

УДК 517.95:533.6

## ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ, ПРИМЫКАЮЩИХ К «ГЛАЗУ» ТАЙФУНА

Дерябин С.Л., Мезентцев А.В.

ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург,  
e-mail: SDeryabin@usurt.ru, AMezentsev@usurt.ru

Исследуются конические и цилиндрические течения идеального газа, примыкающие к области покоя. В качестве модели выбирается система газовой динамики, учитывающая воздействие сил тяжести и Кориолиса. Аналитически в виде сходящихся рядов моделируются восходящие закрученные потоки в окрестности стационарной конической контактной поверхности. Для определения коэффициентов этих рядов выписываются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае цилиндрической контактной поверхности удалось проинтегрировать дифференциальные уравнения для определения нулевых и первых коэффициентов ряда. По полученным формулам проводились расчеты газодинамических параметров и траекторий движения частиц газа. Для расчетов использовались безразмерные величины, соответствующие тропическому циклону средней интенсивности. В восходящем закрученном потоке с приведенными значениями входных констант частица газа, сделав полный оборот по цилиндрической контактной поверхности с размерным значением ее радиуса 3650 м, поднялась на высоту 3462 м.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, восходящие закрученные потоки, торнадо, стационарные трехмерные течения, идеальный политропный газ, коническая контактная поверхность, сила тяготения, сила Кориолиса, система уравнений газовой динамики, сходящиеся ряды

## NUMERICAL AND ANALYTICAL MODELING OF CONICAL SWIRLING FLOWS ADJACENT TO THE «EYE» OF A TYPHOON

Deryabin S.L., Mezentsev A.V.

<sup>1</sup>Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, e-mail: SDeryabin@usurt.ru, AMezentsev@usurt.ru

Conical and cylindrical flows of an ideal gas adjacent to the rest region are investigated. As a model, a gas dynamics system is chosen that takes into account the effects of gravity and Coriolis forces. Analytically, in the form of convergent series, ascending swirling flows are simulated in the vicinity of a stationary conical contact surface. To determine the coefficients of these series, systems of ordinary differential equations are written out. In the case of a cylindrical contact surface, it was possible to integrate differential equations to determine the zero and first coefficients of the series. Based on the formulas obtained, the gas dynamic parameters and trajectories of the gas particle motion were calculated. For the calculations, dimensionless quantities corresponding to a tropical cyclone of medium intensity were used. In an upward swirling flow with the given values of the input constants, the gas particle, having made a complete revolution along the cylindrical contact surface with a dimensional value of its radius of 3650 m, rose to a height of 3462 m.

**Keywords:** mathematical modeling, rising swirling flows, tornado, stationary three-dimensional flow, ideal polytropic gas, conical contact surface, the force of gravity and Coriolis, the equations of gas dynamics, convergent series

Задачи математического моделирования течений в восходящих закрученных потоках типа торнадо и тропический циклон при учете действия сил тяжести и Кориолиса рассматривались ранее [1, 2]. В работах [3, 4] рассматривались течения политропного газа в некоторой окрестности свободной поверхности, разделяющей газ и вакуум. Показано, что в случае примыкания газа к вакууму закрутка газа происходит против часовой стрелки в северном полушарии. Более подробная библиография приведена в работе [5]. В [5] рассматривалось течение газа в некоторой окрестности вертикальной контактной характеристики кратности два, разделяющей восходящий закрученный поток и покоящийся газ. В данной работе продолжаются исследования [5] для конической контактной поверхности.

### Постановка задачи

Рассматриваются стационарные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами:  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  – скорость звука в газе;  $u$  – радиальная составляющая вектора скорости газа;  $v$  – тангенциальная составляющая вектора скорости газа;  $w$  – вертикальная составляющая вектора скорости газа. Здесь  $\rho$  – плотность газа,  $\gamma$  – показатель политропы газа. Газодинамические параметры зависят от независимых переменных:  $r$  – полярного радиуса в плоскости  $xOy$ ;  $\varphi$  – полярного угла;  $z$  – третьей пространственной координаты. Значение переменной  $z$  отсчитывается от поверхности Земли.

В качестве математической модели, описывающей стационарные конические

течения политропного газа, выбирается система газовой динамики, учитывающая воздействие сил тяжести и Кориолиса [6]:

$$\begin{cases} uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left( u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\ uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bwc \cos \varphi, \\ uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}cc_\varphi = -au + bws \sin \varphi, \\ uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a = 2\Omega \sin \psi$ ,  $b = 2\Omega \cos \psi$ ,  $\Omega$  – модуль угловой скорости вращения Земли,  $\psi$  – широта точки ( $r = 0, z = 0$ ) на поверхности Земли,  $g = \text{const} > 0$  – ускорение свободного падения.

Построение и исследование течения будем проводить в окрестности точки  $M_0(r_{00} + kz_{00}, \varphi_{00}, z_{00})$ ,  $r_{00}, \varphi_{00}, z_{00} = \text{const} > 0, k \geq 0$ .

Будем искать конические характеристики этой системы в виде

$$r = r_0(z) = r_{00} + kz, \quad r_{00} > 0, \quad z_{00} > 0.$$

В системе (1) введем новую независимую переменную  $\eta = r - r_0(z)$ , не меняя переменных  $z, \varphi$  [3, 7]. При этой замене переменных система (1) переходит в следующую систему:

$$\begin{cases} (u - kw)c_\eta + \frac{v}{\eta + r_0(z)}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c \left( u_\eta - kw_\eta + \frac{u + v_\varphi}{\eta + r_0(z)} + w_z \right) = 0, \\ (u - kw)u_\eta + \frac{v}{\eta + r_0(z)}u_\varphi - \frac{v^2}{\eta + r_0(z)} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_\eta = av - bwc \cos \varphi, \\ (u - kw)v_\eta + \frac{uv}{\eta + r_0(z)} + \frac{v}{\eta + r_0(z)}v_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{1}{\eta + r_0(z)}cc_\varphi = -au + bws \sin \varphi, \\ (u - kw)w_\eta + \frac{v}{\eta + r_0(z)}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z - \frac{2k}{(\gamma-1)}cc_\eta = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (2)$$

Поставим начально-краевую задачу на характеристике  $\eta = 0$  кратности 2.

Как и в [5], функция  $c_0$  имеет вид  $c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - g(\gamma-1)z}$ . Сформулируем следующие начальные условия на  $\eta = 0$ :

$$c|_{\eta=0} = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - g(\gamma-1)z}, \quad (3)$$

$$u|_{\eta=0} = kw_0(\varphi, z), \quad v|_{\eta=0} = v_0(\varphi, z), \quad (4)$$

$$w|_{\eta=0} = w_0(\varphi, z).$$

Здесь  $c_{00}$  – константа, при помощи которой задается значение скорости звука покоящегося газа при  $z = 0, 0 \leq r \leq r_0(z)$ .

Для получения единственного решения задачи (2), (4) зададим два дополнительных условия

$$\begin{cases} v(\eta, \varphi, z)|_{z=z_{00}} = v^0(\eta, \varphi), \\ w(\eta, \varphi, z)|_{z=z_{00}} = w^0(\eta, \varphi); \end{cases} \quad (5)$$

с аналитическими в окрестности точки ( $\eta = 0, \varphi = \varphi_{00}, z = z_{00}$ ) функциями  $v^0(\eta, \varphi)$ ,

$w^0(\eta, \varphi)$ , которые удовлетворяют условиям согласования

$$\begin{cases} v^0(\eta, \varphi)|_{\eta=0} = v_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} = v_{00}(\varphi), \\ w^0(\eta, \varphi)|_{\eta=0} = w_0(\varphi, z)|_{z=z_{00}} = w_{00}(\varphi). \end{cases} \quad (6)$$

Далее будем предполагать, что  $v_{00}(\varphi) \neq 0, w_{00}(\varphi) \neq 0$ .

### Построение аналитического решения задачи (2), (4), (5)

Решение задачи (2), (4), (5) будем строить в виде ряда по степеням  $\eta$ .

$$f(\eta, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varphi, z) \frac{\eta^n}{n!}, \quad f = \{c, u, v, w\}. \quad (7)$$

В системе (5) положим  $\eta = 0$  и при обозначениях

$$c_r|_{\eta=0} = c_1; \quad u_r|_{\eta=0} = u_1; \quad w_r|_{\eta=0} = w_1,$$

получим следующие четыре соотношения:

$$\begin{aligned}
w_0 c_{0z} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \left( u_1 - k w_1 + \frac{1}{r_0} (v_{0\varphi} + k w_0) + w_{0z} \right) &= 0, \\
\frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_1 &= -\frac{k v_0 w_{0\varphi}}{r_0} - k w_0 w_{0z} + a v_0 - b \cos \varphi w_0 + \frac{1}{r_0(z)} v_0^2, \\
\frac{1}{r_0(z)} v_0 v_{0\varphi} + w_0 v_{0z} &= (-ak + b \sin \varphi) w_0 - \frac{k v_0 w_0}{r_0(z)}, \\
\frac{1}{r_0(z)} v_0 (w_{0\varphi} + k u_{0\varphi}) + w_0 (w_{0z} + k u_{0z}) &= k \frac{v_0^2}{r_0(z)} + (ak - b \sin \varphi) v_0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Из первого и второго уравнения системы (8) определяется коэффициент ряда (7)  $c_1$  и получается алгебраическое соотношение между коэффициентами  $u_1, w_1$ .

Третье и четвертое уравнения системы (8) являются необходимыми условиями разрешимости характеристической задачи Коши [7]. Поэтому функции  $v_0$  и  $w_0$ , должны удовлетворять этим уравнениям. Из равенства  $u_0 = k w_0$  найдем производные

$$u_{0\varphi} = k w_{0\varphi}, \quad u_{0z} = k w_{0z}.$$

Подставляя полученные производные в третье и четвертое уравнение системы (8), получим систему уравнений

$$\begin{cases} v_{0\varphi} + \frac{r_0(z) w_0}{v_0} v_{0z} = (-ak + b \sin \varphi) \frac{r_0(z) w_0}{v_0} - k w_0, \\ w_{0\varphi} + \frac{r_0(z) w_0}{v_0} w_{0z} = \frac{1}{1+k^2} (ak - b \sin \varphi) r_0(z) + \frac{k}{1+k^2} v_0. \end{cases} \quad (9)$$

С начальными условиями, полученными из условий (6),

$$\begin{aligned}
v_0(\varphi, z) \Big|_{z=z_0} &= v_{00}(\varphi); \\
w_0(\varphi, z) \Big|_{z=z_0} &= w_{00}(\varphi). \quad (10)
\end{aligned}$$

Так же как и в [3, 5], по методике, описанной в [8], перейдем от системы с частными производными (9) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь  $\tau$  – характеристический параметр.

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = 1; & \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z) w_0}{v_0}; \\ \frac{dv_0}{d\tau} = (-ak + b \sin \varphi) \frac{r_0(z) w_0}{v_0} - k w_0; \\ \frac{dw_0}{d\tau} = \frac{r_0(z)}{1+k^2} (ak - b \sin \varphi) + \frac{k}{1+k^2} v_0. \end{cases} \quad (11)$$

Для системы (11) получаются следующие начальные условия

$$\begin{aligned}
\varphi \Big|_{\tau=0} &= \varphi_{00}, \quad z \Big|_{\tau=0} = z_{00}, \\
v_0 \Big|_{\tau=0} &= v_{00}(\varphi_{00}), \quad w_0 \Big|_{\tau=0} = w_{00}(\varphi_{00}). \quad (12)
\end{aligned}$$

Умножим третье уравнение системы (11) на  $\frac{1}{1+k^2} v_0$ , а четвертое уравнение на  $w_0$  и, складывая их, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{1+k^2} v_0 v_{0\tau} + w_0 w_{0\tau} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет общее решение, удовлетворяющее следующему равенству:

$$\begin{aligned}
v_0^2 + (1+k^2) w_0^2 &= C^2 = \\
&= v_{00}^2(\varphi_{00}) + (1+k^2) w_{00}^2(\varphi_{00}). \quad (14)
\end{aligned}$$

Следовательно, на контактной поверхности  $r = r_0(z)$  вдоль бихарактеристики системы (2) для конических течений, как и в [5], имеет место

**Закон сохранения.** Если уменьшается (увеличивается) модуль вертикальной составляющей вектора скорости газа, то увеличивается (уменьшается) модуль тангенсальной составляющей вектора скорости газа в соответствии с формулой (14).

Интегрируя второе уравнение системы (11), имеем

$$z = z_0(\tau, \varphi_{00}) = -r_{00} + \frac{z_{00}}{k} \exp \left( k \int_0^\tau \frac{w_0(\tau, \varphi_{00})}{v_0(\tau, \varphi_{00})} d\tau \right).$$

В отличие от [5] третье и четвертое уравнение системы (11) проинтегрировать не удалось. Тем не менее задача (11), (12) имеет единственное аналитическое решение и далее будем считать известными функции  $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$ ,  $v_0 = v_0(\tau, \varphi_{00})$ ,  $w_0 = w_0(\tau, \varphi_{00})$  и, следовательно,  $u_0 = k w_0(\tau, \varphi_{00})$  – нулевые коэффициенты ряда (7).

Дифференцируя систему (2)  $n$  раз по  $\eta$  и положив  $\eta = 0$ , после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= kw_{n+1} - w_{nz} - \frac{v_{n\phi} + kw_n}{r_0(z)} - \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_n c_{0z} + F_{1n}(\phi, z); \\
 \frac{2c_0}{(\gamma-1)} c_{n+1} &= -\frac{kv_0 w_{n\phi}}{r_0(z)} - kw_0 w_{nz} + \left( a - \frac{kw_0 - 2\gamma}{r_0(z)} \right) v_n - \\
 &- (b \cos \phi - nk \left( \frac{1}{r_0(z)} (v_{0\phi} + kw_0) + \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z} \right)) w_n + F_{2n}(\phi, z); \\
 v_{n\phi} + \frac{r_0(z)w_0}{v_0} v_{nz} &= n \frac{r_0(z)}{v_0} \left( w_{0z} + \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z} \right) v_n - \\
 &- \frac{r_0(z)}{v_0} \left( v_{0z} + ak - b \sin \phi + \frac{kv_0}{r_0(z)} \right) w_n + F_{3n}(\phi, z); \\
 w_{n\phi} + \frac{r_0(z)w_0}{v_0} w_{nz} &= \left( -\frac{w_{0\phi}}{v_0} + \frac{1}{1+k^2} (ak - b \sin \phi) \frac{r_0(z)}{v_0} + \frac{2k}{1+k^2} \right) v_n + \\
 &+ \frac{r_0(z)}{v_0} \left[ (n-1)w_{0z} + \frac{n}{r_0(z)} (v_{0\phi} + kw_0) + \frac{2n}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z} \right] w_n + F_{4n}(\phi, z).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $F_{in}$ , ( $i=1,2,3,4$ ) – функции, известным образом зависящие от ранее найденных коэффициентов ряда (7).

Вводя в третьем и четвертом уравнении системы (15) характеристический параметр  $\tau$ , получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_n}{d\tau} - n \frac{r_0(z)}{v_0} \left( w_{0z} + \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z} \right) v_n + \frac{r_0(z)}{v_0} \left[ v_{0z} + ak - b \sin(\tau + \phi_{00}) + \frac{kv_0}{r_0(z)} \right] w_n &= \\
 &= F_{31}(\tau + \phi_{00}, z_0(\tau + \phi_{00})); \\
 \frac{dw_n}{d\tau} + \left[ \frac{w_{0\phi}}{v_0} - \frac{1}{1+k^2} (ak - b \sin(\tau + \phi_{00})) \frac{r_0(z)}{v_0} - \frac{2k}{1+k^2} \right] v_n - \\
 &- \frac{r_0(z)}{v_0} \left[ (n-1)w_{0z} + \frac{n}{r_0(z)} (v_{0\phi} + kw_0) + \frac{2n}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z} \right] w_n = F_{4n}(\tau + \phi_{00}, z_0(\tau + \phi_{00})).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$\phi = \tau + \phi_{00}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z)w_0}{v_0}.$$

Начальные условия для систем (16) получаются из условий (5), если функции  $v^0(r, \phi)$ ,  $w^0(r, \phi)$  разложить в ряд по степеням  $r - r_{00}$ .

$$\mathbf{f}^0(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}^0_n(\phi) \frac{\eta^n}{n!}, \quad \mathbf{f}^0 = \{v^0, w^0\}. \tag{17}$$

В параметрической форме начальные данные имеют вид

$$\phi(0) = \phi_{00}, \quad z(0) = z_{00}, \quad v_n(0) = v_n^{0(n)}(0, \phi_{00}), \quad w_n(0) = w_n^{0(n)}(0, \phi_{00}). \tag{18}$$

Таким образом, в виде рядов (7) построено единственное локально аналитическое решение задачи (2), (4), (5).

### Численное моделирование течения газа на вертикальной контактной поверхности и в ее окрестности

Для построения цилиндрических течений газа возьмем  $k = 0$ , тогда контактная поверхность будет иметь уравнение  $r = r_{00}$  – цилиндр [5]. В этом случае удалось проинтегрировать третье и четвертое уравнения системы (11). Получены следующие формулы [5]:

$$C = \sqrt{v_{00}^2 + w_{00}^2},$$

$$w_0(\varphi) = br_{00} \cos(\varphi) + w_{00} - br_{00} \cos(\varphi_{00}),$$

$$v_0(\varphi) = \sqrt{C^2 - (br_{00} \cos(\varphi) + w_{00} - br_{00} \cos(\varphi_{00}))^2}.$$

Расчеты газодинамических параметров и траекторий проводились по этим формулам и уравнениям для бихарактеристик

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00} w_0}{u_0}.$$

Для расчетов использовались следующие безразмерные величины:

$$\gamma = 1,4, \quad b = 0,001379, \quad r_{00} = 1, \quad z_{00} = 0,00027, \\ c_{00} = 1, \quad v_{00} = 0,159, \quad w_{00} = 0,0024.$$

При введении безразмерных переменных в качестве масштабов скорости и расстояния брались соответственно  $\frac{1}{3}10^3$  м/с и 3650 м. Использование таких входных данных соответствует тропическому циклону средней интенсивности, находящемуся на широте  $\psi = \frac{\pi}{6}$  [1]. В восходящем закрученном потоке с приведенными значениями входных констант частица газа, сделав полный оборот по поверхности цилиндрической контактной поверхности с размерным значением ее радиуса  $r_{00} = 3650$  м, поднялась на высоту 3462 м.

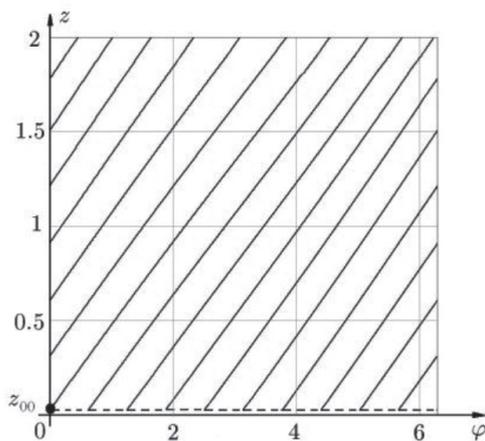


Рис. 1. Бихарактеристики  $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$

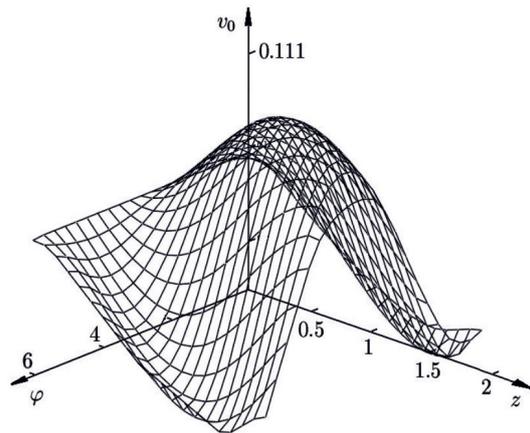


Рис. 2. Интегральная поверхность для функции  $v_0(\varphi, z)$

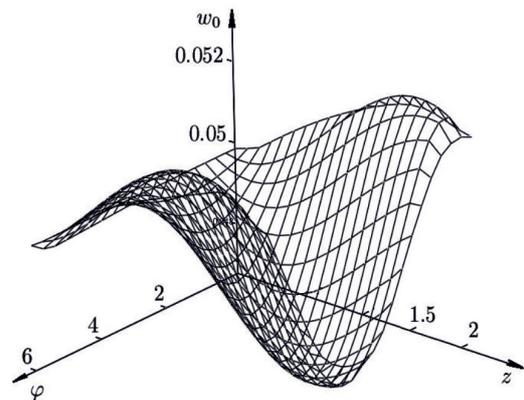


Рис. 3. Интегральная поверхность для функции  $w_0(\varphi, z)$

На рис. 1 приведены бихарактеристики  $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$ , при численном построении которых с шагом  $\Delta\tau = 0,001$  выбирались точки  $(\varphi_k, z_k)$ : фиксировалось  $\varphi_{00}$ , вычислялось  $\varphi_k = \tau_k + \varphi_{00}$  и  $z_k = z_0(\tau_k, \varphi_{00})$ .

Таким образом, построена неравномерная сетка для переменных  $\varphi, z$ . В узлах этой сетки и вычислялись значения функций  $v_0(\varphi, z), w_0(\varphi, z)$ .

В результате из бихарактеристик численно построены интегральные поверхности для параметров газа  $u_0(\varphi, z) = 0, v_0(\varphi, z), w_0(\varphi, z)$  на цилиндрическом контактном разрыве. На рис. 2, 3 приведены интегральные поверхности для функций  $v_0(\varphi, z), w_0(\varphi, z)$ .

Авторы благодарят д.ф.-м.н., профессора С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

**Список литературы**

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.
2. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты / С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов [и др.]. – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2013. – 215 с.
3. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16. – С. 63–74.
4. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к ва-

кууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 5. – С. 51–71.

5. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Восходящие закрученные потоки, примыкающие к «глазу тайфуна» // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 2(30). – С. 4–9.

6. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.

7. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 2009. – 368 с.

8. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.