УДК 004.71

О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ

Кошкин Б.П., Носков С.И., Оленцевич В.А., Рязанцев А.И.

ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск, e-mail: tonygpx@yandex.ru

В данной статье рассматривается специальная задача линейного программирования – транспортная задача, заключающаяся в поиске наиболее экономного плана перевозки однородной, взаимозаменяемой продукции из пунктов производства в пункты потребления. Приводится математическая постановка транспортной задачи в виде замкнутой и открытой моделей, а также способ приведения открытой модели к замкнутой с введением фиктивного пункта производства или фиктивного пункта потребления продукции. Предлагается математическая постановка многокритериальной транспортной задачи с двумя целевыми функциями, заключающейся в одновременной минимизации суммарных затрат на перевозку и максимизации степени важности перевозок. Отмечается метод, который может быть использован как наиболее эффективный для решения такой задачи – многокритериальный симплекс-метод, основанный на построении множества Парето в задаче многокритериального линейного программирования.

Ключевые слова: векторная оптимизация, многокритериальное линейное программирование, многокритериальный симплекс-метод, транспортная задача, транспортная модель, транспортные перевозки, целевая функция

ABOUT MULTI-CRITERIA TRANSPORT PROBLEM

Koshkin B.P., Noskov S.I., Olentsevich V.A., Ryazantsev A.I.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: tonygpx@yandex.ru

This article discusses a special problem of linear programming – transport problem, which consists in searching the most economical plan for transportation of homogenous, interchangeable products from points of production to points of consumption. The mathematical formulation of transport problem in the form of closed and open models is given, as well as the method of bringing an open model to a closed one with the introduction of a fictitious point of production or a fictitious point of consumption of products. A mathematical formulation of a multi-criteria transport problem with two objective functions (simultaneous minimization of total transportation costs and maximization of the importance of transportation) is proposed. There is noted a method that can be used as the most effective for solving such problems. It is a multi-criteria simplex method based on the construction of the Pareto set in the multi-criterion linear programming problem.

Keywords: vector optimization, multi-criteria linear programming, multi-criteria simplex method, transport problem, transport model, transportation, objective function

Транспортная задача относится к типу специальных задач линейного программирования, обладающих некоторыми особенностями, с учётом которых могут быть разработаны упрощённые методы решения, значительно более экономные по сравнению с принятыми. В классической постановке транспортная задача заключается в поиске такого плана перевозок продукции одного типа (однородной, взаимозаменяемой) из пунктов производства в пункты потребления, при котором затраты на перевозку минимальны (см., например, [1, 3, 6]).

Первая строгая постановка данной задачи принадлежит Хичкоку, а её детальное рассмотрение и разбор – Купмансу. Данциг сформулировал транспортную задачу как задачу линейного программирования и разработал первые методы её решения. Многие литературные источники, посвящённые линейному программированию, так или иначе упоминают, затрагивают транспортную задачу (см., например, [1, 6]). Целиком посвящена классу транспортных задач и методам их решения монография Е.Г. Гольштейна, Д.Б. Юдина [3].

Основной целью данной статьи является описание постановки многокритериальной транспортной задачи с двумя целевыми функциями, представляющей собой усложнённую транспортную задачу линейного программирования.

Постановка транспортной задачи

Существуют замкнутая и открытая транспортная модель. Формулировка транспортной задачи в виде замкнутой транспортной модели заключается в следующем: имеется m пунктов производства $(A_i, i=\overline{1,m})$ и n пунктов потребления $(B_j, j=\overline{1,n})$ однородной, взаимозаменяемой продукции. Для каждого пункта производства заданы объёмы производства a_i, а для каждого пункта потребления – величины спроса b_j в одних и тех же единицах измерения:

$$a_i \geq 0,\ b_j \geq 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

Расходы, связанные с перевозкой единицы продукта из i-ого пункта в j-ый, заданы величиной c_{ij} и известны для каждой пары (i, j). Можно представить эти расходы в виде матрицы размерностью $m \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Требуется обеспечить перевозку всей продукции из пунктов производства в пункты потребления таким образом, чтобы расходы на перевозку были минимальными, т.е. план перевозки был наиболее экономным.

Искомое количество единиц продукта, поставленное из i-ого пункта в j-ый, определяется величиной x_{ij}. Количество перевезённой продукции неотрицательно:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Можно представить перевезённую продукцию в виде матрицы размерностью $m \times n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Исходные данные удобнее всего представляются в виде таблицы (таблица).

Исходные данные задачи

		Пункты потребления					
		B_1	B_2	…			
Пункты производства	A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1	Объём производства
	A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2	
	…	…	…	…	…	…	
	A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
		b_1	b_2	…	b_n		
		Объём потребления					

Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид.

Минимизируются суммарные расходы на перевозку всей продукции (из всех пунктов производства во все пункты потребления):

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Замкнутость транспортной модели подразумевает перевозку всей продукции, имеющейся в пунктах производства и полное удовлетворение спроса на продукцию в пунктах потребления. Математически эти условия выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Для допустимости такой задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

т.е. объём продукции, имеющейся в пунктах производства, должен совпадать с объёмом продукции, требуемым в пунктах потребления.

Для представления условий задачи в матричном виде требуется ввести в рассмотрение векторы P_{ij} и P.

P_{ij} – вектор коммуникации, соответствующий коммуникации, которая связывает i-ый пункт производства с j-ым пунктом потребления, и состоящий из $(n + m)$ компонент, из которых i-я и $(m + j)$-я равны единице, а все остальные – нулю:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

P – вектор производства – потребления, состоящий из объёмов производства a_i и величин спроса b_j:

$$P = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда условия полного вывоза продукции из всех пунктов производства и полного удовлетворения спроса в пунктах потребления в матричной форме будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} P_{ij} = P,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

В открытой транспортной модели подразумевается, что в пунктах производства может оставаться неотправленный товар:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

тогда справедливо следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i.$$

Либо имеющейся в пунктах производства продукции может быть недостаточно для полного удовлетворения спроса в пунктах потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

В таком случае справедливо условие

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j.$$

Открытую транспортную модель можно привести к замкнутой. Если объём продукции в пунктах производства больше требуемого объёма продукции на пунктах потребления, то вводится фиктивный пункт потребления B_{n+1} с объёмом потребления

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Величина b_{n+1} определяет суммарный объём нереализованного продукта.

Стоимость перевозок от каждого поставщика в такой фиктивный пункт потребления – нулевая:

$$c_{i\,(n+1)} = 0.$$

Если объём продукции в пунктах производства меньше требуемого объёма продукции на пунктах потребления, то вводится фиктивный пункт производства A_{m+1} с объёмом поставок

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Стоимость перевозок от фиктивного поставщика в каждый из пунктов потребления нулевая:

$$c_{(m+1)\,j} = 0.$$

Постановка многокритериальной транспортной задачи

Существуют различные модификации транспортной задачи, в том числе и многокритериальные транспортные задачи.

В работе [9] в качестве целевой функции рассматривается минимизация максимального среди всех потребителей числа поставщиков. Несмотря на название («Многокритериальная транспортная задача с разрывной целевой функцией») решается задача при помощи стандартных методов линейного программирования.

В работе [4] в качестве условий рассмотрены: минимизация времени нахождения в пути из пункта производства в пункт потребления продукции, минимизация общей себестоимости перевозки единицы груза, максимизация общего количества перевезённых грузов. Предлагается решать задачу с использованием методов Парето, устанавливая приоритеты критериев, или с использованием интеллектуальных методов нейросетевого прогнозирования. В данном случае определение приоритетов и выделение главного критерия является одним из самых простых методов многокритериального линейного программирования.

В работе [5] минимизировать предлагается расстояние между пунктами назначения перевозки, время транспортировки груза, тарифы перевозки и стоимость перевозки. В качестве решения такой задачи рассматриваются два метода: первый, как и в работе [4], заключается в установлении приоритетов критериев и выделении главного критерия, а второй – в свёртывании критериев и введении одного агрегированного критерия.

Рассмотрим более сложную для решения модификацию транспортной задачи с двумя целевыми функциями. Для этого введём матрицу H размерностью $m \times n$. Элемент h_{ij} матрицы H определяет степень важности перевозки продукта из i-ого пункта производства в j-ый пункт потребления. Степень важности перевозки для каждой пары (i, j) может задаваться, например, экспертами:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, добавляемая целевая функция заключается в максимизации степени важности перевозок:

$$\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_{ij}.$$

В такой постановке транспортная задача является многокритериальной, т.к. заключается в одновременной минимизации суммарных затрат на перевозку и максимизации степени важности перевозок. Математически закрытая модель многокритериальной транспортной задачи выглядит следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

или в матричном виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}P_{ij} = P,$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Для открытой модели многокритериальной транспортной задачи справедливо одно из условий (в зависимости от типа открытой модели):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,$$

либо

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,$$

и также условие неотрицательности количества перевозимой продукции:

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

При приведении открытой транспортной модели к замкнутой важность перевозки из фиктивного пункта производства A_{m+1} или в фиктивный пункт потребления B_{n+1} будет нулевой:

$$h_{(m+1)\,j} = 0,$$

$$h_{i\,(n+1)} = 0.$$

Решение поставленной задачи может быть найдено при помощи многокритериального симплекс-метода, основанного на построении множества Парето в задаче многокритериального линейного программирования [7, 8, 10].

Заключение

Рассмотрена формулировка и математическая постановка транспортной задачи линейного программирования. Предложен способ усложнения данной задачи за счёт введения дополнительной целевой функции. Отмечен метод, подходящий для решения поставленной задачи многокритериального линейного программирования.

Список литературы

1. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 340 с.

2. Базилевский М.П., Баенхаева А.В., Носков С.И. Моделирование валового регионального продукта Иркутской области на основе применения методики множественного оценивания [Текст] // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10–1. – С. 9–14.

3. Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа [Текст] / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 384 с.

4. Золотарюк А.В. Математическая модель многокритериальной оптимизации транспортных перевозок [Текст] // Инновационные технологии в науке и образовании. – 2015. – № 1. – С. 317–320.

5. Константинова М.А. К вопросу многокритериальной задачи в транспортной логистике [Текст] // Научное сообщество студентов XXI столетия. Технические науки: сб. ст. по мат. XVIII междунар. студ. науч.-практ. конф. – Новосибирск: «СибАК», 2014. – № 3(18). – С. 49–54.

6. Мунасыпов Н.А. Линейное программирование [Текст]: учебное пособие / Н.А. Мунасыпов. – Оренбург: ООО «Агентство «Пресса», 2015. – 122 с.

7. Носков С.И. Точечная характеризация множества Парето в линейной многокритериальной задаче [Текст] // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2008. – № 1. – С. 99–101.

8. Носков С.И., Баенхаева А.В. Множественное оценивание параметров линейного регрессионного уравнения [Текст] // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 3(51). – С. 133–140.

9. Осыкина Ю.А., Чернышова Г.Д. Многокритериальная транспортная задача с разрывной целевой функцией [Текст] // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: системный анализ и информационные технологии. – 2008. – № 2. – С. 10–12.

10. Yu L., Zeleny M. The set of all nondominated solutions in linear cases and multycriteria simplex method // J. of Math. Anal. and Applic. – 1975. – Vol. 45, № 2. – P. 430–468.