УДК 330.56:338.2

ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В РАМКАХ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Геворкян Э.А., Синчуков А.В., Татарников О.В.

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова (РЭУ), Москва,
e-mail: gevor_mesi@mail.ru, avsinchukov@gmail.com, ovtatarnikov@mail.ru

В настоящей работе исследуется зависимость национального дохода от времени Y(t) в модели гармонического осциллятора. Предполагается, что национальный доход как функция от времени удовлетворяет однородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными действительными коэффициентами. Показано также, что подобное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение национального дохода от времени, можно получить и на основе динамической модели Кейнса с учетом того, что скорость изменения расходов и конечного потребления пропорциональна национальному доходу. Определен экономический смысл каждого члена в дифференциальном уравнении гармонического осциллятора. Решение этого уравнения методом Эйлера приводит к аналитическому выражению национального дохода Y(t). Это позволяет провести качественный и графический анализ динамики изменения национального дохода при различных значениях параметров, характеризующих волновой и неволновой процесс изменения национального дохода. Показано, что при определенном соотношении параметров, характеризующих процесс, изменение национального дохода имеет колебательный характер. При этом с увеличением времени амплитуда колебаний уменьшается и огибающая максимумов меняется по экспоненциальному закону. В случаях неколебательного характера изменения национального дохода при стремлении времени к бесконечности национальный доход стремится к нулю.

Ключевые слова: национальный доход, гармонический осциллятор, дифференциальное уравнение, колебательный процесс

DYNAMICS OF CHANGE OF NATIONAL INCOME IN THE MODEL OF HARMONIC OSCILLATOR

Gevorkyan E.A., Sinchukov A.V., Tatarnikov O.V.

Plekhanov Russian University of economics (REU), Moscow,
e-mail: gevor_mesi@mail.ru, avsinchukov@gmail.com, ovtatarnikov@mail.ru

In this article the dependence of national income on time Y(t) in the harmonic oscillator model is investigated. It is assumed that national income, as a function of time, satisfies a second-order homogeneous ordinary differential equation with constant real coefficients. It is also shown that such ordinary differential equation describing change of national income with time can be received on the basis of dynamic model of Keynes taking into account that the velocity of change of spendings and final consumption is proportional to national income. The economic meaning of each term in the differential equation of the harmonic oscillator is determined. The solution of this equation by the Euler method leads to an analytical expression of the national income Y(t). It allows to carry out the qualitative and graphic analysis of dynamics of change of national income at various values of the parameters characterizing wave or non-wave process of change of national income. It is shown, that in a certain relation of the parameters, characterizing the process, the change of national income has oscillatory character. At the same time the amplitude of the oscillations decreases with increasing time and the envelope of the maxima changes exponentially. In cases of non-oscillatory nature of changes in national income when time tends to infinity national income tends to zero.

Keywords: national income, harmonic oscillator, differential equation, oscillatory process

В макроэкономической теории рассматриваются волновые явления в экономике, когда под действием каких-то факторов происходит отклонение макроэкономических показателей от их устойчивого состояния или от их траектории движения [1–2]. Среди таких показателей особое место занимает национальный доход, являющийся одним из обобщающих показателей экономического развития страны. Волновой характер изменения экономики в зависимости от времени является формой прогрессивного развития рыночной экономики. При этом каждая волна характеризует целый цикл экономического развития [3–5]. Отметим, что в основе теории экономического цикла лежит выяснение причин колебаний экономической активности общества во времени. Отметим также, что так как цикличность прямым или косвенным образом действует на рыночную экономику, то она является важной макроэкономической проблемой.

При построении динамической модели волнового изменения национального дохода можно пользоваться различными математическими моделями, описывающимися при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений [6].

Цель исследования: найти зависимость национального дохода от времени в рамках модели гармонического осциллятора и провести многосторонний анализ полученного результата.

Постановка задачи, метод решения и результаты исследования

Пусть национальный доход *Y*(*t*) как функция от времени *t* удовлетворяет обыкновенному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными действительными коэффициентами (модель гармонического осциллятора)

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+2\gamma\cdot\frac{dY(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot Y(t)=0, \qquad (1)$$

где первый член $\frac{d^2Y(t)}{dt^2}$ показывает темп изменения национального дохода (в физике это соответствует ускорению движения), второй член $\frac{dY(t)}{dt}$ связан с транзакционными издержками (издержки на переговоры, на юридическую защиту и т.д.) (в физике это соответствует силе трения), а третий член $\omega_0^2\cdot Y(t)$ есть рыночная сила (в физике это сила, которая возвращает систему к точке равновесия), γ – коэффициент затухания, ω_0 – частота свободных колебаний ($\gamma = 0$).

Любопытно отметить, что аналогичное дифференциальное уравнение для функции *Y*(*t*) можно получить исходя из динамической модели Кейнса [7]. В основе этой модели лежит основной закон экономического баланса, который имеет вид

$$Y(t)=E(t)+S(t)+I(t), \qquad (2)$$

где *Y*(*t*) – национальный доход, *E*(*t*) – расходы, *S*(*t*) – национальное потребление, *I*(*t*) – инвестиции. Представляя функцию потребления в виде суммы

$$S(t)=c\cdot Y(t)+B(t), \qquad (3)$$

где *B*(*t*) – конечное потребление, $0 < c < 1$ – постоянный коэффициент, и учитывая, что $I(t)=m\cdot\frac{dY(t)}{dt}$ (*m* = const), а функции *E*(*t*) и *B*(*t*) известны, из (2) относительно функции *Y*(*t*) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dY(t)}{dt}-\frac{1-c}{m}\cdot Y(t)+\frac{E(t)+B(t)}{m}=0. \qquad (4)$$

Дифференцируя обе части уравнения (4) по *t* и предполагая, что

$$\frac{d\left[E(t)+B(t)\right]}{dt}=b\cdot Y(t),$$

где *b* – постоянный коэффициент, получим

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}-\frac{1-c}{m}\cdot\frac{dY(t)}{dt}+\frac{b}{m}\cdot Y(t)=0. \qquad (5)$$

Сравнивая (5) с (1), можно сказать, что национальный доход *Y*(*t*) описывается дифференциальным уравнением гармонического осциллятора с частотой свободных колебаний $\omega_0^2=b/m$ и коэффициентом затухания $\gamma=-(1-c)/2m$.

Решение линейного однородного дифференциального уравнения (1) будем искать методом Эйлера, а именно в виде [8]

$$Y(t)=e^{\lambda t}, \qquad (6)$$

где λ – пока неизвестные числа (действительные, комплексные или чисто мнимые). Подставляя (6) в (1) для определения характеристических чисел, получим следующее квадратное уравнение

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0, \qquad (7)$$

решения которого имеют вид

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}. \qquad (8)$$

Из (8) видно, что характер решений уравнения (7) зависит от знака выражения под квадратным корнем. Рассмотрим случаи:

1. $\gamma^2<\omega_0^2$ (коэффициент затухания меньше частоты свободных колебаний).

Очевидно, что в этом случае имеем комплексные корни характеристического уравнения (3) в виде

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}. \qquad (9)$$

Тогда линейно независимые решения дифференциального уравнения (1) имеют вид

$$Y_1(t)=e^{-\gamma t}\cdot\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cdot t\right),$$

$$Y_2(t)=e^{-\gamma t}\cdot\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cdot t\right), \qquad (10)$$

а общее решение, как суперпозиция независимых решений, запишется в виде

$$Y(t)=e^{-\gamma t}\cdot\left[c_1\cdot\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cdot t\right)+\right.$$
$$\left.+c_2\cdot\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cdot t\right)\right], \qquad (11)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Нетрудно заметить, что (11) можно представить в виде

$$Y(t)=A\cdot e^{-\gamma t}\cdot\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cdot t+\varphi\right), \qquad (12)$$

где $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ – амплитуда колебаний, $\varphi=arctg\frac{c_2}{c_1}$ – начальная фаза. Выражение (8) показывает, что при $\gamma<\omega_0$ и $\gamma>0$ национальный доход в зависимости от времени имеет колебательный характер с резко выраженными максимумами и минимумами. График зависимости национального дохода от времени приведен на рис. 1. Кривые построены согласно формуле 2,5 + $Y(t)$ при изменении t от 0 до 24 (t измеряется в месяцах) и при следующих значениях параметров, характеризующих рассматриваемый процесс: $c_1 = c_2 = 1$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0{,}07$; 0,08; 0,1.

Полученные кривые показывают, что огибающие максимумов с возрастанием времени убывают по экспоненциальному закону и при $t\to\infty$ стремятся к нулю. Из рис. 1 также следует, что с увеличением коэффициента затухания γ при фиксированном значении частоты собственных колебаний ω_0 значения максимумов уменьшаются.

2. $\gamma^2 = \omega_0^2$ или $\gamma_{кр.} > \omega_0$ (затухание критическое, так как при $\gamma > \omega_0$ осциллятор будет совершать колебательное движение).

В этом случае характеристическим числам $\lambda_{1,2} = -\gamma$ соответствуют два независимых решения

$$Y_1(t) = e^{-\gamma t}, \; Y_2(t) = t \cdot e^{-\gamma t}. \quad (13)$$

И общее решение дифференциального уравнения (1) представится в виде

$$Y(t) = e^{-\gamma t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t). \quad (14)$$

Из (14) следует, что процесс имеет неколебательный характер, и так как $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\gamma t} \cdot (c_1 + c_2 \cdot t) = 0$, то осциллятор экспоненциально будет стремиться к положению равновесия. На рис. 2 приведены графики зависимости национального дохода Y как функция от времени t, построенные согласно формуле (14) при следующих значениях параметров: $c_1 = c_2 = 1$, $\omega_0 = \gamma = 0{,}07$; 0,08; 0,1 и $0 \le t \le 24$. Кривые показывают убывающий характер национального дохода как функция от времени, причем при увеличении значений $\omega_0 = \gamma$ скорость стремления к нулю при возрастании t увеличивается.

3. $\gamma > \omega_0$ (соответствует большим транзакционным затратам).

В этом случае характеристическое уравнение (3) имеет два различных действительных решения и общее решение дифференциального уравнения (1) будет иметь вид

$$Y(t) = e^{-\gamma t} \cdot \left(c_1 \cdot e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right). \quad (15)$$

Так как при

$$\gamma > \omega_0 \lim_{t\to\infty} Y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\gamma t} \times$$
$$\times \left(c_1 \cdot e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right) = 0,$$

то имеем неколебательный процесс и осциллятор будет стремиться к положению равновесия. Зависимости национального дохода Y от времени t в этом случае приведены на рис. 3.

Как видно из рисунка, национальный доход как функция от времени при $\gamma > \omega_0$ является убывающей функцией, при этом чем больше ω_0, тем быстрее функция стремится к нулю при $t\to\infty$.

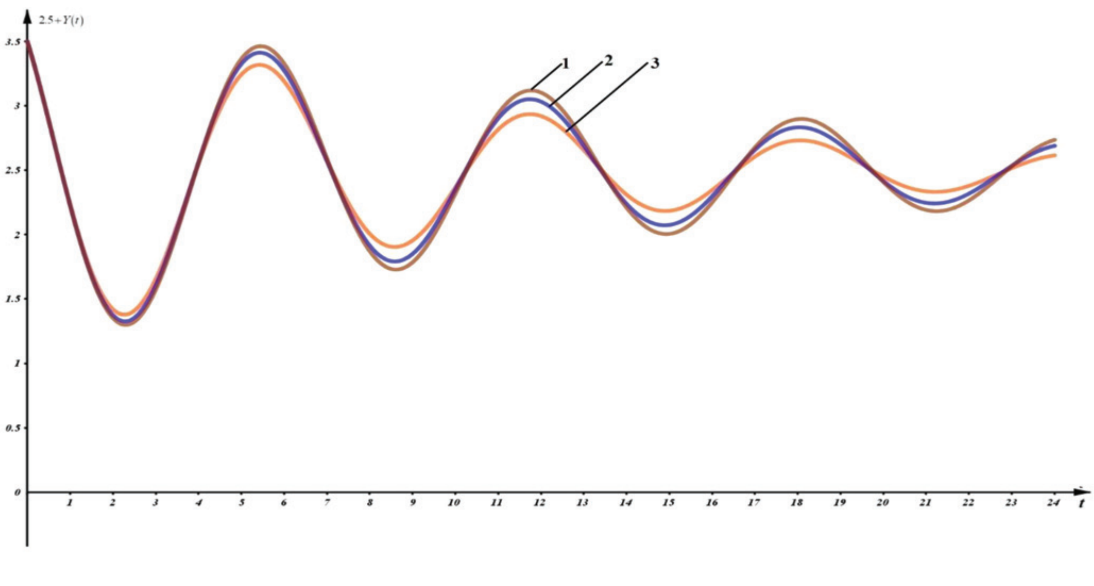

Рис. 1. Зависимость функции 2,5 + Y(t) от времени t при $\omega_0 = \gamma$: 1 – $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0{,}07$; 2 – $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0{,}08$; 3 – $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0{,}1$

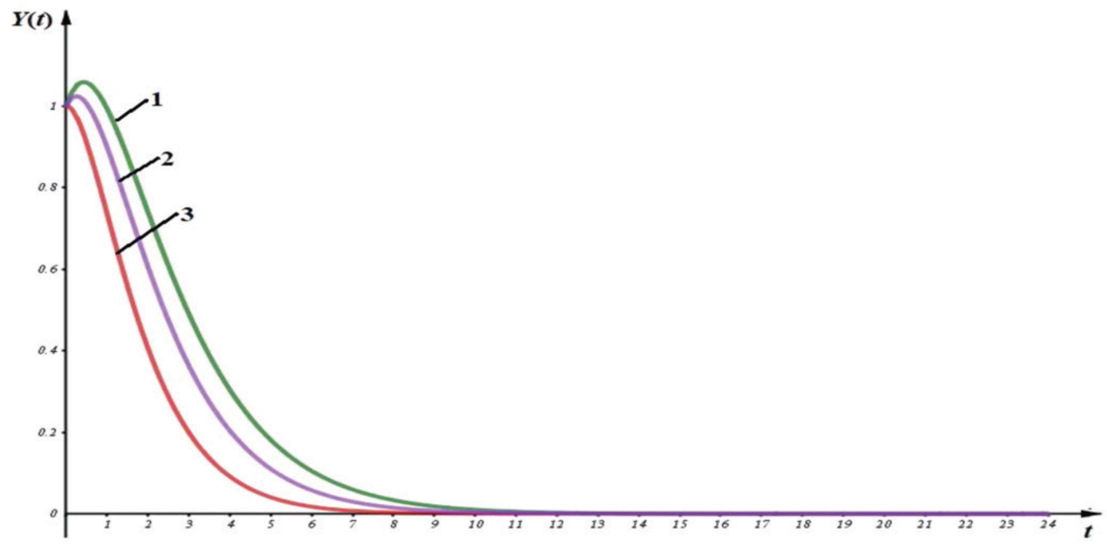

Рис. 2. Зависимость национального дохода Y от времени t при $\omega_0 = \gamma$:
1 – $\omega_0 = \gamma = 0,07$; 2 – $\omega_0 = \gamma = 0,08$; 3 – $\omega_0 = \gamma = 1$

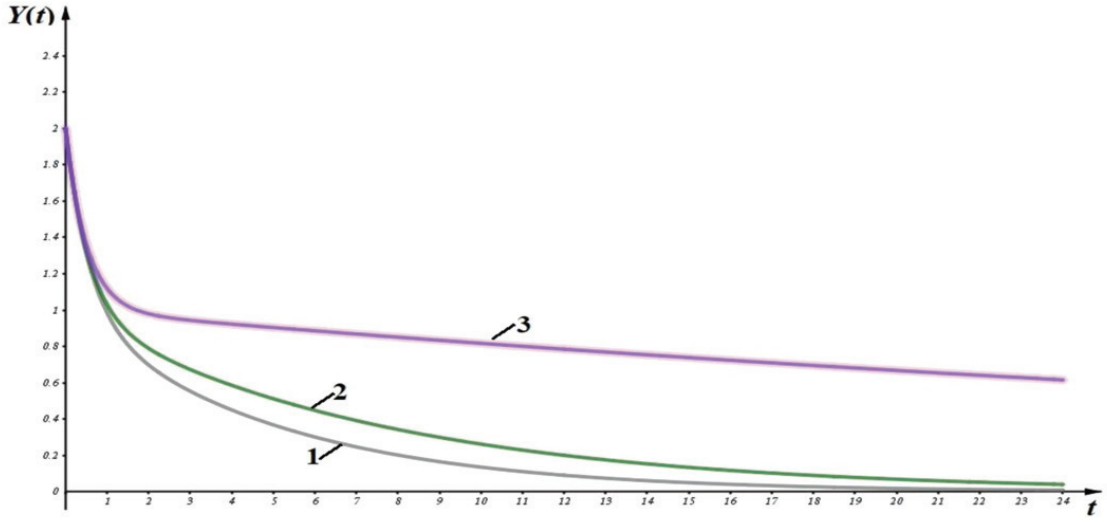

Рис. 3. Зависимость национального дохода Y от времени t при $\gamma > \omega_0$:
1 – $\omega_0 = 0,6$; $\gamma = 1$; 2 – $\omega_0 = 0,5$; $\gamma = 1$; 3 – $\omega_0 = 0,2$; $\gamma = 1$

Заключение

В работе с помощью решения линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными действительными коэффициентами решена задача динамики изменения национального дохода в зависимости от времени в рамках классической модели гармонического осциллятора. Проведенный графический анализ на основе полученных в работе аналитических выражений для национального дохода в зависимости от времени показывает, что при различных значениях параметров, характеризующих рассматриваемый процесс, изменение национального дохода может иметь волновой или неволновой характер. В случае, когда коэффициент затухания меньше частоты свободных колебаний, национальный доход в зависимости от времени имеет колебательный характер, причем с увеличением времени амплитуда колебаний уменьшается. А когда коэффициент затухания больше или равен частоте свободных колебаний, национальный доход не имеет колебательного характера и стремится к нулю при увеличении времени. Другими словами, в этом случае осциллятор будет экспоненциально стремиться к положению равновесия.

Список литературы

1. Борисов Е.Ф. Основы экономики: учебник и практикум для СПО. М.: ЮРАЙТ, 2014. 399 с.

2. Царев И.Г. Динамические системы в экономике // Научно-практический журнал. Аудит и финансовый анализ. 2006. № 3. С. 285–303.

3. Куснер Ю.С., Царев И.Г. Принципы движения экономической системы. URL: https: // www.litres.ru/igor-carev 8217096/principy ekonomicheskoy sistemy 16958588 /? yclid = 4838825263578226694 (дата обращения: 21.08.2018).

4. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. Иркутск: Иркутский университет, 2012. 192 с.

5. Цветков В.А. Циклы и кризисы: теоретико-методологический аспект. М.; СПб.: Нестор История, 2013. 594 с.

6. Царев И.Г. Физико-математические аналоги в экономике. М.: URSS, ЛЕНАНД, 2005. 216 с.

7. Герасимов Б.И., Пучков Н.П., Протасов Д.Н. Дифференциальные динамические модели. Тамбов: ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. 80 с.

8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: YOYO Media, 2012. 424 с.