

УДК 681.5:519.87:536.2

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

¹Тугов В.В., ²Акимов И.А.¹*Оренбургский государственный университет, Оренбург, e-mail: sau@mail.osu.ru;*²*Оренбургский государственный педагогический университет, Оренбург, e-mail: akimov_ia@mail.ru*

Данная работа посвящена разработке математических моделей и изучению теплопередачи, происходящей в многослойных цилиндрических конструкциях для полного цикла (предварительный разогрев, полимеризация и охлаждение) процесса производства композиционных материалов на промышленных установках. Работа продолжает исследования теплофизических процессов в многослойных конструкциях с фазовыми переходами. С целью повышения эффективности синтеза технологических процессов с фазовыми переходами предлагается использование метода изотермических поверхностей, как основы для построения математического и алгоритмического обеспечения управляющих систем. Для решения поставленных модельных задач предлагается использовать методы интегральных преобразований и метод конечных интегральных преобразований Ханкеля, которые дают возможность решать задачи, связанные с получением многослойных структур. Универсальность применяемого математического аппарата позволяет создавать программное обеспечение для проведения имитационного моделирования рассматриваемого процесса на компьютере, а также системы управления производством композиционных материалов на различных режимах работы.

Ключевые слова: теплопередача, полимеризация, многослойные конструкции, композиционные материалы, фазовый переход

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF HEAT TRANSFER IN MULTILAYER STRUCTURES

¹Tugov V.V., ²Akimov I.A.¹*Orenburg State University, Orenburg, e-mail: sau@mail.osu.ru;*²*Orenburg State Pedagogical University, Orenburg, e-mail: akimov_ia@mail.ru*

This work is devoted to development of mathematical models and the study of heat transfer occurring in multilayer cylindrical structures for a full cycle (pre-heating, curing and cooling) as part of manufacturing of composite materials in industrial plants. This work continues the research of thermal processes in multilayer constructions with phase transitions. In order to improve the efficiency of the synthesis of technological processes with phase transitions it is proposed to use the method of isothermal surface, as the basis for the construction of mathematical and algorithmic support of controlling systems. To solve the model problems are encouraged to use the methods of integral transforms and the method of finite integral Hankel transformations that allow to solve the problems associated with obtaining multilayer structures. The versatility of the applied mathematical apparatus allows the creation of software for the simulation of the process on a computer, as well as production management systems of composite materials in different operating modes.

Keywords: heat transfer, polymerisation, multilayer structures, composite materials, phase transition

В современной промышленности широкое применение находят композиционные материалы (КМ) и изделия на их основе, так как они обладают значительными преимуществами по сравнению с традиционными металлами и сплавами, обладая уникальными упругими и прочностными свойствами, а также долговечностью работы. Это особенно актуально для авиаконструкций, так как материалы попадают в экстремальные условия работы: повышенные и пониженные температуры, зоны высокой радиации, мощные электромагнитные поля, мощные нагрузки и др. Из композитных материалов производят корпус или детали корпуса, лонжероны лопастей вертолетов и ветроэнов и другие элементы. Применение таких материалов в авиаконструкциях способствует минимизации веса изготавливаемого изделия,

повышению удельной прочности, увеличению ресурса и срока службы [1, 2].

Перед авиапредприятиями встают вопросы связанные с обеспечением постоянно возрастающих требований различного рода к материалам авиаконструкций, снижения погрешностей технологий [3]. Для удовлетворения этих требований необходимо использовать качественные исходные материалы, соблюдать технологии их изготовления, создавать современные автоматизированные системы управления. А поэтому необходимо применение математического синтеза на основе глубокого изучения технологических процессов, всесторонняя математическая проработка процесса полимеризации при изготовлении изделий из КМ.

Полный цикл производства КМ включает в себя три этапа: I этап – режим предварительного разогрева; II этап – режим по-

лимеризации; III этап – режим охлаждения. Для исследования технологических процессов необходимы сведения о теплопередаче на всех этапах производства композиционных материалов.

Цель работы – разработать и исследовать математические модели процессов теплопередачи в многослойных цилиндрических изделиях в установках автоматического ведения технологического процесса (АВТП) на всех этапах производства КМ.

Постановка и решение задачи на первом этапе

Первый этап – это режим предварительного разогрева, с которого начинается процесс теплопередачи в многослойных цилиндрических изделиях в установках АВТП.

При рассмотрении данного этапа считаем, что между слоями имеет место идеальный тепловой контакт и температура контактирующих поверхностей слоев одинакова. Процесс полимеризации не осуществляется, так как он запускается со второго этапа производства КМ.

Исследуем изделие в форме полого многослойного цилиндра, внутри которого размещается технологический мешок, уложенного в пресс-форму. К пресс-форме подключается электрообогрев. При этом температура может передаваться только в радиальном направлении, так как по длине изделия z и по φ , то есть по цилиндрическим координатам, температура одинакова. Параметр теплопроводности λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) для каждого слоя одинаков, так как слои состоят из одного и того же КМ, но под воздействием температуры могут незначительно изменяться. Величина теплового потока находится в зависимости от глубины проникновения и от начального нагрева.

Количество имеющихся на сегодняшний день решений таких задач достаточно ограничено. Так, например, при применении преобразований с функцией Грина получены общие результаты, зависящие от граничных условий. Однако с увеличением количества составляющих изделие слоев трудоемкость выполнения необходимых преобразований резко возрастает. Число слоев в рассматриваемых изделиях может доходить до ста.

Исследуемое изделие можно рассматривать как многослойный цилиндр бесконечной длины, так как его длина значительно больше диаметра, то есть ($l \gg 2R_0$) (рис. 1).

При сделанных выше предположениях постановку задачи на первом этапе математически можно описать так [4]:

$$\frac{\partial U_k(r, \tau)}{\partial \tau} = a_k \left(\frac{\partial^2 U_k(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k(r, \tau)}{\partial r} \right) + w_k(r, \tau), \tau > 0,$$

$$R_0 > r > R_{n+1}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

начальное условие

$$U(r, 0) = f(r), \quad (2)$$

где U_k – температура в k -ом слое; r – радиус цилиндра; a_k – температуропроводность k -ого слоя изделия; w_k – функция источников.

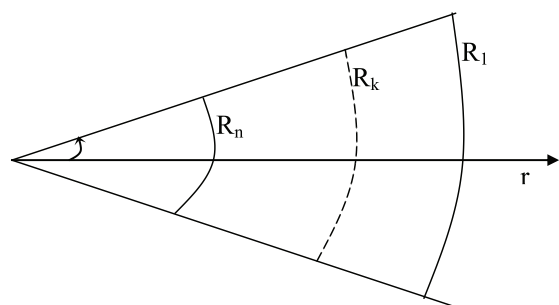


Схема расположения слоев изделия

Запишем в общем виде граничные условия на свободных поверхностях (подбирая соответствующие коэффициенты, можно получить граничные условия I, II или III рода с переменным потенциалом среды и произвольно меняющимся потоком тепла):

при $r = R_0$

$$\alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} + \beta_1 [U_1 - U_0(\tau)] + \chi_1 g_1(\tau) = 0; \quad (3)$$

при $r = R_{n+1}$

$$\alpha_2 \frac{\partial U_n}{\partial r} + \beta_2 [U_n - U_{n+1}(\tau)] + \chi_2 g_2(\tau) = 0, \quad (4)$$

где U_0 и U_{n+1} – соответственно температуры на внешней и внутренней поверхности изделия;

g_1, g_2 – потоки тепла с внешней и внутренней поверхностей изделия;

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \chi_1, \chi_2$ – коэффициенты теплообмена между средами.

Кроме того, наложим условия сопряжения между отдельными слоями:

$$U_k(R_k, \tau) = U_{k+1}(R_k, \tau);$$

$$\lambda_k \frac{\partial U_k(R_k, \tau)}{\partial r} = \lambda_{k+1} \frac{\partial U_{k+1}(R_k, \tau)}{\partial r},$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Методом конечных интегральных преобразований Ханкеля [5] найдем решение исходной задачи для каждого слоя в виде

$$\begin{aligned}
 U_k(r, \tau) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(\mu_k, r)}{\|M_k\|^2} e^{-\left(\frac{\sqrt{a_k} \mu_k}{R_k}\right)^2 \tau} \cdot \int_{R_k}^{R_{k+1}} r [f_k(r) - \Psi_k(r, 0)] M_k(\mu_k, r) dr + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(\mu_k, r)}{\|M_k\|^2} w_k(\mu_k, \tau) + \frac{1}{6\lambda_k} A(\tau)(2r - 3R_n)r^2 + \\
 & + \frac{\chi_1 g_1(\tau)}{2\lambda_k R_n} (r - 2R_n)r - \frac{\chi_2 g_2(\tau)}{2\lambda_k R_n} r^2 + A_k(\tau).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Постановка и решение задачи на втором этапе

Процесс полимеризации происходит на втором этапе производства КМ. При этом исследуемое изделие считаем бесконечно полым цилиндром, так как его длина больше диаметра ($l \gg 2R_0$). Цилиндрические координаты φ и z исключаем из рассмотрения, так как изделие находится внутри пресс-формы и тепло распространяется только в радиальном направлении по изотермическим поверхностям, а по длине и по φ теплопередача будет одна и та же.

Применяя такие предположения, постановка задачи по радиальной схеме в цилиндрической системе координат имеет следующий вид [6]:

$$\frac{1}{a_k} \frac{\partial U_k(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_k(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k(r, \tau)}{\partial r} + f_k(r, \tau), \quad \tau > 0, \quad R_{k-1} \leq r \leq R_k, \quad (6)$$

$$(k = 1, 2, \dots, j, \dots, n),$$

$R_0(r, \tau) > r > \xi(\tau)$ для зоны полимеризации – I, $\xi(\tau) > r > R_{n+1}(r, \tau)$ для противоположной зоны – II, при начальных условиях

$$U(r, 0) = f(r) \quad (7)$$

и при граничных условиях

$$U_n(R_n, \tau) - \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \frac{\partial U_n(R_n, \tau)}{\partial r} = P_n(r); \quad U_{k-1}(R_{k-1}, \tau) = U_k(R_{k-1}, \tau) = P_{k-1}(r); \quad (8)$$

$$U_1(R_0, \tau) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \frac{\partial U_1(R_0, \tau)}{\partial r} = P_0(r); \quad U_I[\xi(\tau), \tau] = U_{II}[\xi(\tau), \tau] = U_{kp};$$

$$U_{II}[a\xi(\tau), \tau] = U_0; \quad \lambda_{k-1} \frac{\partial U_{k-1}(R_{k-1}, \tau)}{\partial r} = \lambda_k \frac{\partial U_k(R_{k-1}, \tau)}{\partial r},$$

при $R_k(r, \tau) \neq \xi(\tau)$;

$$\lambda_I \frac{\partial U_I[\xi(\tau), \tau]}{\partial r} - \lambda_{II} \frac{\partial U_{II}[\xi(\tau), \tau]}{\partial r} = \sigma \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau},$$

где a_k, λ_k, α_k – коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и теплопередачи; σ – теплота полимеризации; a – безразмерный параметр теплового влияния в k -ом слое; $P_{k-1}(r)$, $\xi(\tau)$ – достаточно гладкие функции своих аргументов, которые подлежат определению через условия (1) и (2); $U_k(r, \tau)$ – температура k -го слоя изделия.

Используем метод изотермических поверхностей [7] для решения поставленной задачи, при этом заменяем истинное распределение температуры $U_r(r)$ внутри каждой области $[R_k(r, \tau), \xi(\tau)]$ и $[\xi(\tau), a\xi(\tau)]$ при фиксированных положениях границы $\xi_j(\tau) = \xi(\tau_j)$ нестационарным распределением температуры $U_j(r, \tau)$, $\tau \rightarrow \tau_j = \tau(\xi_j)$.

Итоговое решение задачи имеет вид

$$U_k(r, \tau_j) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{e^{-a_k \eta_{\gamma k}^2 \tau_j}}{c_{\gamma k}} \times \int_{R_{k-1}}^{R_k} \left\{ \int_0^{\tau_j} \Psi_k(r, \tau_j) \cdot e^{a_k \left(\frac{\eta_{\gamma k}}{2}\right)^2 (\tau+3\tau_j)} d\tau + U_0 - \chi_k(r, 0) \right\} \cdot [A_k J_0(\eta_{\gamma k} r) + B_k Y_0(\eta_{\gamma k} r)] r dr + \chi_k(r, \tau_j), \quad (9)$$

где последовательность $\{\tau_j\}$ определяется рекуррентной формулой

$$\tau_{j+1} = \tau_j + \sigma \Delta \xi_{j-1} \left[\lambda_I \frac{\partial U_I(r, \tau_j)}{\partial r} \Big|_{r=\xi_{j-1}} - \lambda_{II} \frac{\partial U_{II}(r, \tau_j)}{\partial r} \Big|_{r=\xi_j} \right]^{-1}, \quad (10)$$

в которой $\Delta \xi_{j-1} = \xi_{j-1} - \xi_j$;

$$\frac{\partial U_k(r, \tau_j)}{\partial r} \Big|_{r=\xi_j} = \frac{\partial \chi_k(r, \tau_j)}{\partial r} \Big|_{r=\xi_j} - \sum_{\gamma} N_{\gamma} \eta_{\gamma k} [A_k J_k(\eta_{\gamma k} \xi_j) + B_k Y_k(\eta_{\gamma k} \xi_j)], \quad (11)$$

где

$$N_{\gamma} = \frac{e^{-a_k \eta_{\gamma k}^2 \tau_j}}{c_{\gamma k}} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \{Q_k(r) + U_0 - \chi_0\} \cdot [A_k J_0(\eta_{\gamma k} r) + B_k Y_0(\eta_{\gamma k} r)] r dr, \quad (12)$$

$$R_{k-1}(r, \tau) < \xi_j(\tau) < R_k(r, \tau), \quad a = \frac{\xi_{II,j}}{\xi_{I,j}} > 1, \quad \chi_k(r, 0) = \chi_0.$$

Постановка и решение задачи на третьем этапе

На третьем этапе производства КМ происходит процесс остывания изделия. Практика показывает, что несоблюдение температурного режима остывания приводит к остаточным термонапряжениям, которые обнаруживаются только в процессе эксплуатации изделий.

Исследованиями установлено, что в производстве лонжеронов лопастей вертолетов в установках АВТП, скорость остывания готового изделия не должна превышать 2–3 градуса в минуту [8]. Нарушение данного процесса остывания приводит к опасным остаточным термонапряжениям. Поэтому необходимо составить математическую модель естественного остывания изделия в установках АВТП в зависимости от температуры окружающей среды, так как АВТП просто отключается от сети после завершения второго этапа производства КМ. Далее изделие охлаждается от температуры полимеризации (160–165 °С) до температуры окружающей среды (цеха).

Лонжероны лопастей вертолетов имеют форму полого цилиндра. Длина изделия

значительно длиннее диаметра ($l \gg 2R$), поэтому изделие можно рассматривать как полый бесконечный цилиндр с внутренним радиусом R_0 и с внешним радиусом R .

Остывание начинается с внешней поверхности изделия, торцы заглушены. В начальный момент времени внешняя поверхность имеет постоянную температуру (температуру цеха, где изготавливается изделие), а изделие имеет температуру полимеризации. Для определения распределения температуры в изделиях в любой момент времени на любой глубине сделаем следующую постановку задачи

$$\frac{\partial U_k(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_k(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k(r, \tau)}{\partial r}, \quad \tau > 0, \quad R_0 \leq r \leq R, \quad (13)$$

с начальным условием

$$U(r, 0) = f(r), \quad (14)$$

и граничными условиями

$$U(R_0, \tau) = U_1 = \text{const}, \quad (15)$$

$$U(R, \tau) = U_2 = \text{const},$$

где R – радиус внешней поверхности; R_0 – радиус внутренней поверхности изделия; $U(r, \tau)$ – температура изделия; a – теплопроводность материала; r – переменная в радиальном направлении; τ – время.

Так как $U_1 U_2 \neq 0$ и $U_1 \neq U_2$, то ищем решение задачи в виде

$$U(r, \tau) = v(r) + w(r, \tau). \quad (16)$$

При этом функция $v(r)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = 0 \quad (17)$$

и граничным условиям

$$v(R_0) = U_1, \quad v(R) = U_2.$$

$$U(r, \tau) = \frac{1}{\ln \frac{R}{R_0}} \left[U_1 \ln \frac{R}{r} + U_2 \ln \frac{r}{R_0} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0(k_n r) e^{-ak_n \tau}}{J_0^2(k_n R_0) - J_0^2(k_n R)} \times \left[\frac{\pi^2}{2} k_n^2 J_0^2(k_n R) \int_{R_0}^R r \cdot f(r) V_0(k_n r) dr - \pi J_0(k_n R) \cdot [U_2 J_0(k_n R_0) - U_1 J_0(k_n R)] \right]. \quad (19)$$

Собственные числа k_n определяются из уравнения

$$J_0(kR) Y_0(kR_0) - J_0(kR_0) Y_0(kR) = 0.$$

Закключение

В ходе проведенного исследования разработаны математические модели температурного процесса разогрева, полимеризации и остывания изделия в многослойных цилиндрических конструкциях при производстве КМ в установках АВТП. Полученные аналитические решения позволяют оценить распределение температуры в зависимости от времени в каждом слое изделия на этапах его предварительного разогрева, полимеризации и остывания. Адекватность полученных математических моделей и физических процессов подтверждается реальными экспериментальными исследованиями и тремя актами внедрения на ОАО «Кумертауское авиационное производственное предприятие». Результаты исследования используются для разработки системы управления производством КМ.

Функция $w(r, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w_k(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 w(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R \quad (18)$$

при начальном условии

$$w(r, 0) = f(r) - v(r)$$

и граничных условиях

$$w(R_0, \tau) = 0, \quad w(R, \tau) = 0.$$

Применим классический метод Фурье и окончательно получим распределение температуры в изделии в зависимости от r и τ в виде

Список литературы

1. Сафонов А.А. Математическое моделирование процесса полимеризации при изготовлении полимерных композиционных материалов / А.А. Сафонов, Б.А. Щеглов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 6. – С. 55–60.
2. Трофимов П.А. Изготовление композиционных материалов для летательных аппаратов / П.А. Трофимов // Вестник ОГПУ. – 2011. – № 3(59). – С. 17–20.
3. Тугов В.В. Исследование влияния погрешностей технологий на эксплуатационные характеристики авиаконструкций из композиционных материалов / В.В. Тугов, И.А. Акимов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – № 1. – С. 58–61.
4. Гремячкин В.М. Тепло- и массоперенос при гетерогенных процессах. Учебное пособие / В.М. Гремячкин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 175 с.
5. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 1985. – 479 с.
6. Акимов И.А. Исследование массопереноса на втором этапе производства композиционных материалов методом полимеризации в установках автоматического ведения технологического процесса (АВТП) / И.А. Акимов, А.И. Акимов, Т.И. Жумагазеев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2015. – № 2. – С. 63–67.
7. Шафеев М.Н. О сходимости метода изотермических поверхностей / М.Н. Шафеев // ВИНТИ № 6597-В86. – Уфа, 1986. – 13 с.
8. Козлов В.Н. Зависимость механических свойств композиционных материалов от температурного режима полимеризации / В.Н. Козлов, А.И. Акимов, М.А. Фатыхов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки, 2009. – С. 83–89.