УДК 004.413.2:[519.866 + 330.142.211]

ДВУМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

Николаева Е.А., Карнадуд О.С., Грибанов Е.Н.

ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева», Кемерово, e-mail: nikolaevaea@yandex.ru

В работе рассматривается двумерная математическая модель формирования портфеля ценных бумаг. Задачей участников рынка является оптимальное размещение капитала, т.е. формирование оптимального портфеля. Смысл оптимизации структуры портфеля определяется конкретной целью инвестора (уровень риска, доходность, ограничения, связанные с объемами покупки конкретных видов ценных бумаг). Двумерные модели обладают тем свойством, что их критериальные множества представляют собой линии на плоскости и полуплоскости. В этом случае множество допустимых решений инвестора очень легко изобразить и проанализировать. С использованием геометрического представления критериального пространства для таких моделей проанализирован вопрос, а именно: каковым является реальное значение инвестиционного фонда инвестора для фиксированного значения ожидаемой доходности по портфелю. Найдены «разумные» пределы выбора ожидаемой доходности и инвестиционного фонда для каждого участника рынка.

Ключевые слова: двумерная модель, оптимальный портфель, оптимизация структуры портфеля, критериальное множество, множество допустимых решений, инвестор

TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF THE SET OF THE ADMISSIBLE PORTFOLIOS

Nikolaeva E.A., Karnadud O.S., Gribanov E.N.

Federal Budget Educational Institution of Higher Education Kuzbass State Technical University named after T.F. Gorbachev, Kemerovo, e-mail: nikolaevaea@yandex.ru

The paper considers a two-dimensional mathematical model for the formation of a securities portfolio. The task of market participants is the optimal allocation of capital, i.e. Formation of an optimal portfolio. The meaning of portfolio structure optimization is determined by the investor's specific goal (the level of risk, profitability, restrictions related to the volumes of purchases of specific types of securities). Two-dimensional models have the property that their criterial sets are lines in the plane and half-plane. In this case, the set of acceptable investor decisions is very easy to depict and analyze. Using the geometric representation of the criterial space for such models, the question is analyzed: what is the real value of the investor's investment fund, for a fixed value of the expected return on the portfolio. We have found «reasonable» limits on the choice of expected return and investment fund for each market participant.

Keywords: two-dimensional model, optimal portfolio, optimization of portfolio structure, criterion set, set of feasible solutions, investor

Рассмотрим двумерную модель, а именно: рынок с двумя видами активов. Задача участника рынка построена на основе известной модели Марковица [1–3], но отличается от нее тем, что в модель введены дополнительно соотношения, отражающие реальные условия фондового рынка. Это позволяет инвестору определить именно ту структуру оптимального портфеля, которую он реально может создать [2–5]. Для того чтобы сформировать портфель с определенным уровнем доходности и минимальным уровнем риска, инвестору необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\sigma^i\left(x^i\right)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}c_{lj}x_j^i x_l^i \to \min, \quad \left(i=1,..,n\right), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1^i+x_2^i=1, & (2)\\ m_1x_1^i+m_2x_2^i\ge \overline{m}^i, & (3)\\ x_j^i\le \alpha_j^i p_j a_j \big/ K^i,\ 0\le\alpha_j^i\le 1,\ j=1,2, & (4)\\ x_1^i,\ x_2^i\ge 0. & (5)\end{cases}$$

В задаче (1)–(5) верхние индексы показывают принадлежность данного параметра к инвестору, а нижние – принадлежность к виду ценной бумаги; x_j^i – доля бумаги вида j в портфеле инвестора i; целевая функция $\sigma^i\left(x^i\right)$ инвестора i имеет смысл риска портфеля; c_{lj} – коэффициент корреляции между изменениями курсов ценных бумаг вида l и j; m_j – ожидаемое значение доходности по бумаге вида j; $\overline{m}^i>0$ – фиксированный уровень доходности, который, как минимум, рассчитывает получить инвестор i; p_j – рыночная цена бумаги вида j; a_j – количество бумаг вида j на рынке; K^i – инвестиционный фонд инвестора.

Равенство (2) называется основным ограничением. Неравенство (3) отражает тот факт, что для инвестора приемлемы портфели с доходностями не ниже $\overline{m}^i$, т.е. число $\overline{m}^i$ задает нижнюю границу ожидаемой доходности. Неравенства (4) отражают тот факт, что инвестор не может приобрести ценной бумаги одного вида больше, чем ее имеется на рынке. Коэффициент α^i_j позволяет учитывать верхнюю границу инвестирования для каждого инвестора i, т.е. в силу законодательных ограничений невозможно совершать операции купли-продажи объемом более некоторого порогового значения [5–7]. Условия (5) называются условиями неотрицательности.

Любой вектор $x^i = \left(x_1^i, .x_2^i\right)$, удовлетворяющий условиям (1)–(5), будем называть допустимым портфелем инвестора i.

Рассмотрим множество допустимых портфелей инвестора i, удовлетворяющих условиям (2)–(5). Это множество образовано пересечением одной прямой (2) и пяти полуплоскостей (3)–(5), оно зависит от десяти параметров α_1^i, α_2^i, m_1, m_2, p_1, p_2, a_1, a_2, K^i, $\overline{m}^i$. Первые восемь параметров являются сугубо рыночными в том смысле, что находятся, вообще говоря, вне сферы влияния инвестора. Параметры $K^i, \overline{m}^i$ устанавливает сам инвестор [7]. Условия (2) и (5) не зависят явным образом от значений $K^i, \overline{m}^i$, поэтому множество

$$X_0 = \left\{x^i \in R^2 \left| x_1^i + x_2^i = 1,\, x_1^i \geq 0,\, x_2^i \geq 0 \right.\right\} \quad (6)$$

является инвариантным, относительно инвестора, множеством.

Для удобства в будущем введем также множества

$$X_m^i = \left\{x^i \in R^2 \left| m_1 x_1^i + m_2 x_2^i \geq \overline{m}^i \right.\right\}, \quad (7)$$

$$X_j^i = \left\{x^i \in R^2 \left| K^i x_j^i \leq \alpha^i_j p_j a_j \right.\right\}\ j = 1,2\,. \quad (8)$$

Теперь можно написать, что допустимое множество (6)–(8) инвестора i есть пересечение множеств $X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i \bigcap X_2^i$.

Цель исследования

Исходя из сказанного выше, практический интерес представляет изучение зависимости множества (6)–(8) от размера выделяемого им инвестиционного фонда K^i и его ожиданий $\overline{m}^i$ по поводу доходности портфеля x^i. В этом смысле возможности инвестора i можно трактовать так, что, выбирая различные значения K^i и $\overline{m}^i$, инвестор регулирует положение множеств X_m^i, X_1^i, X_2^i относительно «неподвижного» множества X_0, сужая или расширяя тем самым множество допустимых портфелей.

Нас, в частности, интересует вопрос: каковым является реальное значение K^i (значение $\overline{m}^i$) для фиксированного $\overline{m}^i$ (K^i), для которого допустимое множество не пусто, и как оно выглядит.

Отношение $\theta_{ij} = {m_j}/{\overline{m}^i}$ характеризует долю доходности ценной бумаги вида j в субъективной оценке общей доходности инвестора i.

Выделим два тривиальных случая, относящихся к ограничению (3).

Лемма 1. Если

$$\min\left\{{m_j}/{\overline{m}^i},\quad j = 1,2\right\} > 1\,, \quad (9)$$

то $X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i \bigcap X_2^i = \varnothing$.

Если

$$\max\left\{{m_j}/{\overline{m}^i},\quad j = 1,2\right\} < 1\,, \quad (10)$$

то $X_0 \bigcap X_m^i = X_0$.

Условие (9) говорит о том, что инвестор ставит перед собой нереальную задачу относительно уровня ожидаемой доходности. Условие (10) означает недооценку уровня доходности.

Условия (9) и (10) являются взаимно исключающими. Так как эти условия заведомо неприемлемы для инвестора, то их можно исключить из дальнейшего рассмотрения, тогда относительно величин ${m_j}/{\overline{m}^i}$ и ограничения (3) остаются два взаимоисключающих друг друга случая:

1) ${m_1}/{\overline{m}^i} \geq 1, \qquad {m_2}/{\overline{m}^i} \leq 1$;

2) ${m_1}/{\overline{m}^i} \leq 1, \qquad {m_2}/{\overline{m}^i} \geq 1$.

Покажем, что эти четыре неравенства по существу являются строгими. Действительно, в случае 1) можно записать $m_2 \leq \overline{m}^i \leq m_1$. Если $m_2 < \overline{m}^i = m_1$, то из (3) имеем $x_1^i + {m_2}/{m_1}\, x_2^i \geq 1$, а это, так как ${m_2}/{m_1} < 1$, противоречит условию (2). По этой же причине невозможен вариант $m_2 = \overline{m}^i < m_1$. Если $m_2 = \overline{m}^i = m_1$, то (3) сводится к (2), поэтому в случае 1) на самом деле $m_2 < \overline{m}^i < m_1$. Подобным образом, анализируя случай 2), приходим к строгим неравенствам $m_1 < \overline{m}^i < m_2$. Поэтому вместо 1) и 2) впредь будем рассматривать случаи:

$$m_1 / \overline{m}^i > 1, \qquad m_2 / \overline{m}^i < 1, \tag{11}$$

$$m_1 / \overline{m}^i < 1, \qquad m_2 / \overline{m}^i > 1. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала случай (11). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. Пусть выполнено условие (11). Если

$$K^i > \frac{m_1 - m_2}{\overline{m}^i - m_2} \cdot \alpha_1^i p_1 a_1, \tag{13}$$

то $X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i \bigcap X_2^i = \varnothing$; если

$$K^i < \alpha_1^i p_1 a_1, \tag{14}$$

то $X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i = X_0 \bigcap X_m^i$.

Условия (13) и (14) отражают неоправданно большой и маленький объемы инвестиционного фонда инвестора *i*. Мы их также исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Условия (13) и (14) относятся к первому из ограничений (4). При условиях (11) и (12) неравенство (4) описывает открытую полуплоскость, расположенную левее прямой $x_1^i = \alpha_1^i p_1 a_1 / K^i$, которая проходит левее точки пересечения

$$v = (v_1, v_2) = \left(\frac{\overline{m}^i - m_2}{m_1 - m_2}, \frac{\overline{m}^i - m_1}{m_2 - m_1} \right),$$

границы множества X_m^i с отрезком X_0. При условиях (11) и (12) неравенство (4) описывает открытую полуплоскость, расположенную левее прямой $x_1^i = \alpha_1^i p_1 a_1 / K^i$, когда она пересекает ось Ox_1^i левее точки (1,0). Здесь имеется в виду изменение положения прямой $x_1^i = \alpha_1^i p_1 a_1 / K^i$ при различных значениях K^i.

Нетрудно заметить, что после исключения неприемлемых условий (13) и (14), в обсуждаемом нами случае (11) относительно первого из ограничений (4) остается единственный приемлемый вариант

$$\alpha_1^i p_1 a_1 \le K^i \le \gamma_{12}^i \alpha_1^i p_1 a_1, \tag{15}$$

где

$$\gamma_{12}^i = \frac{m_1 - m_2}{\overline{m}^i - m_2}.$$

Из (15) получаем $\alpha_1^i p_1 a_1 \left(\gamma_{12}^i - 1 \right) \ge 0$ или $\gamma_{12}^i \ge 1$, а это означает, что $m_1 \ge \overline{m}^i$. С другой стороны, с учетом (11) из вида γ_{12}^i получаем $\gamma_{12}^i > 1$. Для совместимости с условием (11) в (15) принимаем $\gamma_{12}^i > 1$.

Рассмотрим точку

$$z = (z_1, z_2) = \left(\frac{\alpha_1^i p_1 a_1}{K^i}, 1 - \frac{\alpha_1^i p_1 a_1}{K^i} \right),$$

пересечения границы множества X_1^i с отрезком X_0.

Ввиду взаимоисключаемости условий (13), (14) и (15), в случае нарушения неравенства (15) мы оказываемся либо в условиях (13), либо в условиях (14) (см. лемму 2), поэтому уместно следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (11). Тогда размер инвестиционного фонда K^i должен удовлетворять условию (15) и в этом случае

$$X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i =$$

$$= \left\{ x^i \in R^2 \,\middle|\, x^i = \mu \cdot v + (1 - \mu) \cdot z, 0 \le \mu \le 1 \right\}, \tag{16}$$

где μ параметр $(0 \le \mu \le 1)$.

Приведенное в лемме 3 множество (16), соответствующее условию (15), шире множества допустимых портфелей, так как оно получено без учета второго из ограничений (4).

Обозначим

$$\gamma_{21}^i = \frac{m_2 - m_1}{\overline{m}^i - m_1} > 1.$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия (11) и (15). Если при этом

$$\alpha_1^i p_1 a_1 + \alpha_2^i p_2 a_2 < K^i, \tag{17}$$

то $X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i \bigcap X_2^i = \varnothing$; если

$$K^i < \gamma_{21}^i \cdot \alpha_2^i p_2 a_2, \tag{18}$$

то $X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i \bigcap X_2^i = X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i$.

Условия (17) и (18) относятся ко второму из ограничений (4) и допускают аналогичную с условиями (13) и (14) трактовку, поэтому мы их исключаем из дальнейшего рассмотрения. Геометрические рассуждения по поводу условий (17) и (18) приводят к следующему аналогу условия (15) относительно второго из ограничений (4):

$$\gamma_{21}^i \cdot \alpha_2^i p_2 a_2 \le K^i \le \alpha_1^i p_1 a_1 + \alpha_2^i p_2 a_2. \tag{19}$$

Можно показать, что это условие совместимо с условиями (11) и (15).

Обозначим через

$$y = (y_1, y_2) = \left(1 - \frac{\alpha_2^i p_2 a_2}{K^i}, \frac{\alpha_2^i p_2 a_2}{K^i} \right)$$

точку пересечения границы множества X_2^i с отрезком X_0.

Ввиду взаимоисключаемости условий (17), (18) и (19), в случае нарушения неравенства (19) мы оказываемся либо в условиях (17), либо в условиях (18) (см. лемму 4), поэтому уместно следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть выполнены условия (11) и (15). Тогда размер инвестиционного фонда K^i должен удовлетворять условию (19) и в этом случае

$$X_0 \bigcap X_m^i \bigcap X_1^i \bigcap X_2^i =$$
$$= \left\{ x^i \in R^2 \middle| x^i = \mu \cdot y + (1-\mu) \cdot z, 0 \le \mu \le 1 \right\}.$$

Объединяя леммы 1–5 воедино, приходим к следующему результату.

Основные результаты

Теорема 1. Если в задаче (1)–(5) инвестор определяет ожидаемый уровень доходности $\overline{m}^i$ из условия $m_2 < \overline{m}^i < m_1$, то объём его инвестиционного фонда K^i должен удовлетворять условию

$$\max\left\{\alpha_1^i p_1 a_1, \gamma_{21}^i \alpha_2^i p_2 a_2\right\} \le K^i \le$$
$$\le \min\left\{\gamma_{12}^i \alpha_1^i p_1 a_1, \alpha_1^i p_1 a_1 + \alpha_2^i p_2 a_2\right\}. \quad (20)$$

В этом случае множество допустимых портфелей не пусто и имеет вид

$$\Lambda = \left\{ x^i \in R^2 \middle| x^i = \mu \cdot y + (1-\mu) \cdot z, 0 \le \mu \le 1 \right\}, \quad (21)$$

где

$$y = \left(1 - \frac{\alpha_2^i p_2 a_2}{K^i}, \frac{\alpha_2^i p_2 a_2}{K^i}\right),$$
$$z = \left(\frac{\alpha_1^i p_1 a_1}{K^i}, 1 - \frac{\alpha_1^i p_1 a_1}{K^i}\right). \quad (22)$$

Рассматривая теперь случай (12) и рассуждая аналогично, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Если в задаче (1)–(5) инвестор определяет ожидаемый уровень доходности $\overline{m}^i$ из условия $m_1 < \overline{m}^i < m_2$, то объём его инвестиционного фонда K^i должен удовлетворять условию

$$\max\left\{\alpha_2^i p_2 a_2, \gamma_{12}^i \alpha_1^i p_1 a_1\right\} \le K^i \le$$
$$\le \min\left\{\gamma_{21}^i \alpha_2^i p_2 a_2, \alpha_1^i p_1 a_1 + \alpha_2^i p_2 a_2\right\}. \quad (23)$$

В этом случае множество допустимых портфелей не пусто и имеет вид (21), где векторы y и z по виду такие же, что и в (22).

Отметим еще раз, что относительно величины θ_{ij} могут иметь место четыре взаимоисключающих друг друга случая (9)–(12). Случаи (9) и (10) назовем тривиальными. Объединяя теоремы, приходим к окончательному результату.

Теорема 3. В задаче (1)–(5), за исключением тривиальных случаев, имеет место один из двух вариантов определения уровня ожидаемой доходности инвестора i:

1) $m_2 < \overline{m}^i < m_1$,

2) $m_1 < \overline{m}^i < m_2$.

В первом случае инвестиционный фонд должен быть выбран из условия (20), а во втором случае – из условия (23). В обоих случаях множество допустимых портфелей не пусто и имеет вид (21).

Заключение

Как показывают проведенные исследования, любой допустимый портфель можно получить как выпуклую комбинацию крайних портфелей y и z. Если ожидания инвестора i удовлетворяют условию (11), то, подставляя в основное ограничение выражения

$$x_1^i = \mu\left(1 - \frac{\alpha_2^i p_2 a_2}{K^i}\right) + (1-\mu) \cdot \frac{\alpha_1^i p_1 a_1}{K^i},$$
$$x_2^i = \mu \frac{\alpha_2^i p_2 a_2}{K^i} + (1-\mu) \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1^i p_1 a_1}{K^i}\right),$$

мы определим новую целевую функцию:

$$\vartheta^i : [0;1] \to R^1,$$

так что $\vartheta^i(\mu) = \sigma^i\left(x^i(\mu)\right), \mu \in [0;1]$.

Таким образом задача (1)–(5) сводится к следующей простой задаче математического программирования:

$$\vartheta^i(\mu) \to \min_{\mu \in [0;1]},$$

для решения которой существуют хорошо известные алгоритмы [8].

Список литературы

1. Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производство финансовых инструментов / А.Н. Буренин. – М.: Научно-техническое общество им. С.И. Вавилова, 2009. – 418 с.

2. Галанов В.А. Рынок ценных бумаг: Учебник / В.А. Галанов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 378 с.

3. Едронова В.Н. Рынок ценных бумаг: Учебное пособие / В.Н. Едронова, Т.Н. Новожилова. – М.: Магистр, 2010. – 684 с.

4. Жуков Е.Ф. Рынок ценных бумаг: Комплексный учебник / Е.Ф. Жуков, Н.П. Нишатов, В.С. Торопцов и др. – М.: Вузовский учебник, 2012. – 254 с.

5. Ковалев В.В. Курс финансового менеджмента: учебник / В.В. Ковалев. – М.: Проспект, 2011. – 480 с.

6. Блохина Т.К. Финансовые рынки: учебное пособие для студентов, аспирантов и преподавателей вузов / Т.К. Блохина. – М.: Российский университет дружбы народов, 2009. – 198 с.

7. Сребник Б.В. Финансовые рынки: профессиональная деятельность на рынке ценных бумаг: учебное пособие для студентов / Б.В. Сребник, Т.Б. Вилкова. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 366 с.

8. Кузнецов А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – СПб.: Лань, 2013. – 352 с.