

УДК 517.962.8

ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

¹Твердый Д.А., ^{1,2}Паровик Р.И.

¹ФГБОУ ВО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»,
Петропавловск-Камчатский, e-mail: diplomat95@mail.ru;

²ФГБУН Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Паратунка, e-mail: romanparovik@gmail.com

Разработана компьютерная программа «NSFDRE» (сокращение от «Numerical Solution of a Fractional-Differential Riccati Equation») на языке C++, которая позволяет получить численное решение задачи Коши для дифференциального уравнения Риккати с производной переменного дробного порядка. Численный алгоритм, реализованный в программе, основан на аппроксимации производной переменного порядка конечными разностями и решении соответствующей алгебраической нелинейной системы уравнений. В программе пользователь может выбрать некоторые функциональные зависимости для переменного дробного порядка и в зависимости от этого построить кривые распределения численного решения, фазовую траекторию, а также наблюдать погрешность метода на каждом шаге вычислений.

Ключевые слова: уравнение Риккати, дробная производная, эрдитарность, численные методы, дифференциальное уравнение

PROGRAM OF NUMERICAL CALCULATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE RICKATH EQUATION WITH DERIVABLE VARIABLE ORDER

¹Tverdy D.A., ^{1,2}Parovik R.I.

¹Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, e-mail: diplomat95@mail.ru;

²Institute of Cosmophysical Research and Dissemination Radio Waves FEB RAS, Paratunka,
e-mail: romanparovik@gmail.com

The computer program «NSFDRE» (short for Numeric Solution of a Fractional-Differential Riccati Equation) in C++ has been developed. It allows obtaining a numerical solution of the Cauchy problem for the Riccati differential equation with a derivative of a variable fractional order. The numerical algorithm implemented in the program is based on approximating the derivative of a variable order by finite differences and solving the corresponding algebraic nonlinear system of equations. In the program, the user can select some functional dependencies for the variable fractional order and, depending on this, construct the distribution curves of the numerical solution, the phase trajectory, and also observe the error of the method at each step of the calculation.

Keywords: Riccati equation, fractional derivative, eriditarity, numerical methods, differential equation.

Дифференциальные уравнения дробных порядков представляют большой интерес для исследования, так как часто находят свое применение во многих областях науки, таких как: математика, физика и др. [1, 2]. Уравнения с дробными производными принадлежат классу интегро-дифференциальных уравнений и называются по терминологии В. Вольтерра эрдитарными [3]. Данное понятие означает наличие в изучаемом процессе эффекта памяти и характеризуется ядром интегро-дифференциального уравнения – функцией памяти. Если функция памяти является степенной, то мы естественным образом переходим к уравнению с дробной производной, которое изучается в рамках дробного исчисления [4, 5]. Одним из таких уравнений является эрдитарное уравнение Риккати [6–8].

В работах [6–8] эрдитарное уравнение Риккати было решено численно с помощью аппроксимации дробной производной конеч-

ной разностью. Далее реализация численного алгоритма сводилась к решению системы квадратных уравнений. Выбирая порядок дробной производной как некоторую функцию от времени, построим семейство расчетных кривых, а также фазовые траектории. Были получены новые режимы распределений, которые зависят от конкретного вида переменного порядка дробной производной. Показано, что некоторые кривые распределений характерны для других эрдитарных динамических систем. Также был исследован численный метод на погрешность с помощью правила Рунге.

В настоящей работе для автоматизации расчетов была разработана программа «NSFDRE» на языке C++ для численного решения уравнения Риккати с дробной производной переменного порядка. В программе реализован численный алгоритм расчета, а также предусмотрена возможность визуализации результатов расчета.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим следующее эрдитарное уравнение:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau + u^2(t) - 1 = 0, \quad 0 < \alpha(t) < 1. \quad (1)$$

где $\Gamma(1-\alpha(t))$ – гамма-функция Эйлера. Для уравнения (1) введем следующее обозначение:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau, \quad (2)$$

которое является обобщением дробного оператора Герасимова – Капуто [9]. Необходимо отметить, что существуют другие определения производной дробного переменного порядков [9]. Мы же остановимся на определении (2), так как для уравнения (1) в компактной форме

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) + u^2(t) - 1 = 0, \quad (3)$$

справедливо начальное условие:

$$u(0) = \varphi, \quad (4)$$

где $\varphi = \text{const}$. Уравнение (3) является аналогом классического уравнения Риккати [10] и учитывает эф-

фект памяти. Вследствие вышесказанного постановка задачи для эрдитарного уравнения Риккати (1) в данном случае свелась к задаче Коши (3) и (4). Заметим, что в случае, когда $\alpha(t) = \text{const}$, мы приходим к задаче Коши, рассмотренной в работе [11], если $\alpha(t) = 1$, то задача Коши (3) и (4) переходит в классическую задачу Коши для уравнения Риккати.

Задача Коши (3) и (4) в общем случае не имеет точного решения, поэтому мы будем использовать численные методы для ее решения. Для этого разобьем временной отрезок $t \in [0, T]$ на N равных частей, где $\tau = T/N$ – шаг дискретизации, и получим что $t_n = n\tau$, $n = 0, \dots, N-1$ а функция решения $u(t_n) = u_n$. Аппроксимацию дробной производной (2) проведем согласно работам [13, 14] в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) \approx \sigma_{\alpha_n, \tau} \sum_{j=1}^i \omega_{j, \alpha_n} (u_{n-j+1} - u_{n-j}), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

где весовые коэффициенты равны

$$\sigma_{\alpha_n, \tau} = \frac{\tau^{-\alpha_n}}{\Gamma(2-\alpha_n)},$$

$$\omega_{j, \alpha_n} = j^{1-\alpha_n} - (j-1)^{1-\alpha_n}.$$

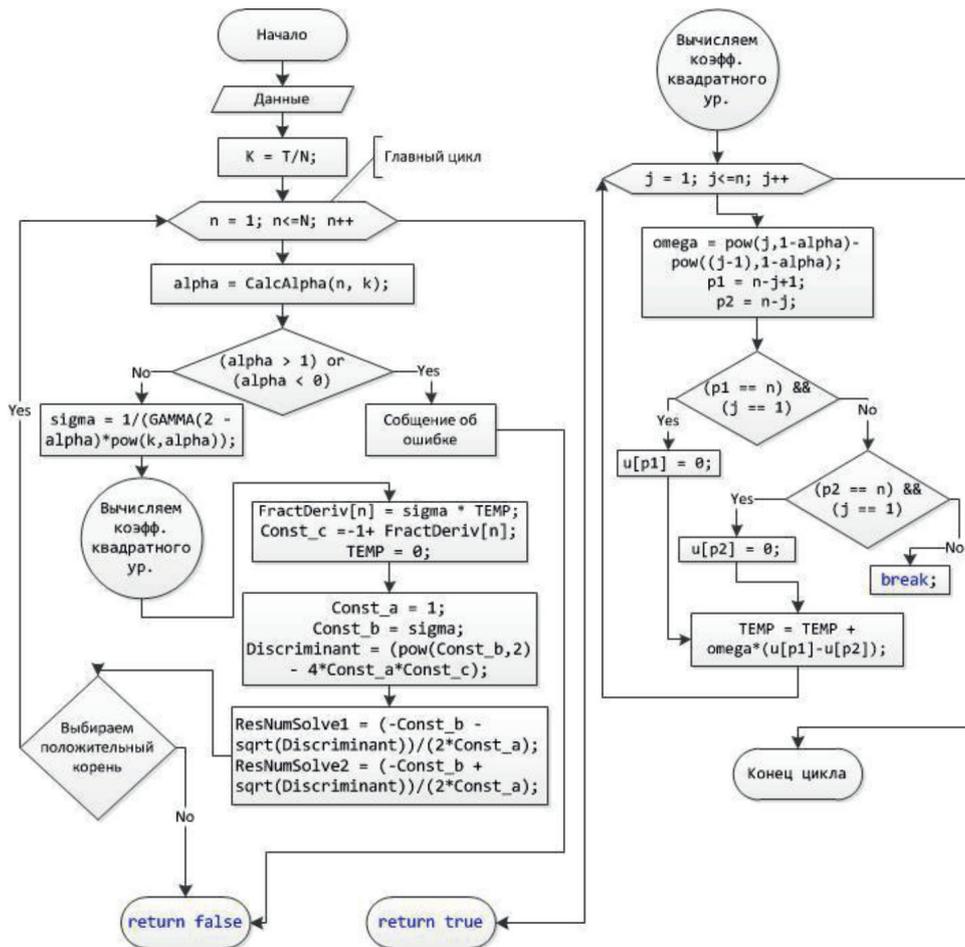


Рис. 1. Блок-схема класса для численного решения

Можно показать, что аппроксимация (5) имеет первый порядок. Интегро-дифференциальную задачу Коши (3) и (4) можно переписать в разностной постановке:

$$\sigma_{\alpha_n, \tau} \sum_{j=1}^n \omega_{j, \alpha_n} (u_{n-j+1} - u_{n-j}) = 1 - u_n^2, u_0 = \rho. \quad (6)$$

Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений, алгоритм решения которой был реализован в программе NSFDRE. Численное решение производилось особым образом, суть которого в том, чтобы свести вычисление значения функции в каждом узле сетки к решению квадратного уравнения (6). Алгоритм приведен на блок-схеме (рис. 1).

Заметим, можно было использовать для численного решения метод Ньютона или Раде-аппроксимации,

как, например, в работе [11]. Однако указанные методы требуют больше машинного времени и памяти для решения. Поэтому был выведен и использован именно такой способ решения. На рис. 2 приведена главная форма программы для ввода параметров задачи.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим пример, где $\alpha(t) = \text{const}$, уже исследованный в работе [11]. Значения управляющих параметров выберем следующими: $t \in [0, T]$, $T = 3$, $N = 1000$, $\tau = 0,003$, $\varphi = 0,2$.

Рис. 2. Введение параметров на главной форме программы NSFDRE

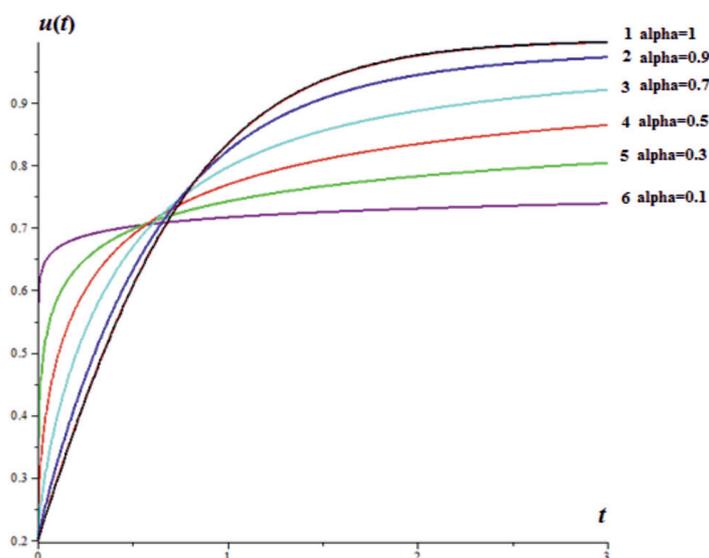


Рис. 3. Семейство расчетных кривых, полученных из решения системы (6) для различных значений дробного параметра α

На рис. 3 приведено семейство расчетных кривых задачи Коши (3) и (4) в зависимости от значений дробного параметра α : $\alpha = 1$ (кривая 1 – соответствует классическому решению уравнения Риккати), $\alpha = 0,9$ (кривая 2), $\alpha = 0,7$ (кривая 3), $\alpha = 0,5$ (кривая 4), $\alpha = 0,3$ (кривая 5), $\alpha = 0,1$ (кривая 6). Заметим, что при уменьшении значения дробного параметра α , в исходном уравнении, приводит к перестройке расчетных кривых численных решений задачи Коши (3) и (4). Это связано с тем, что наличие эффекта памяти в изучаемом процессе будет приводить к «тяжелым затягивающимся хвостам» в кривых распределений полученных решений. Если среда обладает эффектами памяти, то иногда такую среду называют фрактальной, а дробный параметр α связан с ее характеристикой – фрактальной размерностью среды. Поэтому исследование параметра α имеет важное значение для различных приложений, где изучаются свойства среды или материалов.

Пример 2. Рассмотрим другой пример, когда $\alpha(t)$ – является некоторой периодической функцией. Пусть

$$\alpha(t) = \frac{(1 - \delta - \varepsilon)\cos(\mu t) + (\varepsilon - \delta + \varphi)}{2},$$

тогда, положив значения управляющих параметров равными: $\delta = 0$, $\varepsilon = 0,05$, $\mu = 9$, $\varphi = 1$, $t \in [0, T]$, $T = 20$, $N = 1000$, $\tau = 0,02$, $\rho = 0$, получим следующие результаты, приведенные на рис. 4.

Из результатов моделирования, приведенных на рис. 4, можно сделать вывод о том, что если выбрать параметр $\alpha(t)$ в виде периодической функции, в данном случае тригонометрической, то решение задачи Коши (3) и (4) будет описывать колебательный режим. Колебательный режим, приведенный на рис. 4 (красная кривая), похож на один из колебательных режимов автогенератора Ван дер Поля [14–16], что имеет большой практический интерес при моделировании нелинейных осцилляторов. Из рис. 4 видно, что колебания происходят сначала с возрастанием амплитуды, потом амплитуда устанавливается. Действительно, этот факт хорошо виден на рис. 4.

Фазовая траектория рис. 5 выходит на предельный цикл, напоминая петлю гистерезиса. Этот пример показывает, что с помощью эрдитарного уравнения Риккати с переменным дробным порядком производной можно моделировать различные колебательные режимы.

Исследование на погрешность метода

Рассмотрим изменение абсолютной ошибки ε и расчетный порядок точности $p = \ln(|\varepsilon|)/\ln(\tau)$ схемы (6), при изменении шага τ . Для вычисления абсолютной ошибки ε будем использовать правило Рунге [17]:

$$\varepsilon = \max_i \left(\frac{|u_{i,\tau} - u_{i,\tau/2}|}{2^{p_{appr}-1}} \right),$$

где $i = 1, \dots, N$.

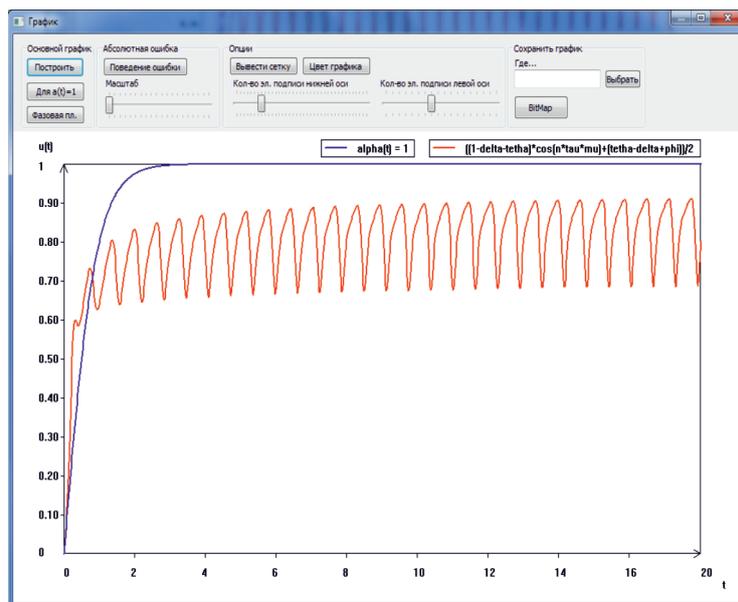


Рис. 4. Расчётные кривые: синяя – классическое решение $\alpha(t) = 1$; красная – кривая численного решения системы (8)

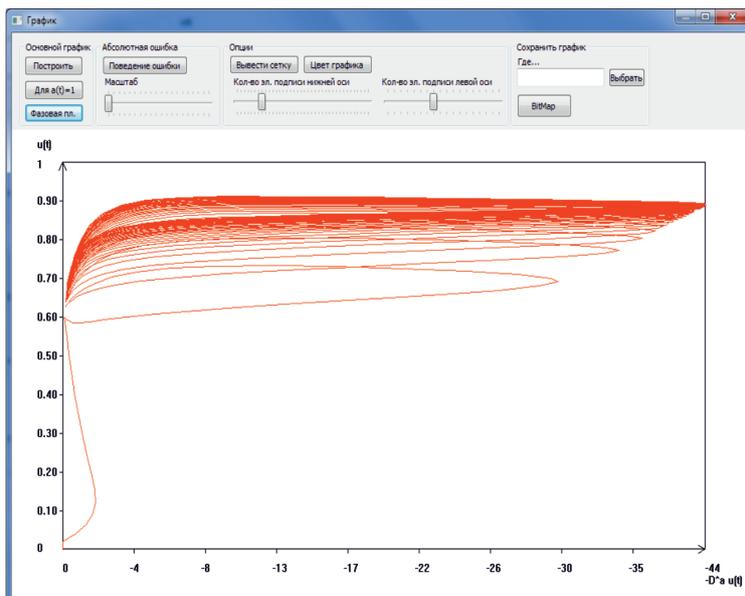


Рис. 5. Фазовая траектория

Результаты исследования численной схемы (8) на ошибку и точность

| N (кол. узлов) | $\tau = T/N$ (шаг) | ε (ошибка) | p (точность) |
|---|--------------------|------------------------|----------------|
| Пример 1. $\alpha(t) = 0,9999$ | | | |
| 65 | 0,04615 | 0,0080057826 | 1,569552780 |
| 131 | 0,02290 | 0,0040108135 | 1,461309925 |
| 263 | 0,01141 | 0,0020088245 | 1,388207803 |
| 527 | 0,005693 | 0,0010069838 | 1,335141320 |
| 1055 | 0,002844 | 0,0005117944 | 1,292511738 |
| 2111 | 0,001421 | 0,0002509894 | 1,264446995 |
| Пример 2. $\alpha(t) = (1 - \delta - \varepsilon)\cos(\mu t) + (\varepsilon - \delta + \phi)/2$ | | | |
| 65 | 0,3077 | — | — |
| 131 | 0,1527 | 0,157214319 | 0,9843999572 |
| 263 | 0,07605 | 0,093047735 | 0,9216824185 |
| 527 | 0,03795 | 0,047894435 | 0,9288660948 |
| 1055 | 0,01896 | 0,024516910 | 0,9351487980 |
| 2111 | 0,009474 | 0,01227877 | 0,9443462189 |

Априорную точность p_{aprior} решения в данном методе положим равной 1. Это следует из общего порядка аппроксимации схемы, задаваемого в граничных узлах сетки.

Из таблицы следует, что абсолютная ошибка ε уменьшается примерно в два раза при уменьшении шага τ также в два раза. В обоих случаях ошибка будет уменьшаться пропорционально уменьшению шага. Расчётный порядок точности p в первом случае ожидаемо стремится к 1. Во втором же случае порядок точности при малых N уменьшается, однако при $N > 236$ вновь начинает расти, как видно из таблицы, и вероятно так

же будет стремиться к 1. Такое поведение, возможно, объясняется свойствами логарифма при вычислении p .

Заключение

Введение дополнительного дробного параметра $\alpha(t)$ в уравнение Риккати приводит к появлению новых кривых распределений, которые характеризуют решение задачи Коши (3) и (4), вследствие чего можно моделировать колебательные режимы и строить модели различных сигналов, это несомненно заслуживает внимания для решения прикладных задач. Результаты

исследования абсолютной ошибки и расчётного порядка точности для примера 1 и примера 2 позволяют предположить, что численная схема (6) применима к данной задаче. Возможное продолжение исследования эредитарного уравнения Риккати (1) связано с прикладными задачами, например, в экономике [18, 19], а также в решении обратной задачи оценки параметра $\alpha(t)$ по экспериментальным данным.

Работа выполнена по госзадачу КамГУ имени Витуса Беринга, НИР «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» № АААА-А17-117031050058-9.

Список литературы

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
2. Petras I. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation // Springer Science & Business Media. – 2011. – 218 p.
3. Volterra V. Sur les'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications // Acta Mathematica. – 1912. – Т. 35, № 1. – С. 295–356.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 218 с.
5. Паровик Р.И. Дробное исчисление в теории колебательных систем // Современные наукоемкие технологии. – 2017. – № 1. – С. 61–68.
6. Твёрдый Д.А. Уравнение Риккати с производной дробного переменного порядка // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 2. – С. 42–42.
7. Твёрдый Д.А. Уравнение Риккати с переменной эредитарностью // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 1(17). – С. 44–53.
8. Твёрдый Д.А. Эредитарное уравнение Риккати с дробной производной переменного порядка // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». – 2017. – С. 200.
9. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов // КамГУ имени Витуса Беринга. – Петропавловск-Камчатский, 2015. – 178 с.
10. Riccati J. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus // Actorum Eruditorum Supplementa. – 1724. – Т. 8, № 2. – С. 66–73.
11. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. – 2012. – Т. 7, № 2. – С. 595–608.
12. Паровик Р.И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2014. – № 1 (8). – С. 60–65.
13. Parovik R.I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. – 2016. – vol. 26. № 3. – P. 429–435.
14. Новикова Е.Р. Осциллятор Ван дер Поля – ДUFFинга с эффектом эредитарности // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2017. – № 2(18). – С. 65–75.
15. Кумакшев С.А. Исследование регулярных и релаксационных колебаний осцилляторов Рэлея и Ван-дер-Поля // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4–2. – С. 203–205.
16. Баранов С.В., Кузнецов С.П., Пономаренко В.И. Хаос в фазовой динамике осциллятора Ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – Т. 18, № 1. – С. 11–23.
17. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.-Л., 1962. – Т. 2. – 464 с.
18. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // Journal of Internet Banking and Commerce. – 2016. – Т. 21, № S6. – С. 1.
19. Макаров Д.В., Паровик Р.И. Обобщенная математическая модель Дубовского для прогнозирования экономических кризисов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. – № 1. – С. 74–77.