УДК 519.876.5:004.942:544.6

КОСВЕННЫЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАЛЬВАНОДИНАМИЧЕСКОГО РЕЖИМА МАССОПЕРЕНОСА В ДИФФУЗИОННОМ СЛОЕ У ИОНООБМЕННОЙ МЕМБРАНЫ

[1]Узденова А.М., [2]Уртенов М.Х.

[1]ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева», Карачаевск, e-mail: uzd_am@mail.ru;

[2]ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, e-mail: urtenovmax@mail.ru

В статье представлен новый метод косвенного математического моделирования процесса нестационарного массопереноса в диффузионном пограничном слое раствора бинарного электролита у поверхности ионообменной мембраны в одномерном случае. Метод основан на решении уравнения Пуассона для электрического потенциала со специально выведенным граничным условием, позволяющим задать гальванодинамический режим (ГДР). Представлены результаты моделирования процессов возникновения и развития расширенной области пространственного заряда в ГДР. Выполнен сопоставительный анализ результатов моделирования для гальванодинамического и потенциодинамического режимов при различных значениях плотности тока (допредельном, предельном и сверхпредельном), показано их полное согласие в стационарном состоянии. Проведено сравнение различных методов моделирования ГДР по области применения, вычислительной трудоемкости, математической сложности и сложности вывода упрощенных моделей.

Ключевые слова: ионообменная мембрана, гальванодинамический режим, математическое моделирование, уравнения Нернста – Планка – Пуассона

INDIRECT METHOD OF MATHEMATICAL MODELING OF MASS TRANSFER IN THE DIFFUSION LAYER AT ION-EXCHANGE MEMBRANE FOR THE GALVANODYNAMIC MODE

[1]Uzdenova A.M., [2]Urtenov M.Kh.

[1]Federal Budgetary Educational Institution of Higher Education Karachaevo-Cherkessky State University named after U.D. Aliev, Karachaevsk, e-mail: uzd_am@mail.ru;

[2]Federal Budgetary Educational Institution of Higher Education Kuban State University, Krasnodar, e-mail: urtenovmax@mail.ru

The article presents a new method of indirect mathematical modeling of the nonstationary mass transfer process in the diffusion boundary layer of a binary electrolyte solution at the surface of an ion-exchange membrane in the one-dimensional case. The method is based on the Poisson equation solution for the electric potential with a specially derived boundary condition that allows to set the galvanodynamic mode (GDM). The results of simulation of the extended space-charge region emergence and development processes in the GDM are presented. A comparative analysis of simulation results for galvanodynamic and potentiodynamic modes for various values of current density (prelimiting, limiting and overlimiting) is performed, their complete agreement in the stationary state is shown. Different methods of modeling for the GDM are compared in terms of application area, computational and mathematical complexity, and complexity of simplified models derivation.

Keywords: ion-exchange membrane, galvanodynamic mode, mathematical modeling, Nernst-Planck-Poisson equations

Мембранные системы являются основой электродиализных аппаратов, нано- и микрофлюидных устройств, работающих в разных режимах: потенциодинамическом (ПДР) и гальванодинамическом (ГДР). Теория процессов массопереноса в ПДР, когда задается скачок потенциала между двумя эквипотенциальными плоскостями, параллельными мембранам, развита в большом числе одномерных, двумерных и трехмерных математических моделей. Подробный обзор указанных моделей представлен в [1–3].

В практике электродиализа и электрохимической характеризации мембран (хронопотенциометрия, импедансометрия и др.) часто используется ГДР. Накоплено огромное количество экспериментальных данных по хронопотенциометрии [4–6], которые затруднительно интерпретировать, не имея количественной модели.

Сказанное выше привело к исследованиям в области математического моделирования ГДР. Разработки математических моделей для ГДР ведутся по нескольким направлениям.

Первое направление (метод обратной задачи) основывается на решении обратной задачи, а именно, для заданной плотности тока на межфазной границе раствор/мембрана находится соответствующий ему скачок потенциала, а далее задача превращается в ПДР [7]. При реализации этот метод требует многократного решения задачи в ПДР для одного заданного значения плотности тока, что снижает его эффективность.

Второе направление (прямой метод) основано на выводе и решении уравнения для плотности тока в диффузионном слое, вместо уравнения Пуассона для потенциала [8].

Третье направление основано на методе декомпозиции и замене системы уравнений Нернста – Планка – Пуассона системой декомпозиционных уравнений [9–11]. Последующее использование предположения о квазиравномерном распределении заряда (КРЗ или приближении закона Ома) позволяет в результате получить модель для ГДР в приближении закона Ома [12–16].

В данной статье представлен новый подход к моделированию в одномерном случае нестационарного процесса массопереноса в системах, содержащих ионообменные мембраны, в отличие от указанных выше подходов, основанного на решении уравнения Пуассона для потенциала со специально выведенным граничным условием, позволяющим задать ГДР.

Математические модели нестационарного переноса ионов бинарной соли в диффузионном слое

Моделируемая область. Рассматриваемая система представляет собой диффузионный слой раствора бинарного электролита у поверхности катионообменной мембраны (КОМ). Нормальная к поверхности мембраны координата x изменяется от 0 (внешняя граница диффузионного слоя) до δ (межфазная граница с КОМ), рис. 1.

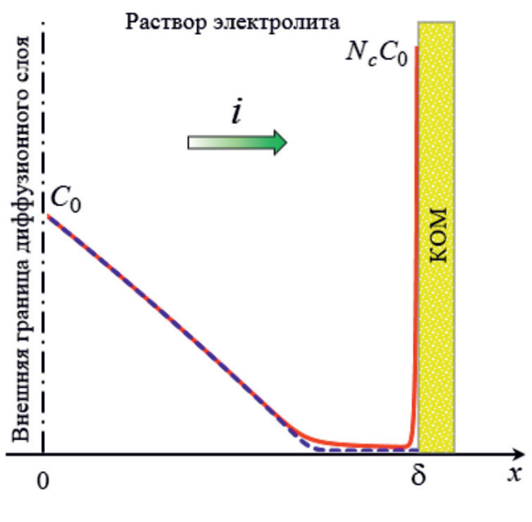

Рис. 1. Схематичные концентрационные профили катионов C_1 (сплошная линия) и анионов C_2 (пунктирная линия) в диффузионном слое у поверхности КОМ. Показаны плотность тока i, концентрация катионов в объеме C_0 и на границе с КОМ N_cC_0

Система уравнений. В одномерном случае математическая модель нестационарного массопереноса состоит из системы уравнений, которая для бинарного электролита записывается следующим образом:

$$j_i = -\frac{F}{RT} z_i D_i C_i \frac{\partial \phi}{\partial x} - D_i \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial j_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -F(z_1 C_1 + z_2 C_2), \tag{3}$$

$$i = F(z_1 j_1 + z_2 j_2), \tag{4}$$

где j_i, D_i, z_i – поток, коэффициент диффузии, зарядовое число и C_i молярная концентрация i-го иона, соответственно; φ – электрический потенциал; t – время; ε_0 – электрическая постоянная; ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость раствора электролита (предполагается постоянной); i – плотность тока; F – постоянная Фарадея; R – газовая постоянная; T – абсолютная температура. Здесь j_1, j_2, i, φ, C_1, C_2 – неизвестные функции t, x.

Уравнения Нернста – Планка (1) описывают поток ионов, обусловленный миграцией в электрическом поле и диффузией; (2) – уравнение материального баланса (в отсутствие химических реакций); (3) – уравнение Пуассона для потенциала электрического поля; (4) – плотность тока в растворе электролита.

Эта система уравнений удобна для моделирования ПДР, так как содержит дифференциальное уравнение (3) для определения потенциала.

Краевые условия для моделирования потенциодинамического режима (ПДР). Для удобства проведения сопоставительного анализа моделирования ПДР и ГДР рассмотрим сначала краевые условия для ПДР.

На внешней границе диффузионного слоя ($x = 0$) естественно предполагать, что выполняется условие локальной электронейтральности $z_1C_1 + z_2C_2 = 0$ и задана концентрация электролита C_0, отсюда получаем, что известна концентрация катионов и анионов:

$$C_i(0,t) = C_{0i}, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Так как система (1)–(4) включает потенциал электрического поля только в форме производных по пространственной координате, то существенным является только падение потенциала $\tilde{\Delta}\phi = \phi(\delta, t) - \phi(0, t)$, поэтому для удобства положим

$$\phi(0,t) = 0. \tag{6}$$

ПДР означает, что величина падения потенциала в рассматриваемой области задается известной функцией времени:

$$\phi(\delta,t)=\tilde{\Delta}\phi(t). \quad (7)$$

В случае потенциостатического режима $\tilde{\Delta}\phi(t)=\text{const}$.

На межфазной границе раствор/КОМ ($x = \delta$) концентрация противоионов зависит от обменной емкости КОМ, что можно задать в виде

$$C_1(\delta,t)=C_{1m}=N_c C_0, \quad (8)$$

где постоянная N_c показывает, во сколько раз эта концентрация отличается от концентрации в объеме раствора [17].

Концентрация коионов определяется из условия непрерывности их потока у границы мембрана/раствор с учетом селективных свойств КОМ:

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial x}+\frac{F}{RT}z_2C_2\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)(\delta,t)=\frac{(1-T_1)i}{z_2FD_2}, \quad (9)$$

где T_1 – эффективное число переноса противоионов в мембране. T_1 – это число близкое к 1, причем для идеально селективной катионообменной мембраны $T_1 = 1$ и условие (9) превращается в условие непроницаемости КОМ для коионов.

Краевая задача, включающая уравнения (1)–(4) и краевые условия (5)–(9) моделирует ПДР, причем ключевым краевым условием, определяющим его, является условие (7).

Краевые условия для моделирования ГДР. При моделировании ГДР необходимо заменить условие (7) другим условием, связанным с заданным значением плотности тока на межфазной границе раствор/мембрана $i(\delta,t)=i_{\text{av}}(t)$, например линейной функцией времени, константой в случае гальваностатического режима, периодической функцией времени в случае пульсирующих токов и т.д.

В качестве такого граничного условия на межфазной границе раствор/КОМ ($x = \delta$) предлагается использовать соотношение, связывающее производную потенциала электрического поля на границе с заданным значением плотности тока на границе.

Для вывода такого соотношения умножим каждое из уравнений (1) на соответствующее z_i и сложим, тогда с учетом формулы (4) получим

$$i=F\sum_{i=1}^{2}z_i\left(-\frac{F}{RT}z_iD_iC_i\frac{\partial\phi}{\partial x}-D_i\frac{\partial C_i}{\partial x}\right). \quad (10)$$

Из этого соотношения, определяя производную потенциала электрического поля $\partial\phi/\partial x$, можно получить выражение справедливое для любых точек (t, x):

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{RT}{F^2}\left(\frac{i+Fz_1D_1\frac{\partial C_1}{\partial x}+Fz_2D_2\frac{\partial C_2}{\partial x}}{z_1^2D_1C_1+z_2^2D_2C_2}\right). \quad (11)$$

Полагая в соотношении (11), $x = \delta$ и учитывая $i(\delta,t)=i_{\text{av}}(t)$, где плотность тока $i_{\text{av}}(t)$ на межфазной границе является задаваемой функцией времени, получаем следующее граничное условие, определяющее производную электрического потенциала на межфазной границе через заданную на этой же границе плотность тока:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(\delta,t)=-\frac{RT}{F^2}\left(\frac{i_{\text{av}}(t)+Fz_1D_1\frac{\partial C_1}{\partial x}+Fz_2D_2\frac{\partial C_2}{\partial x}}{z_1^2D_1C_1+z_2^2D_2C_2}\right)(\delta,t). \quad (12)$$

При моделировании ГДР граничное условие (12) заменяет граничное условие (7).

Остальные краевые условия для ГДР совпадают с краевыми условиями для ПДР.

Скачок потенциала в ГДР является вычисляемой величиной.

Начальные условия. Начальные условия ($t = 0$) зависят от целей конкретного исследования (например, моделирование развития расширенной области пространственного заряда (ОПЗ), расчет хронопотенциограмм, исследование пульсирующих токов). Так, при моделировании возникновения и развития расширенной ОПЗ в качестве начальных условий нужно выбрать стационарный массоперенос при отсутствии электрического тока ($i_{\text{av}} = 0$), т.е. равновесный массоперенос.

Математическая модель ГДР в безразмерном виде

Для численного исследования краевых задач удобно перейти к безразмерному виду, так как это позволяет упростить уравнения и определить фактическое количество и набор параметров, определяющих поведение системы. Безразмерные переменные описывают класс подобных процессов, характеризующихся одинаковым значением безразмерных чисел. Для перехода к безразмерному виду используем характерные величины, описывающие задачу.

Характерные величины. При моделировании процессов массопереноса в диффузионном слое характерным значением для пространственной координаты является толщина диффузионного слоя δ, для концентраций ионов – объемная концентрация электролита C_0, для коэффициентов диффузии – коэффициент диффузии электролита $D = D_1 D_2 (z_1 - z_2) / (D_1 z_1 - D_2 z_2)$, для электрического потенциала – тепловой потенциал $\varphi_0 = RT/F$, для потока ионов – диффузионный поток $j_0 = DC_0/\delta$, для плотности тока – величина $i_0 = FDC_0/\delta$, которая представляет собой половину предельной плотности тока $i_{\lim} = FDC_0/(\delta(T_1 - t_1))$ [1], при числах переноса катионов в мембране $T_1 = 1$ и в растворе $t_1 = 0,5$. Тогда, в качестве характерного времени получаем $t_0 = \delta^2/D$, имеющий смысл диффузионного времени, т.е. времени, необходимого для выравнивания концентрации диффундирующего вещества.

Формулы перехода. Переведем уравнения в безразмерную форму с помощью соотношений (индексом (u) обозначены безразмерные варианты величин):

$$x^{(u)} = \frac{x}{\delta},\ t^{(u)} = \frac{t}{t_0},$$

$$C_i^{(u)} = \frac{C_i}{C_0}, i = 1,2,\ \varphi^{(u)} = \frac{\varphi}{\varphi_0},\ i^{(u)} = \frac{i}{i_0},$$

$$j_i^{(u)} = \frac{j_i}{j_0}, i = 1,2,\ D_i^{(u)} = \frac{D_i}{D}. \tag{13}$$

Система уравнений в безразмерной форме (индекс (u) для простоты записи опущен):

$$j_i = -z_i D_i C_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D_i \frac{\partial C_i}{\partial x},\ i = 1,2, \tag{14}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial j_i}{\partial x},\quad i = 1,2, \tag{15}$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(z_1 C_1 + z_2 C_2), \tag{16}$$

$$i = z_1 j_1 + z_2 j_2. \tag{17}$$

Система уравнений (14)–(17) содержит одно безразмерное число $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 RT/(C_0 \delta^2 F^2)$. Физический смысл малого параметра ε состоит в том, что это есть удвоенный квадрат отношения дебаевской длины l_D к толщине диффузионного слоя δ: $\varepsilon = 2(l_D/\delta)^2$ [1]. Оценка величины ε показывает, что при естественных для электродиализа условиях оно имеет порядок $10^{-10} - 10^{-4}$.

Для удобства численного решения преобразуем систему уравнений, подставив плотность потока (14) в уравнения (15) и (17):

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-z_i D_i C_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D_i \frac{\partial C_i}{\partial x}\right),$$
$$i = 1, 2, \tag{18}$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -(z_1 C_1 + z_2 C_2), \tag{19}$$

$$i = \sum_{i=1}^{2}\left(-z_i^2 D_i C_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} - z_i D_i \frac{\partial C_i}{\partial x}\right). \tag{20}$$

Таким образом, система уравнений содержит четыре неизвестные функции t, x: C_1, C_2, φ, i. Поля концентраций C_1, C_2 и потенциала φ определяются решением уравнений (18) и (19) соответственно. Плотность тока i вычисляется с помощью выражения (20). Присутствие малого параметра ε в уравнении Пуассона (19) обуславливает сингулярное возмущение краевой задачи, что значительно усложняет ее численное решение. Потенциал электрического поля φ и концентрации ионов c_1, c_2 изменяются очень быстро в узком пограничном слое, толщина которого близка к длине Дебая l_D [1]. Одним из возможных подходов решения этой проблемы является уплотнение вычислительной сетки в пограничном слое.

Краевые условия ГДР в безразмерной форме. На внешней границе диффузионного слоя $x = 0$:

$$C_i(0,t) = 1,\quad i = 1,2,\ \varphi(0,t) = 0. \tag{21}$$

На границе раствор/КОМ $x = 1$:

$$C_1(1,t) = N_c,\ \left(\frac{\partial C_2}{\partial x} + z_2 C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(1,t) = \frac{(1 - T_1)}{z_2 D_2} i,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,t) = -\left(\frac{i_{\text{av}}(t) + z_1 D_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + z_2 D_2 \frac{\partial C_2}{\partial x}}{z_1^2 D_1 C_1 + z_2^2 D_2 C_2}\right)(1,t). \tag{22}$$

Численное решение найдено методом конечных элементов с помощью пакета Comsol Multiphysics [18].

Возникновение и развитие расширенной ОПЗ в ГДР

Рассмотрим процесс возникновения и развития расширенной ОПЗ для ГДР, увеличивая плотность тока от 0 до запредельных значений по формуле: $i_{av}(t) = at$, где $a = 0{,}0041 i_{lim}$. На рис. 2 приведен график безразмерной плотности пространственного заряда $\rho = (z_1 C_1 + z_2 C_2)$ в координатах t и x.

Из рис. 2 видно, что область пространственного заряда начинает формироваться в момент времени $t = 245$, когда плотность тока равна предельной $i_{av}(t) = i_{lim}$. С увеличением плотности тока толщина расширенной ОПЗ увеличивается.

Сопоставительный анализ моделей ПДР и ГДР

Сопоставим результаты численного исследования с помощью моделей для ГДР при $i_{av}(t) = \text{const}$ и для ПДР при $\Delta\varphi(t) = \text{const}$. Выполнены расчеты по предлагаемой ГДР модели (рис. 3), при $\varepsilon = 3\cdot10^{-7}$ для следующих значений плотности тока $i_{av} = 0{,}9 i_{lim}$, $i_{lim} = 1{,}1 i_{lim}$. Здесь $i_{lim} = 1/(T_1 - t_1)$ – безразмерная предельная плотность тока, определенная по формуле Пирса [1] ($T_1 = 0{,}972$, $t_1 = 0{,}395$).

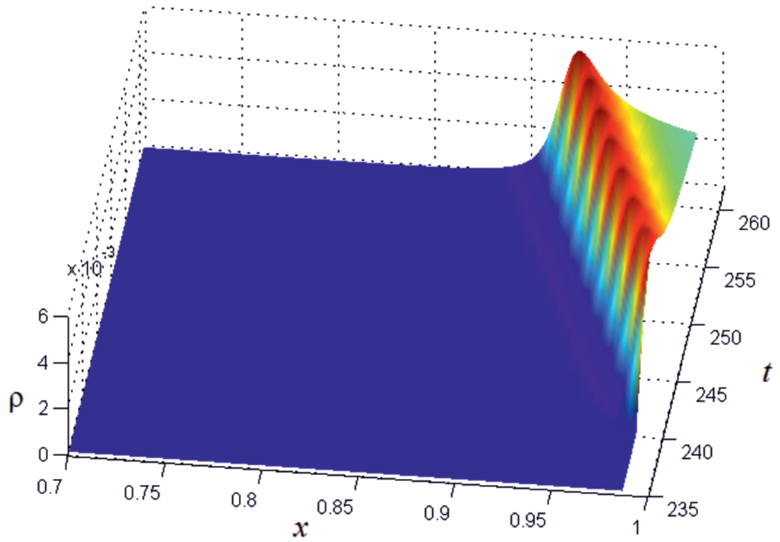

Рис. 2. Плотность пространственного заряда ρ в расширенной ОПЗ (отброшены области квазиравновесного пространственного заряда справа и электронейтральности слева). Результаты расчетов по ГДР модели при $\varepsilon = 3\cdot10^{-7}$ для плотности тока $i_{av}(t) = at$, $a = 0{,}0041 i_{lim}$

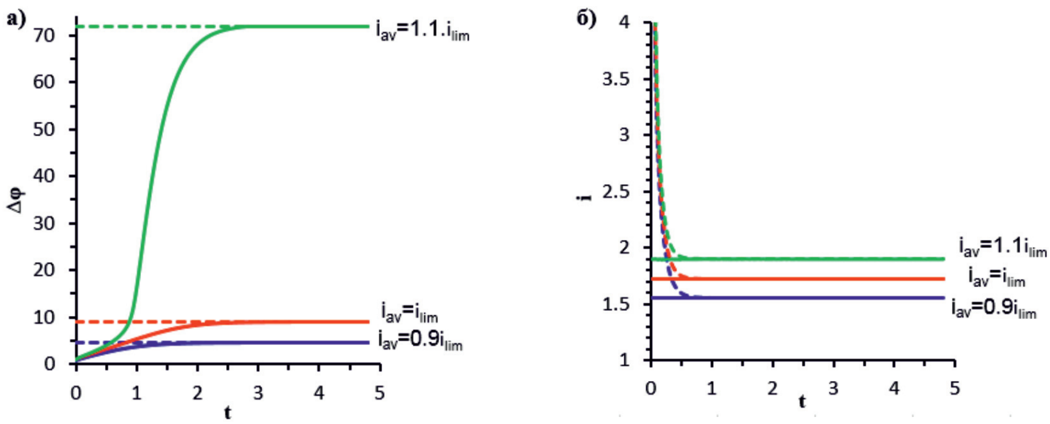

Рис. 3. а – зависимость скачка потенциала от времени; б – зависимость средней плотности тока от времени. Результаты расчетов по ГДР модели (сплошные линии) и ПДР модели (пунктирные линии) при $\varepsilon = 3\cdot10^{-7}$ для плотности тока $i_{av} = 0{,}9 i_{lim}$, $i_{lim} = 1{,}1 i_{lim}$

Из рис. 3, а видно, что с течением времени скачок потенциала увеличивается и достигает стационарного значения $\Delta\varphi_{st}$ (причем с увеличением i_{av} увеличивается и $\Delta\varphi_{st}$). Для значений скачка потенциала $\Delta\varphi_{st}$, соответствующих стационарному состоянию при $i_{av} = 0,9i_{lim}$, $i_{lim} = 1,1i_{lim}$, выполнен расчет по модели для ПДР (пунктирные линии на рис. 3).

На рис. 4 приведены концентрационные профили в момент времени $t = 5$ (когда достигнуто стационарное состояние), рассчитанные по моделям для ГДР (сплошные линии) и ПДР (пунктирные линии). При плотности тока $i_{av} = 0,9i_{lim}$ в области у поверхности мембраны концентрации ионов уменьшаются, диффузионный слой разделен на две области: электронейтральную ($0 < x \le \delta_2$) и ОПЗ ($\delta_2 < x \le 1$); при $i_{av} = i_{lim}$ – концентрации ионов на границе с мембраной истощены почти до нулевого значения; при $i_{av} = 1,1i_{lim}$ – в структуре ОПЗ можно выделить расширенную ОПЗ ($\delta_1 < x \le \delta_2$) и квазиравновесную ($\delta_2 < x \le 1$). Описанное поведение системы соответствует современным представлениям о структуре диффузионного слоя при различных значениях тока [3].

Из рис. 3 и 4 видно, что результаты вычислений в стационарном состоянии по моделям для ГДР и ПДР полностью согласуются.

Заключение

В статье предложен новый метод математического моделирования нестационарного процесса массопереноса в ГДР в мембранных системах в одномерном случае с использованием уравнения Пуассона и специального граничного условия, позволяющего задать ГДР. Предлагаемый метод моделирования может быть расширен для двумерных и трехмерных случаев, дополнен уравнениями Навье – Стокса и полезен в исследованиях гравитационной конвекции и электроконвекции в ГДР.

Проведен сопоставительный анализ различных методов моделирования ГДР, результаты которого приведены в таблице.

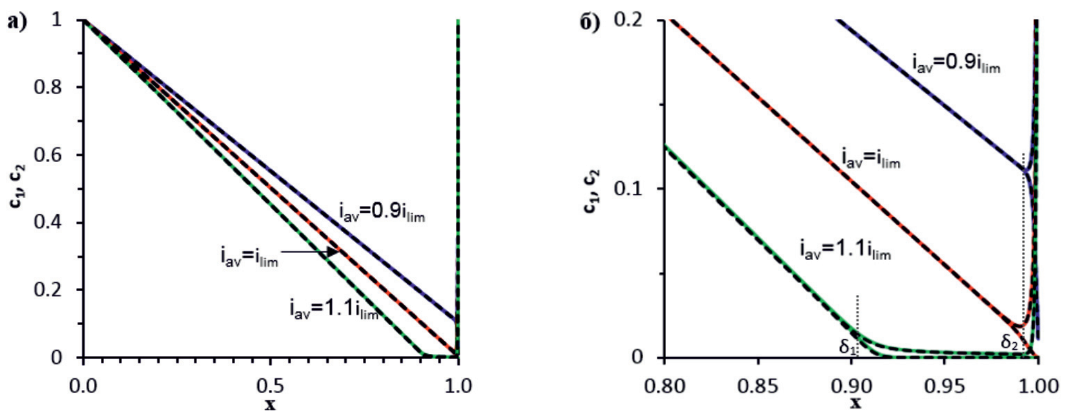

Рис. 4. а – концентрационные профили; б – увеличение рис. а. Результаты численного расчета по моделям для ГДР (сплошные линии) и ПДР (пунктирные линии) в момент $t = 5$ при $\varepsilon = 3\cdot10^{-7}$, плотности тока $i_{av} = 0,9i_{lim}$, $i_{lim} = 1,1i_{lim}$

Сопоставительный анализ различных методов моделирования ГДР

Характеристика \ Метод	Метод обратной задачи	Прямой метод	Метод, основанный на методе декомпозиции	Косвенный метод: уравнение Пуассона и специальное граничное условие
Область применения	Любые задачи	Любые задачи	Любые задачи	Любые задачи
Вычислительная трудоемкость	Очень высокая	Средняя	Низкая	Средняя
Математическая сложность	Средняя	Высокая	Очень высокая	Низкая
Сложность вывода упрощенных моделей	Высокая	Очень низкая	Очень низкая	Средняя

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта: № 16-08-00128 А «Теоретическое и экспериментальное исследование гравитационной конвекции в мембранных системах с учетом реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды».

Список литературы

1. Nikonenko V.V., Pismenskaya N.D., Belova E.I., Sistat P., Huguet P., Pourcelly G., Larchet Ch. Intensive current transfer in membrane systems: Modelling, mechanisms and application in electrodialysis // Adv. Colloid Interface Sci. – 2010. – Vol. 160. – P. 101–123.

2. Nikonenko V.V., Kovalenko A.V., Urtenov M.K., Pismenskaya N.D., Han J., Sistat P. Pourcelly G. Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives // Desalination. – 2014. – Vol. 342. – P. 85–106.

3. Эффект электроконвекции и его использование для интенсификации массопереноса в электродиализе / В.В. Никоненко [и др.] // Электрохимия. – 2017. – Т. 53. – С. 1–24.

4. Volodina E., Pismenskaya N., Nikonenko V., Larchet C., Pourcelly G. Ion transfer across ion-exchange membranes with homogeneous and heterogeneous surfaces // J. Colloid Interface Sci. – 2005. – Vol. 285. – P. 247–258.

5. Belova E.I., Lopatkova G.Yu., Pismenskaya N.D., Nikonenko V.V., Larchet C., Pourcelly G. Effect of Anion-exchange Membrane Surface Properties on Mechanisms of Overlimiting Mass Transfer // J. Phys. Chem. B. – 2006. – Vol. 110. – P. 13458–13469.

6. Влияние чисел гидратации противоиона на развитие электроконвекции у поверхности гетерогенной катионообменной мембраны, модифицированной пленкой МФ-4СК / В.В. Гиль [и др.] // Мембраны и мембранные технологии. – 2016. – Т. 6, № 2. – С. 181–192.

7. Лаврентьев А.В. Математическое моделирование переноса в электромембранных системах с учетом конвективных течений: Монография / А.В. Лаврентьев, А.В. Письменский, М.Х. Уртенов. – Краснодар: ГОУ ВПО «КубГТУ», 2006. – С. 147.

8. Моделирование гальванодинамического режима для одномерного нестационарного переноса бинарного электролита / А.В. Коваленко [и др.] // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 12–2. – С. 273–277.

9. Моделирование и экспериментальное исследование гравитационной конвекции в электромембранной ячейке / А.В. Письменский [и др.] // Электрохимия. – 2012. – Т. 48. – С. 830–841.

10. Коваленко А.В., Казаковцева Е.В., Уртенов М.Х. 3D моделирование переноса бинарного электролита в гальваностатическом режиме в условиях электронейтральности // Научный журнал КубГАУ. – 2015. – № 110(06). – С. 1–12.

11. Mareev S.A., Nichka V.S., Butylskii D.Yu., Urtenov MKh., Pismenskaya N.D., Apel P.Yu., Nikonenko V.V. Chronopotentiometric Response of Electrically Heterogeneous Permselective Surface: 3D Modelling of Transition Time and Experiment // J. Phys. Chem. C. – 2016. – Vol. 120. – P. 13113–13119.

12. Анализ краевой задачи модели переноса бинарного электролита в приближении закона Ома / А.В. Коваленко [и др.] // Научный журнал КубГАУ. – 2012. – № 77(03). – С. 1–14.

13. Численное решение краевой задачи модели переноса бинарного электролита в приближении закона Ома / А.В. Коваленко [и др.] // Научный журнал КубГАУ. – 2012. – № 77(03). – С. 1–16.

14. Коваленко А.В. 2D моделирование переноса ионов соли для бинарного электролита в гальванодинамическом режиме / А.В. Коваленко, А.М. Узденова, М.Х. Уртенов // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 3. – С. 67–76.

15. Коваленко А.В. Асимптотическое решение краевой задачи модели ЗОМ тернарного электролита / А.В. Коваленко, А.А. Хромых, М.Х. Уртенов // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8–3. – С. 600–606.

16. Коваленко А.В. Декомпозиция двумерной системы уравнений Нернста – Планка – Пуассона для тернарного электролита / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов, А.А. Хромых // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 458, № 5. – С. 526–527.

17. Rubinstein I., Shtilman L. Voltage against current curves of cation exchange membranes // J. Chem. Soc. Faraday Trans. – 1979. – Vol. 75. – P. 231–246.

18. Коваленко А.В. Математическое моделирование физико-химических процессов в среде Comsol Multiphysics 5.2: Учебное пособие / А.В. Коваленко, А.М. Узденова, М.Х. Уртенов и др. – СПб.: Лань, 2017. – 228 с.