

УДК 531.133.1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ КРОЯ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Берестова С.А., Беляева З.В., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А., Рощева Т.А.

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», Екатеринбург, e-mail: belyaeva-zv@yandex.ru, mityushov-e@mail.ru

В работе рассмотрены задачи получения линий края на развертываемых поверхностях. Даются общие инвариантные алгоритмы построения кривых (линий края) на плоскости развертки, в которые трансформируются пространственные кривые, принадлежащие развертываемым поверхностям, полная (гауссова) кривизна которых равна нулю: конической, цилиндрической и торсовой. Развертки формообразующих элементов поверхностей построены при решении геометрических задач в векторном и матричном виде. Предложенные алгоритмы могут быть импортированы в существующие компьютерные математические и графические пакеты при создании соответствующих макросов. Сформулирована и доказана теорема об инвариантном методе поворота трехмерного евклидова пространства относительно оси произвольного направления и проходящей через произвольную точку пространства. Получено дифференциальное уравнение, описывающее кинематику изгибания пространственной кривой при развертывании поверхности ее содержащей.

Ключевые слова: цилиндрические, конические и торсовые поверхности, разворачиваемые поверхности, развертка поверхности, кинематика изгибания

MATHEMATICAL ALGORITHMS FOR DEVELOPABLE SPACE THIN-WALLED STRUCTURES PATTERN CUTTING

Berestova S.A., Belyaeva Z.V., Misyura N.E., Mityushov E.A., Roscheva T.A.

Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Eltsin, Ekaterinburg, e-mail: belyaeva-zv@yandex.ru, mityushov-e@mail.ru

This paper discusses general algorithms of some ruled surfaces elements development. Analytical algorithms of curves belonging to developable surfaces development are described. Surface elements developments are made by geometric problems solving in vector and matrix form. Algorithms for curve belonging to the conical surface with the apex position known and for curve belonging for cylindrical surface with ruling direction known are presented. The tangent developable surface edge of regression development algorithm is also considers. Proposed algorithms can be imported into existing computer mathematical and graphics software with appropriate macros. We formulated and proved the theorem about invariant rotation method of three-dimensional Euclidean space around to the axis of an arbitrary direction and passing through an arbitrary point of the space. General differential equation was obtained to describe kinematics of space curve bending in the process of surface development. The proposed algorithm is illustrated by example of circle on cylinder development.

Keywords: cylindrical surface, conical surface, tangent developable surface, developable surface, surface development, bending kinematics

Применение листовых материалов в машиностроении, судостроении и ракетостроении, а также в строительстве и швейном производстве связано с решением геометрических задач по построению формообразующих поверхностей [1] и разверток их элементов, что позволяет выполнять предварительно крой плоских заготовок с дальнейшим их изгибанием и стыковкой по линиям края. В большинстве случаев развертка элементов формообразующих поверхностей выполняется численными методами [4, 6–8]. Обзор некоторых частных аналитических и графических методов развертывания поверхностей можно найти в работе [2].

Линейчатые называются поверхности, образуемые совокупностью прямых, зависящих от одного параметра [3]. Линейчатую поверхность можно получить движением прямой (образующей) по некоторой линии (направляющей). Примерами линейчатых

поверхностей, в частности, являются цилиндры и конусы. Линейчатые поверхности подразделяются на развертываемые и косые. Как известно, развертываемые линейчатые поверхности могут быть посредством изгибания наложены на плоскость без складок и разрывов. Они характеризуются тем, что касательная плоскость в различных точках образующей в каждом ее положении неизменна. Известно также, что линейчатая поверхность тогда и только тогда является развертываемой, когда ее полная (гауссова) кривизна равна нулю [5]. Это эквивалентно условию

$$LN - M^2 = 0,$$

где L , M и N – коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности.

Этому условию удовлетворяют следующие поверхности, которые представим в параметрической форме:

$\vec{r} = \vec{r}_h(u) + v\vec{l}$ – цилиндрическая поверхность,
 $\vec{r} = (1-v)\vec{r}_h(u) + v\vec{r}_s$ – коническая поверхность,
 $\vec{r} = \vec{r}_h(u) + v\vec{\tau}(u)$ – поверхность касательных (торсовая поверхность).

Здесь $\vec{r}_h(u)$ – радиус-вектор точек направляющей кривой, \vec{l} – единичный вектор образующей цилиндрической поверхности, \vec{r}_s – радиус-вектор вершины конуса, $\vec{\tau}(u)$ – единичный вектор касательной к направляющей кривой.

В данной работе рассмотрены общие алгоритмы построения кривых (линий края) на плоскости развертки, в которые трансформируются кривые, принадлежащие перечисленным поверхностям. Эти алгоритмы могут быть легко импортированы в существующие компьютерные математические и графические пакеты при создании соответствующих функций пользователя. Получено также дифференциальное уравнение, описывающее кинематику изгибания пространственной кривой при развертывании поверхности ее содержащей.

Развертывание цилиндрических, конических и торсовых поверхностей

Пусть задана гладкая кривая $\vec{r}_h = \{x(u), y(u), z(u)\}$, ($u_1 \leq u \leq u_2$) на цилиндрической поверхности таким образом, что один из векторов координатного базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ совпадает с вектором \vec{l} и скалярное произведение $\vec{r}_h \cdot \vec{l}$ не меняет знак на всей области изменения параметра u . Для определенности положим $\vec{k} = \vec{l}$. Найдем уравнение той кривой, в которую трансформируется кривая $\vec{r}_h(u)$ при развертывании цилиндрической поверхности. Введем в рассмотрение декартову плоскость развертки (ξ, η) . Тогда одна из координат получаемой кривой определяется как проекция переменной длины заданной направляющей кривой на плоскость, перпендикулярную образующей цилиндрической поверхности, а другая совпадает с пространственной координатой z . То есть

$$\begin{cases} \xi = \int_{u_1}^u \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} du, \\ \eta = z(u), \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

Пусть задана гладкая кривая $\vec{r}_i = \{x(u), y(u), z(u)\}$, ($u_1 \leq u \leq u_2$) на конической поверхности. Преобразованную кривую, получаемую в результате развертывания конической поверхности, в дан-

ном случае удобнее искать в полярных координатах

$$\begin{cases} R = R(u), \\ \Psi = \Psi(u), \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

При этом элементарный полярный угол $d\Psi$ находим как отношение «приведенной» элементарной дуги $ds' = \sqrt{ds^2 - dR^2}$ к расстоянию R от произвольной точки кривой до вершины $\vec{r}_s = \{x_s, y_s, z_s\}$ конической поверхности

$$d\Psi = \frac{\sqrt{ds^2 - dR^2}}{R}$$

или

$$d\Psi = \frac{\sqrt{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2 \dot{r}_h^2 - ((\vec{r}_h - \vec{r}_s) \cdot \dot{r}_h)^2}}{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2} du.$$

Уравнения искомой кривой на развертке конической поверхности в параметрической форме принимают вид

$$\begin{cases} R = |\vec{r}_h - \vec{r}_s|, \\ \Psi = \int_{u_1}^u \frac{\sqrt{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2 \dot{r}_h^2 - ((\vec{r}_h - \vec{r}_s) \cdot \dot{r}_h)^2}}{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2} du, \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

Рассмотрим бигулярную направляющую кривую $\vec{r}_h = \vec{r}_h(u)$, ($u_1 \leq u \leq u_2$), являющуюся ребром возврата для поверхности касательных (торсовой поверхности). Найдем уравнения той кривой, которая получится из данной при развертывании поверхности касательных в плоскость. При этом воспользуемся тем, что инвариантами данного преобразования являются длина кривой $s(u)$ и ее кривизна $\kappa(u)$. С учетом определений кривизны плоских и пространственных кривых находим

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{|\dot{\vec{r}}_h(u) \times \ddot{\vec{r}}_h(u)|}{|\dot{\vec{r}}_h(u)|^3}$$

или

$$d\phi = \frac{|\dot{\vec{r}}_h(u) \times \ddot{\vec{r}}_h(u)|}{|\dot{\vec{r}}_h(u)|^3} ds = \frac{|\dot{\vec{r}}_h(u) \times \ddot{\vec{r}}_h(u)|}{|\dot{\vec{r}}_h(u)|^2} du.$$

Введем в рассмотрение плоскость развертки (ξ, η) , ось $O\xi$ которой направим по касательной к направляющей кривой в ее начальной точке. Тогда уравнения искомой

кривой на плоскости развертки в параметрической форме принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \int_{u_1}^u |\dot{\vec{r}}_n(\tau)| \cos \left(\int_{u_1}^{\tau} \frac{|\dot{\vec{r}}_n(u) \times \ddot{\vec{r}}_n(u)|}{|\dot{\vec{r}}_n(u)|^2} du \right) d\tau, \\ \eta &= \int_{u_1}^u |\dot{\vec{r}}_n(\tau)| \sin \left(\int_{u_1}^{\tau} \frac{|\dot{\vec{r}}_n(u) \times \ddot{\vec{r}}_n(u)|}{|\dot{\vec{r}}_n(u)|^2} du \right) d\tau, \end{aligned} \right.$$

$$u_1 \leq u \leq u_2.$$

Кинематика изгибания пространственной кривой при развертывании поверхности ее содержащей

Рассмотрим общий кинематический алгоритм нахождения кривой, в которую преобразуется заданная кривая, лежащая на поверхности при развертывании последней.

Пусть задан кусок регулярной пространственной кривой $\vec{r}_n = \{x(u), y(u), z(u)\}$, $0 \leq u \leq u^*$. Запишем общее уравнение линейчатой поверхности в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_n(u) + v\vec{l}(u),$$

где $\vec{l}(u)$ – единичный вектор образующей линейчатой поверхности.

Полагаем, что коэффициенты второй дифференциальной формы поверхности удовлетворяют условию $LN - M^2 = 0$, т.е. заданная линейчатая поверхность – развертываемая и $\vec{r}_n \times \vec{l} \neq 0$. Предварительно разобьем направляющую кривую $\vec{r}_n = \vec{r}_n(u)$ на n частей и заменим ее линейной интерполяцией. Представим алгоритм развертывания этой ломаной линии последовательностью поворотов вокруг осей, заданных единичными векторами $\vec{l}(u_1), \vec{l}(u_2), \dots, \vec{l}(u_{n-1})$, проходящих через точки разбиения $M(u_1), M(u_2), \dots, M(u_{n-1})$, на углы $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \dots, \Delta\phi_{n-1}$ между нормальными образующими граням (рис. 1).

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема. Преобразование поворота на угол ϕ вокруг оси, заданной единичным вектором \vec{l} и проходящей через точку M_1 , переводящее точку M в положение M' представимо матричным равенством

$$\hat{r}' = \hat{r} + (L^2(1 - \cos \phi) + L \sin \phi)(\hat{r} - \hat{r}_1),$$

где $\hat{r}, \hat{r}', \hat{r}_1$ – векторы-столбцы координат точек M, M' и M_1 , L – кососимметрическая матрица, определяющая положение оси вращения

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix}.$$

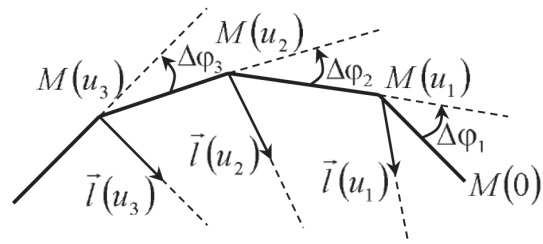


Рис. 1. Схема развертывания линейной интерполяции кривой на развертываемой поверхности

Доказательство.

Введем в рассмотрение ось вращения, заданную единичным направляющим вектором \vec{l} и проходящую через произвольную фиксированную точку M_1 . Пусть M – положение произвольной точки пространства до вращения, а M' – ее положение после вращения (рис. 2).

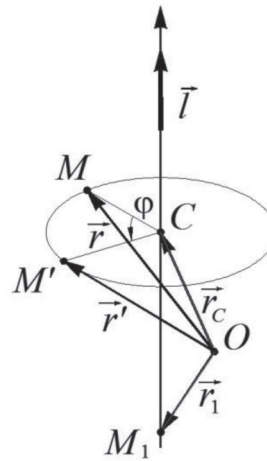


Рис. 2. Схема поворота точки вокруг оси

Рассмотрим точку C пересечения плоскости поворота и оси и представим вектор $\overline{CM'}$ разложением по единичным векторам

$$\frac{\overline{CM}}{|\overline{CM}|}, \frac{\vec{l} \times \overline{CM}}{|\vec{l} \times \overline{CM}|}.$$

С учетом равенства $|\overline{CM'}| = |\overline{CM}|$ имеем

$$\overline{CM'} = |\overline{CM}| \cos \phi \frac{\overline{CM}}{|\overline{CM}|} + |\overline{CM}| \sin \phi \frac{\vec{l} \times \overline{CM}}{|\vec{l} \times \overline{CM}|}$$

или

$$\overline{CM'} = \cos \phi \overline{CM} + \sin \phi \vec{l} \times \overline{CM}. \tag{1}$$

При этом

$$\overline{CM} = \vec{r} - \vec{r}_c, \quad \overline{CM'} = \vec{r}' - \vec{r}_c,$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \vec{r}_1 + \vec{l} \operatorname{Inp}_l (\vec{r} - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + ((\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{l}) \vec{l} = \\ &= \vec{r} + \vec{l} \times (\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)). \end{aligned}$$

Здесь использована формула вычисления двойного векторного произведения

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Тогда равенство (1) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + (1 - \cos \varphi) \vec{l} \times \\ &\times (\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)) + \sin \varphi \vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_1). \end{aligned}$$

Этому векторному равенству соответствует следующая матричная запись

$$\begin{aligned} \hat{r}^{(1)}(u_k) - \hat{r}(u_k) &= L(u_{k+1}) (\hat{r}(u_k) - \hat{r}(u_{k+1})) \Delta \varphi_{k+1}; \\ \hat{r}^{(2)}(u_k) - \hat{r}^{(1)}(u_k) &= L(u_{k+2}) (\hat{r}^{(1)}(u_k) - \hat{r}(u_{k+2})) \Delta \varphi_{k+2}; \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{r}^{(n-1-k)}(u_k) - \hat{r}^{(n-2-k)}(u_k) &= L(u_{k+(n-1-k)}) (\hat{r}^{(n-2-k)}(u_k) - \hat{r}(u_{k+(n-1-k)})) \Delta \varphi_{k+(n-1-k)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где верхний индекс в записи вектора-столбца $\hat{r}^{(j)}(u_k)$ соответствует номеру шага процедуры развертывания.

Увеличивая количество точек разбиения, дискретное преобразование (4) опишем как непрерывный процесс. Для этого введем в рассмотрение вектор $\hat{r}(t, u)$ фиксированной точки $M(u)$, ($0 \leq u \leq u^*$) кривой $\hat{r} = \hat{r}(u)$, лежащей на развертываемой поверхности, в положении, соответствующем накопленным поворотам при перемещении оси вращения вдоль кривой и определяемым переменной t , ($u \leq t \leq u^*$). Тогда

$$\begin{aligned} d\hat{r}(t, u) &= L(t) (\hat{r}(t, u) - \hat{r}(t)) d\varphi(t), \\ u &\leq t \leq u^*, \end{aligned} \quad (5)$$

при краевом условии

$$\hat{r}(t = u, u) = \hat{r}(u).$$

Отметим, что приращение $d\varphi$ угла поворота нормали к заданной развертываемой поверхности в произвольной точке направляющей кривой находится как проекция приращения единичного вектора нормали на касательную к линии кривизны и определяется равенством

$$d\varphi = \left[(\vec{l} \times \vec{n}) \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} du \right]_{v=0}$$

$$\hat{r}' = \hat{r} + (L^2 (1 - \cos \varphi) + L \sin \varphi) (\hat{r} - \hat{r}_1). \quad (2)$$

Теорема доказана.

В случае малого поворота равенство (2) приобретает вид:

$$\hat{r} - \hat{r}' = L(X - X_1) \Delta \varphi. \quad (3)$$

Для получения алгоритма развертывания регулярной пространственной кривой вместе с содержащей ее поверхностью воспользуемся равенством (3). Для любой точки $M(u_k)$ разбиения заданной направляющей кривой можно перейти от векторного представления к матричному $\vec{r}_n(u) \Leftrightarrow \hat{r}(u)$. Перемещения, которые происходят в результате соответствующих поворотов, с учетом равенства (3) описываются системой уравнений

или

$$\begin{aligned} d\varphi &= \left[\left(\vec{l} \times \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} \right) du \right]_{v=0} = \\ &= \left(\vec{l} \times \frac{\dot{\vec{r}}_n \times \vec{l}}{|\dot{\vec{r}}_n \times \vec{l}|} \right) \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{\vec{r}}_n \times \vec{l}}{|\dot{\vec{r}}_n \times \vec{l}|} \right) du. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (5) описывает движение произвольной точки $M(u)$ кривой $\hat{r} = \hat{r}(u)$, лежащей на заданной развертываемой поверхности, в процессе развертывания последней.

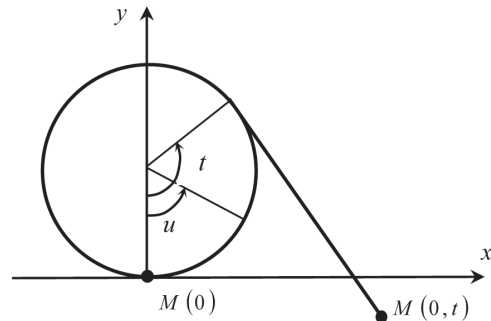


Рис. 3. Схема разворачивания кривой

Проиллюстрируем алгоритм разворачивания кривой на наглядном примере

окружности на цилиндре с образующей, параллельной оси Oz (рис. 3). Пусть окружность задана уравнением

$$\hat{r}(u) = \begin{pmatrix} \sin u \\ 1 - \cos u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{const}, \phi = t$$

и

$$\hat{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Записывая уравнение (5) для плоского случая, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(u,t) \\ y(u,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u,t) \\ y(u,t) \end{pmatrix} = \\ = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 1 - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} - x = -\sin t, \end{cases} \quad u \leq t \leq 2\pi.$$

Решив полученную систему уравнений при краевых условиях

$$\begin{aligned} x|_{t=u} &= \sin u, \\ y|_{t=u} &= 1 - \cos u, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} x &= \sin t - (t - u) \cos t; \\ y &= 1 - \cos t - (t - u) \sin t; \quad u \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения кривой в промежуточном состоянии ее разворачивания,

определяемого параметром t ($0 \leq t \leq 2\pi$), имеют вид

$$\begin{aligned} x(u) &= \begin{cases} \sin u, & u \geq t, \\ \sin t - (t - u) \cos t, & u \leq t, \end{cases} \\ y(u) &= \begin{cases} 1 - \cos u, & u \geq t, \\ 1 - \cos t - (t - u) \sin t, & u \leq t. \end{cases} \end{aligned}$$

Заключение

С помощью предложенных в работе алгоритмов построены линии края, в которые трансформируются кривые, принадлежащие конической, цилиндрической и торсовой поверхности.

В работе получена формула инвариантного поворота трехмерного евклидова пространства относительно оси произвольного направления и проходящей через произвольную точку пространства. Описана кинематика изгибания пространственной кривой при разворачивании поверхности ее содержащей. Предложенные методы и алгоритмы могут быть использованы при решении разнообразных задач создания пространственных конструкций в строительстве и промышленности, например при изготовлении натяжных тентовых и листовых пространственных конструкций.

Список литературы

1. Иванов В.Н. Конструкционные формы пространственных конструкций [Текст] / В.Н. Иванов, В.А. Романова. – М.: АСВ, 2016. – 416 с.
2. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности и оболочки [Текст] / С.Н. Кривошапко. – М.: Изд-во УДН, 1991. – 287 с.
3. Математический энциклопедический словарь [Текст] / гл. ред. Ю.В. Прохоров; ред. кол. С.И. Алян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич. – М.: Сов. Энциклопедия, 1988. – 847 с.: ил.
4. Попов Е.В. Построение разверток поверхностей одинарной и двойной кривизны [Текст] // Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика: Международный межвузовский сб. трудов кафедр графических дисциплин. – Н. Новгород: НГАСУ, 2000. – Вып. 5. – С. 272–276.
5. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия [Текст] / М.М. Постников. – М.: Наука, 1979. – 312 с.
6. Шалимов В.Н., Шалимова К.В. Алгоритм построения карт раскроя тентовых тканевых конструкций // Сборник научных трудов SWorld. – Иваново: Научный мир, 2010. – Т. 27, № 1. – С. 37–40.
7. Azariadis P. Design of plane developments of doubly curved surfaces / P. Azariadis, N. Aspragathos // Computer-Aided Design. – 1997. – Т. 29, № 10. – P. 675–685.
8. Guoxin Yu, Partikalakis N.M., Maekawa T. Optimal development of doubly curved surfaces // Computer Aided Geometrical Design. – 2000. – № 17. – P. 545–577.