c_j * k_{ij}\sigma_i\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * c_i^2}} < \sigma; \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * c_i \le S_0; \qquad (19)$$

$$x_i * c_i \ge 0; \qquad (20)$$

$$x_i \in Z_+. \qquad (21)$$

Эта задача представляет собой задачу целочисленного нелинейного программирования, которая может быть решена с помощью идеи метода ветвей и границ [9], адаптированного к условиям рассматриваемой модели. Класс нелинейных целочисленных задач относится к классу NP-полных по Тьюрингу проблем и, как следствие, не может быть решен с использованием известных методов оптимизации.

Однако в нашем случае ограничение на риск (19) является выпуклым, а критерий задачи (18) линейным. Поэтому можно использовать основную идею метода ветвей и границ, связанную с представлением области допустимых значений оптимизационной задачи в виде прямой суммы непересекающихся выпуклых областей, для каждой из которых оптимальное решение целочисленной задачи может быть получено с использованием известных методов оптимизации (например, сведением к линейной задаче).

Приведем сравнительный анализ портфелей, полученных на основе традиционной постановки задачи Г. Марковица (2)–(5) и его целочисленной «версии» (17)–(21).

Сделаем предположение, что на структуру портфеля в целочисленной постановке оказывают влияние факторы:

– ликвидности портфеля (низко-, высоколиквидный или диверсифицированный);

– величины начального бюджета инвестора;

– приемлемого для инвестора уровня риска.

Сформируем три портфеля ценных бумаг российских эмитентов – высоко-, низколиквидные и диверсифицированный.

Первый портфель включает обыкновенные акции высокого и среднего уровня ликвидности следующих эмитентов: Норильский никель (GMKN), Магнит (MGNT), Новолипецкий МК (NLMK), Лукойл (LKOH), ММК (MAGN) и Аэрофлот (AFLT), Газпром (GAZP), Мечел (MTLR), Московская биржа (MOEX), Россети (RSTI), Русгидро (HYDR), Роснефть (ROSN) [10, 11] (краткая информация о выбранных эмитентах представлена в табл. 1).

Второй портфель включает обыкновенные акции низкого уровня ликвидности и состоит из двенадцати акций следующих российских эмитентов: Акрон (AKRN), Аптека 36 и 6 (APTK), Белон (BLNG), Дикси (DIXY), Камаз (KMAZ), МГТС (MTSS), Мвидео (MVID), Русолово (ROLO), Квадра (TGKD), Банк Уралсиб (USBN), ЗИЛ (ZILL), Звезда (ZVEZ) [10, 11] – (табл. 2).

Третий портфель (диверсифицированный) включает двадцать две акции российских эмитентов разного уровня ликвидности: Норильский Никель (GMKN), Новолипецкий МК (NLMK), Лукойл (LKOH), ММК (MAGN), Газпром (GAZP), Мечел (MTLR), Московская биржа (MOEX), Россети (RSTI), Русгидро (HYDR), Роснефть (ROSN), Акрон (AKRN), Аптека 36 и 6, Белон (BLNG), Дикси (DIXY), Камаз (KMAZ), МГТС (MTSS), Мвидео (MVID), Русолово (ROLO), Квадра (TGKD), Банк Уралсиб (USBN), ЗИЛ (ZILL), Звезда (ZVEZ) [10, 11] – (табл. 3).

Таблица 1

Доходности и волатильность акций, входящих в высоколиквидный портфель

Акции	Ср. доходность, %	СКО доходностей	Текущая цена
Газпром	0,081	0,00857	122,34
Лукойл	0,165	0,01285	2991,5
Магнит	0,145	0,01323	10340
Мечел	0,348	0,02164	152,5
ММК	0,562	0,01929	42,7
Моск. биржа	0,185	0,01470	116,3
НЛМК	0,323	0,01584	127,5
Нор. никель	0,263	0,01394	9710
Роснефть	0,053	0,01090	316,7
Россети	0,524	0,02033	1,0579
Русгидро	0,052	0,01451	0,813
Аэрофлот	0,118	0,01942	187

Примечание. Средние показатели доходности и волатильности рассчитаны авторами на основе исходных данных о ценах закрытия акций за период июнь – октябрь 2017 г. Уровень ликвидности ценных бумаг определен по классификации Московской биржи.

Таблица 2

Доходности и волатильность акций, входящих в низколиквидный портфель

Акции	Ср. доходность, %	СКО доходностей	Текущая цена
Акрон	0,229	0,01227	4109
Аптека 36 и 6	0,048	0,01694	8,51
Белон	0,059	0,02373	2,79
Дикси	0,316	0,01769	321,8
Камаз	0,035	0,01353	52,55
МГТС	0,088	0,02685	1525
МВидео	0,033	0,01605	408,7
Русолово	0,329	0,02036	3,08
Квадра	0,217	0,01804	0,003695
Банк Уралсиб	0,008	0,01712	0,0867
ЗИЛ	0,019	0,02680	1090
Звезда	0,084	0,05382	4,22

Примечание. Средние показатели доходности и волатильности рассчитаны авторами на основе исходных данных о ценах закрытия акций за период июнь – октябрь 2017 г. Уровень ликвидности ценных бумаг определен по классификации Московской биржи.

Таблица 3

Доходности и волатильность акций, входящих в диверсифицированный портфель

Акции	Уровень ликвидности	Ср. доходность, %	СКО доходностей	Текущая цена
Газпром	высокий	0,1336	0,00971	142,99
Нор. Никель	высокий	0,2422	0,01568	11750
Русгидро	средний	0,0173	0,01523	0,7699
Лукойл	высокий	0,2439	0,01227	3876,5
ММК	средний	0,2967	0,01682	45,74
Моск. биржа	высокий	0,0630	0,01532	113,84
Мечел	высокий	0,1241	0,02166	154,95
НЛМК	высокий	0,2555	0,01613	152,5
Роснефть	высокий	0,0034	0,01212	319,95
Россети	средний	0,0398	0,01960	0,825
Акрон	низкий	0,2196	0,01219	4109
Аптека 36 и 6	низкий	0,0326	0,01698	8,51
Белон	низкий	0,0762	0,02392	2,79
Дикси	низкий	0,3289	0,01773	321,8
Камаз	низкий	0,0297	0,01367	52,55
МГТС	низкий	0,0811	0,02699	1525
МВидео	низкий	0,0327	0,01621	408,7
Русолово	низкий	0,3210	0,02055	3,08
Квадра	низкий	0,2308	0,01819	0,003695
Банк Уралсиб	низкий	0,0187	0,01724	0,0867
ЗИЛ	низкий	0,0000	0,02693	1090
Звезда	низкий	0,0424	0,05427	4,22

Примечание. Средние показатели доходности и волатильности рассчитаны авторами на основе исходных данных о ценах закрытия акций за период август – январь 2017/2018 гг.

Пусть начальный бюджет неинституционального инвестора составляет либо S_0 = 100 тыс. руб., либо S_0 = 1 млн руб. Приемлемый уровень риска от 0,006 до 0,02.

Приведем расчеты оптимальных портфелей для разных бюджетов и разных уровней риска. Для решения задач (2)–(5) и (17)–(21) используем табличный процессор Excel «Поиск решения» [12].

Таблица 4

Сравнение структур портфелей по «классической» и «целочисленной» постановкам модели Г. Марковица

	Высоколиквидный портфель		Низколиквидный портфель		Диверсифицированный портфель	
Риск/ Бюджет	100 тыс. руб.	1 млн руб.	100 тыс. руб.	1 млн руб.	100 тыс. руб.	1 млн руб.
0,006	+	+	–	+	–	+
0,007	+	+	–	+	–	+
0,008	+	+	–	+	–	+
0,009	+	+	–	+	–	–
0,01	–	+	–	+	–	–
0,011	–	+	–	+	–	+
0,012	–	+	–	–	–	+
0,013	+	+	–	–	–	+
0,02	–	+	–	–	–	–

Представим результаты в табл. 4. Знак «+» означает, что структуры портфелей, полученные по двум моделям, совпадают. Знак «–» означает, что эти структуры различны (считаем, что структуры портфелей, построенные по двум моделям, различны, если присутствует хотя бы одна акция, которая входит в оптимальный портфель, полученный по одной модели, но не входит в другой).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что все выделенные выше факторы (уровень ликвидности, начальный бюджет, приемлемый уровень риска) оказали влияние на структуру портфеля в условиях целочисленности приобретаемых лотов.

Начальный бюджет инвестора повлиял на структуру портфелей всех уровней ликвидности, особенно на низколиквидный и диверсифицированный портфели. Состав высоколиквидного портфеля менее подвержен фактору изменения начального бюджета при низком уровне риска («осторожный» инвестор). Результаты табл. 4 показывают, что при увеличении бюджета структура портфеля с учетом фактора дискретности приближается к структуре портфеля, полученной по классической постановке модели Г. Марковица. В случае высоколиквидных ценных бумаг увеличение бюджета способствовало преодолению различий между структурами, полученными по двум моделям для всех рассматриваемых уровней риска.

Отметим, что при низком риске (0,006–0,009) структуры высоколиквидного портфеля совпадают. При низком и среднем риске (0,006–0,013) в случае большого объема инвестиционных средств структуры низколиквидного и диверсифицированного портфелей частично совпадают. При высоком риске (0,02) структуры портфелей различны для всех уровней ликвидности портфелей за исключением высоколиквидного портфеля с большим объемом начальных инвестиций.

Заключение

Таким образом, согласно проведенному анализу, можно сделать вывод, что учет дискретности в модели Г. Марковица оказывает влияние на оптимальную структуру портфеля ценных бумаг по сравнению со структурой, полученной по классической постановке этой задачи. При условии целочисленности различие в структуре финансового портфеля наблюдается в разрезе факторов начального бюджета, приемлемого риска и уровня ликвидности. Полученные выводы подтверждают, что фактор дискретности лотов ценных бумаг является важным аспектом портфельного инвестирования.

Список литературы

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance, 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91.

2. Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов / Р. Брейли, С. Майерс. – М.: Олимп-Бизнес, 2008. – 1008 с.

3. Аскинадзи В.М. Инвестиционный анализ: учебник для академического бакалавриата / В.М. Аскинадзи. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 422 с.

4. Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты / Л. Крушвиц. Пер. с нем. под общей редакцией В.В. Ковалева и З.А. Сабова. – СПб.: Питер, 2001 – 432 с.

5. Мищенко А.В. Целочисленные модификации классических моделей портфельных инвестиций / А.В. Мищенко, А.С. Сазонова // Проблема анализа риска. – 2010. – № 2. – С. 78–87.

6. Мангушева Л.С. Управление инвестиционными портфелями в условиях неопределенности и ограничений на величину лотов / Л.С. Мангушева, А.В. Мищенко // Вестник Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова. – 2007. – № 2. – С. 74–81.

7. Халиков М.А. Методы и модели поддержки решений по управлению инвестиционным портфелем / М.А. Халиков, А.М. Антиколь // Финансовый менеджмент. – 2011. – № 4. – С. 116–125.

8. Антиколь А.М. Актуальные аспекты моделирования портфельных инвестиций / А.М. Антиколь, М.А. Халиков // Современные аспекты экономики. – 2009. – № 6(143). – С. 193–216.

9. Электронный учебник «Экономико-математические методы» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/metod_vetvei_i_granic.htm (дата обращения: 15.02.2018).

10. ИК ЗАО «Финам». – Режим доступа: http://www.finam.ru (дата обращения: 01.02.2018).

11. Московская биржа. – Режим доступа: http://www.moex.com/ (дата обращения: 05.02.2018).

12. Семененко М.Г. Модель Марковица: Математические аспекты и компьютерная реализация / М.Г. Семененко // Современные информационные технологии и ИТ-образование – 2015. – № 11. – С. 306–309.