

УДК 330.5.051

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЛЕЦКОГО С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИОННОГО ВРЕМЕННОГО ЛАГА

Геворкян Э.А., Синчуков А.В., Татарников О.В.

*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова (РЭУ), Москва,
e-mail: gevor_mesi@mail.ru, avsinchukov@gmail.com, ovtatarnikov@mail.ru*

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости национального дохода от времени ($Y(t)$) в макроэкономической модели воспроизводства Калецкого с учетом инвестиционного временного лага (запаздывания). В качестве функции потребления берется произведение экспоненты и гармонической функции. В работе на основе закона экономического баланса и с учетом инвестиционного временного лага построена математическая модель задачи и показано, что функция $Y(t)$ описывается неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом. Решение этого уравнения в предположении существования малого параметра приводит к аналитическому выражению для функции $Y(t)$. Основываясь на этом результате, в данной работе авторы проводят качественный и графический анализ зависимости национального дохода от времени при различных значениях параметров, характеризующих процесс воспроизводства. Показано существенное влияние учета инвестиционного временного лага на характер зависимости национального дохода от времени. Показано также, что результаты в случае отсутствия временного лага можно получить из полученных в работе результатов предельным переходом при стремлении к нулю параметра запаздывания.

Ключевые слова: макроэкономическая модель воспроизводства, временной инвестиционный лаг, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, национальный доход

THE ANALYSIS OF DYNAMICS OF CHANGE OF THE NATIONAL INCOME IN MACROECONOMIC KALECKI'S MODEL IN VIEW OF AN INVESTMENT TEMPORARY LAG

Gevorkyan E.A., Sinchukov A.V., Tatarnikov O.V.

*Plekhanov Russian University of economics (REU), Moscow, e-mail: gevor_mesi@mail.ru,
avsinchukov@gmail.com, ovtatarnikov@mail.ru*

This work is devoted to investigation of the dependence of national income from time ($Y(t)$) in macroeconomic model of the reproduction of Kalecki taking into account the investment time lag (delay). As a function of consumption takes the product of the exponent and harmonic functions. In the article on the basis of the law of economic balance and taking into account the investment temporary lag the mathematical model of the problem is constructed and it is shown that the function $Y(t)$ is described by the nonhomogeneous differential equation of first order with lagging argument. The solution of this equation in the assumption of existence of small parameter leads to the analytical expression for the function $Y(t)$. Based on this result in this work the qualitative and graphic analysis of dependence of the national income from time at various values of the parameters characterizing reproduction process is carried out. The significant influence of the accounting of the investment temporary lag on the nature of dependence of the national income from time is shown. It is also shown, that the results in the case of absence of temporary lag can be obtained from the results, received in this work, by means of passage to the limit at aspiration to zero of the lag parameter.

Keywords: macroeconomic model of reproduction, temporary investment lag, differential equation with lagging argument, national income

В научной литературе опубликовано немало работ, посвященных изучению динамики зависимости национального дохода от времени в макроэкономических моделях воспроизводства с учетом инвестиционного временного лага между различными величинами, характеризующими процесс воспроизводства (например, накопление в момент времени t зависит от национального дохода и потребления в момент времени $t - \tau$) [1–7]. При этом, как известно, национальный доход как функция в зависимости от времени удовлетворяет линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка с запаздывающим аргументом.

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости национального дохода от времени с учетом инвестиционного временного лага в классической макроэкономической модели Калецкого в случае, когда функция потребления представляет произведение экспоненты и гармонической функции.

Постановка задачи, метод решения и анализ результатов

Рассмотрим экономический цикл воспроизводства в рамках классической экономической модели Калецкого, взяв в качестве основной величины, характеризующей экономический процесс, национальный до-

ход как функцию от времени ($Y(t)$). Предположим, что существует инвестиционный временной лаг τ между производственным накоплением, приростом национального дохода и потреблением. Тогда основываясь на законе экономического баланса и учитывая инвестиционный временной лаг τ , модель Калецкого можно представить в следующем виде:

$$Y(t - \tau) = U(t) + C(t - \tau), \quad (1)$$

где $Y(t - \tau)$ – национальный доход в момент времени $t - \tau$, $C(t - \tau)$ – потребление в момент времени $t - \tau$, $U(t)$ – накопление в момент времени t . Если теперь иметь в виду, что $U(t) = B \frac{dY(t)}{dt}$ (B – капиталоемкость национального дохода: отношение производственного накопления к приросту национального дохода) и беря в качестве функции потребления

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \right) \cdot e^{\lambda t} + \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} [(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2) \cos \omega t + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) \sin \omega t] e^{rt}, \quad (5)$$

где прирост национального дохода λ с точностью до членов малого параметра $\lambda \tau$ в первой степени (решение трансцендентного характеристического уравнения) имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{B + \tau}, \quad (6)$$

а остальные величины в (5) выражаются формулами

$$\beta_1 = -\frac{1 - \alpha}{B} e^{-r\tau} \cos \omega \tau,$$

$$Y(t) = \left(Y_0 + \frac{(1 - \alpha)(Br - 1)}{B^2 \omega^2 + (Br - 1)^2} \right) \cdot e^{\frac{t}{B}} - \frac{(1 - \alpha)B}{B^2 \omega^2 + (Br - 1)^2} [(\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2) \cos \omega t + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) \sin \omega t] e^{rt}. \quad (9)$$

Полученные результаты (см. формулы (5) и (9)) показывают, что зависимость национального дохода от времени и без учета, и с учетом временного инвестиционного лага имеет осциллирующий характер и с увеличением времени возрастает. Сравнение формул (9) и (5) указывает на то, что учет инвестиционного временного лага в макроэкономической модели воспроизводства Калецкого существенным образом влияет на характер изменения национального дохода в зависимости от времени.

График зависимости прироста национального дохода λ от временного лага τ

$$C(t - \tau) = (1 - \alpha) e^{r(t - \tau)} \cdot \cos \omega(t - \tau), \quad (2)$$

для функции $Y(t)$ из (1) можно получить следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка с запаздывающим аргументом (см. также [2, 3])

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} - \frac{1}{B} Y(t - \tau) = \\ = -\frac{1 - \alpha}{B} e^{r(t - \tau)} \cos \omega(t - \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что в (2) $0 \leq \alpha \leq 1$ – постоянная норма производственного накопления, ω – частота колебаний функции потребления, r – темп прироста потребления. В работе [1] найдено общее решение уравнения (3) с учетом начального условия Коши

$$Y(t) \Big|_{t=0} = Y_0. \quad (4)$$

Это решение имеет вид

$$\beta_2 = -\frac{1 - \alpha}{B} e^{-r\tau} \sin \omega \tau, \quad (7)$$

$$\gamma_1 = r - \frac{1}{B} e^{-r\tau} \cos \omega \tau,$$

$$\gamma_2 = \omega + \frac{1}{B} e^{-r\tau} \sin \omega \tau. \quad (8)$$

Отметим, что если в (5) перейти к пределу при $\tau \rightarrow 0$, то получим выражение для $Y(t)$ без учета запаздывания

приведен на рис. 1. Кривые построены согласно формуле (6) для различных значений капиталоемкости национального дохода B ($B = 2; 3; 5; 5$) при изменении τ от 0 до 14. Они показывают, что прирост национального дохода λ в зависимости от запаздывания τ представляет собой убывающую функцию.

На рис. 2 приведены кривые, выражающие зависимости национального дохода от времени без учета запаздывания τ при постоянном значении капиталоемкости $B = 5$ и $\omega = \pi/2$, но при различных значениях темпа прироста потребления r по сравнению с технологическим темпом прироста нацио-

нального дохода ($r = 1/B; r < 1/B; r > 1/B$). Кривые построены с помощью формулы (9). Как видно из рис. 2, во всех случаях $Y(t)$ с увеличением t возрастает, сохраняя свой колебательный характер.

Графики зависимости национального дохода от времени ($Y(t)$) при учете временного лага τ приведены на рис. 3–8. Они построены согласно формуле (5) при постоянных значениях капиталоемкости B ($B = 5$ и $B = 3$) и ω ($\omega = \pi/2$), но при различных значениях темпа прироста потребления r ($r = 1/B; r < 1/B; r > 1/B$) и времени запаздывания τ . Полученные кривые показыва-

ют, что национальный доход в зависимости от времени имеет осциллирующий характер и огибающие максимумов являются возрастающими функциями в зависимости от t . При этом законы возрастания могут быть разными. Например, огибающие максимумов кривых 1 и 2 на рис. 5–8 возрастают приблизительно по экспоненциальному закону, а огибающие кривых 3 и 4 на рис. 3, 5–8 – приблизительно по линейному закону. Следует отметить, что при увеличении временного лага τ скорость возрастания зависимости национального дохода от времени ($Y(t)$) убывает (см. рис. 3–8).

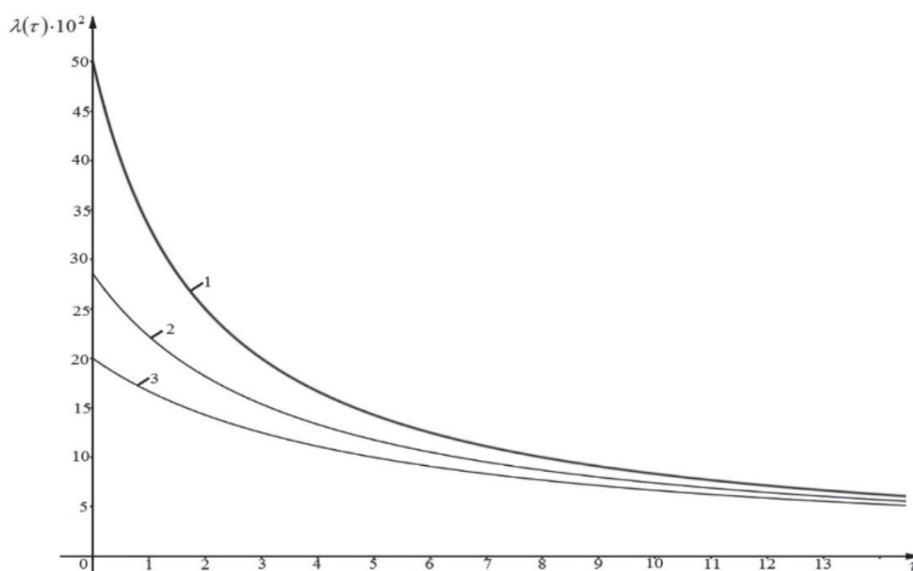


Рис. 1. Зависимость прироста национального дохода λ от временного лага τ при различных значениях B : 1 – $B = 2$; 2 – $B = 3,5$; 3 – $B = 5$

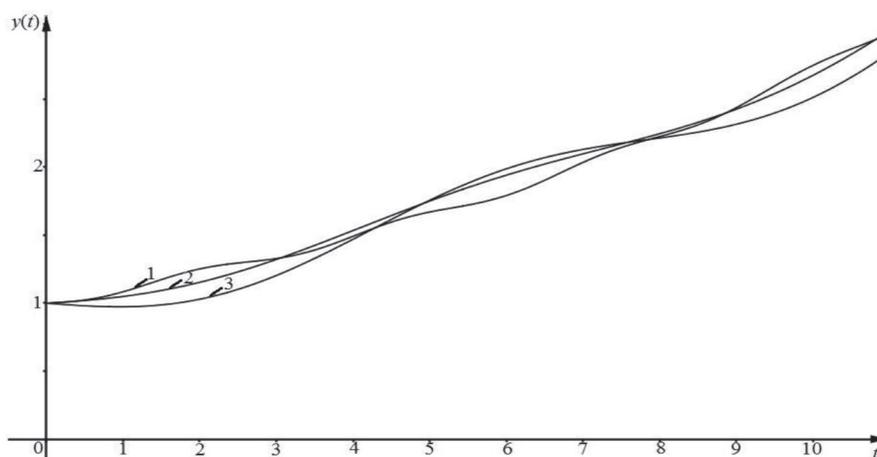


Рис. 2. Зависимость национального дохода Y от времени t в случае отсутствия временного лага: 1 – $B = 5, r = 0,2$, 2 – $B = 5, r = 0,5$, 3 – $B = 3, r = 0,05$

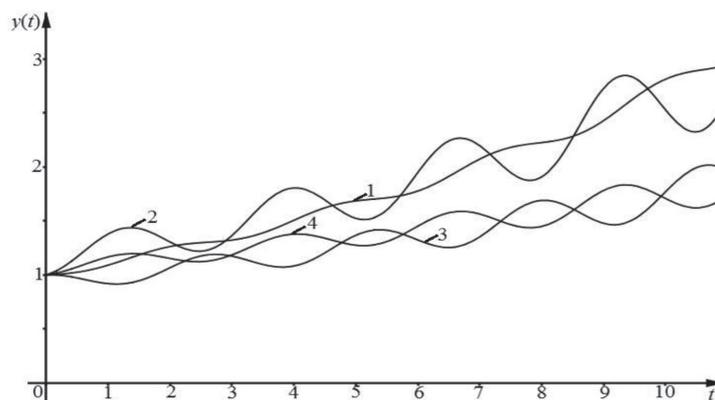


Рис. 3. Зависимость национального дохода Y от времени t при $r = 1/B$ с учетом временного лага:
 $1 - B = 5, r = 0,2, \tau = 0, 2 - B = 5, r = 0,2, \tau = 1, 3 - B = 5, r = 0,2, \tau = 3, 4 - B = 5, r = 0,2, \tau = 5$

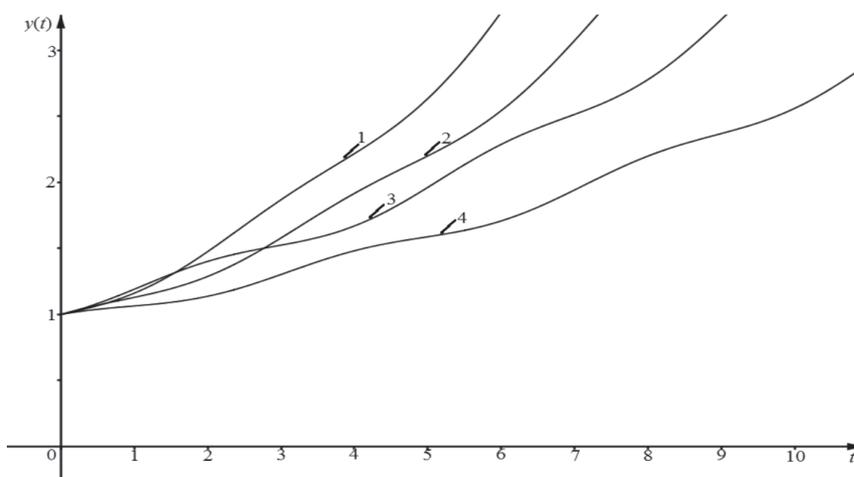


Рис. 4. Зависимость национального дохода Y от времени t при $r < 1/B$ с учетом временного лага:
 $1 - B = 5, r = 0,05, \tau = 0, 2 - B = 5, r = 0,05, \tau = 1, 3 - B = 5, r = 0,05, \tau = 3, 4 - B = 5, r = 0,05, \tau = 5$

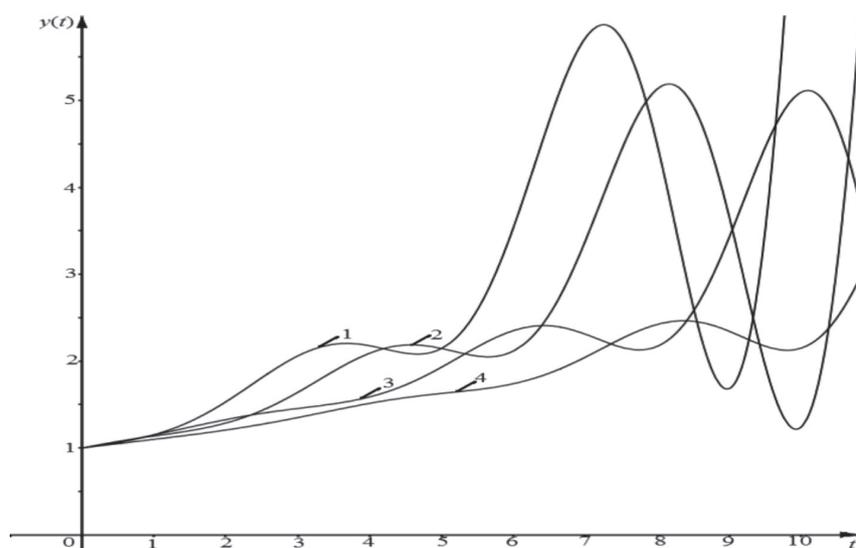


Рис. 5. Зависимость национального дохода Y от времени t при $r > 1/B$ с учетом временного лага:
 $1 - B = 5, r = 0,5, \tau = 0, 2 - B = 5, r = 0,5, \tau = 1, 3 - B = 5, r = 0,5, \tau = 3, 4 - B = 5, r = 0,5, \tau = 5$

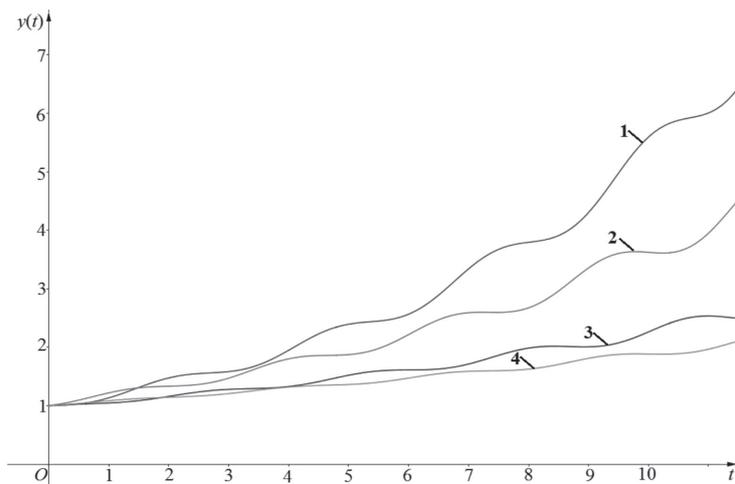


Рис. 6. Зависимость национального дохода Y от времени t при $r = 1/B$ с учетом временного лага:
 1 – $B = 3, r = 1/3, \tau = 0$, 2 – $B = 3, r = 1/3, \tau = 1$, 3 – $B = 3, r = 1/3, \tau = 3$, 4 – $B = 3, r = 1/3, \tau = 5$

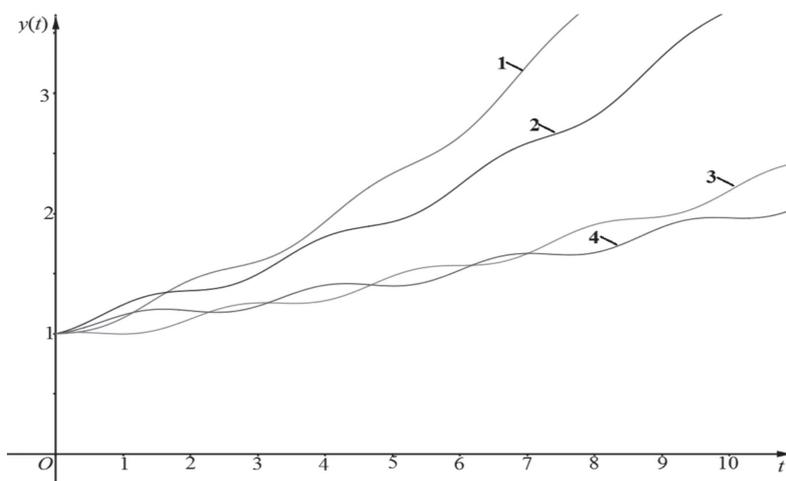


Рис. 7. Зависимость национального дохода Y от времени t при $r < 1/B$ с учетом временного лага:
 1 – $B = 3, r = 0,03, \tau = 0$, 2 – $B = 3, r = 0,03, \tau = 1$, 3 – $B = 3, r = 0,03, \tau = 3$, 4 – $B = 3, r = 0,03, \tau = 5$

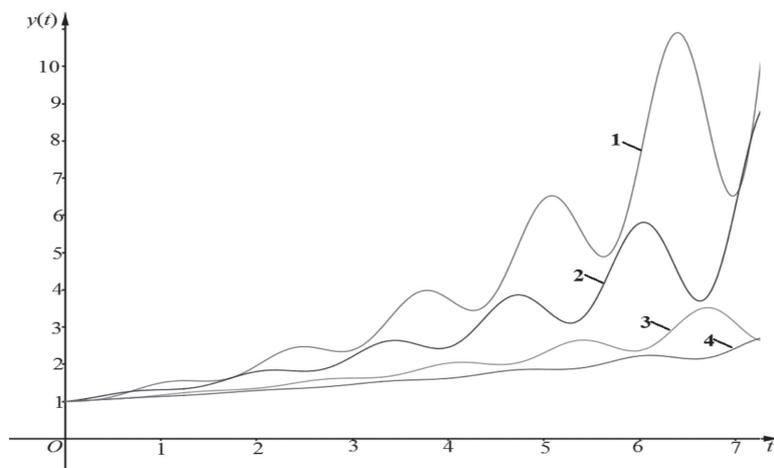


Рис. 8. Зависимость национального дохода Y от времени t при $r > 1/B$ с учетом временного лага:
 1 – $B = 3, r = 0,6, \tau = 0$, 2 – $B = 3, r = 0,6, \tau = 1$, 3 – $B = 3, r = 0,6, \tau = 3$, 4 – $B = 3, r = 0,6, \tau = 5$

Заключение

В работе с помощью решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом решена задача динамики изменения национального дохода в зависимости от времени в классической макроэкономической модели Калецкого с учетом инвестиционного временного лага в случае, когда в роли функции потребления выступает произведение экспоненты и периодической функции. Проведенный графический анализ на основе полученных аналитических результатов показывает, что учет временного лага влияет на характер динамики изменения национального дохода в зависимости от времени. Любопытно, что с возрастанием временного лага скорость возрастания национального дохода в зависимости от времени убывает.

Список литературы

1. Аллен Рой Дж.Д. Математическая экономия. Перевод с английского / Д.Дж. Рой Аллен. – М.: Иностранная литература, 1963. – 667 с.
2. Геворкян Э.А., Мартиросян А.Э. Макроэкономическая модель Калецкого с учетом инвестиционного временного лага // Научно-практический журнал «Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО». – 2015. – № 4. – С. 13–15.
3. Геворкян Э.А., Мартиросян А.Э. Учет инвестиционного временного лага в макроэкономической модели воспроизводства // Инновации и инвестиции. – 2016. – № 3. – С. 127–130.
4. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства / А.Г. Гранберг. – М.: Экономика, 1985. – 240 с.
5. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики / А.Г. Гранберг. – М.: Экономика, 1988. – 487 с.
6. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики / А.В. Прасолов. – СПб, Москва, Краснодар: Лань, 2008. – 352 с.
7. Симонов П.М. Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестник Пермского университета. Серия «Экономика». – 2014. – Вып. 1(20). – С. 14–27.