

УДК 004.942

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МОДЕЛИ АРТЕРИАЛЬНОГО РУСЛА ДЛЯ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ ГЕМОДИНАМИКИ

Синдеев С.В., Фролов С.В.

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов,
e-mail: ssindeev@yandex.ru

Математическая модель артериального русла служит для объединения модели глобальной гемодинамики и модели локальной гемодинамики церебральной артерии. В отличие от модели глобальной гемодинамики, решение уравнений математической модели гемодинамики артериального русла сопряжено со значительными вычислительными трудностями. В работе предложен эффективный вычислительный метод решения уравнений математической модели гемодинамики артериального русла. Метод использует параллельную обработку данных и реализован с помощью технологии высокопроизводительных вычислений на графическом процессоре NVIDIA CUDA. На основе модельного примера было показано, что предложенный вычислительный метод является эффективным и позволяет сократить затраты машинного времени при расчете модели гемодинамики артериального русла в среднем в 10–12 раз по сравнению со временем расчета модели на центральном процессоре.

Ключевые слова: сердечно-сосудистая система, мозговое кровообращение, параллельные вычисления

PARALLEL METHOD FOR COMPUTING OF ARTERIAL TREE MODEL FOR MULTISCALE MODELING OF CEREBRAL HEMODYNAMICS

Sindeev S.V., Frolov S.V.

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Tambov State Technical University,
Tambov, e-mail: ssindeev@yandex.ru

Mathematical model of arterial tree is used for coupling of model of global hemodynamics with model of local hemodynamics of cerebral artery. In contradiction to model of global hemodynamics, a numerical solution of model of arterial tree requires a high computational cost. In the present work, an effective numerical method is proposed for solution of mathematical model of arterial tree. Method utilizes a parallel data processing and was implemented with usage of technology of high-performance computing on graphics processing unit NVIDIA CUDA. A model example showed that proposed numerical method is effective and allows to reduce a computation time for solving of mathematical model of arterial tree by 10–12 times in comparison with computation time for central processing unit.

Keywords: cardiovascular system, cerebral circulation, parallel computing

Математическая модель артериального русла служит для объединения модели глобальной гемодинамики (0D модель) и модели локальной гемодинамики церебральной артерии (3D) [1, 3, 5]. В разработанной модели гемодинамики артериального русла (1D модель) артерии большого круга кровообращения описываются совокупностью квазиодномерных артерий [3]. В отличие от модели глобальной гемодинамики [4], решение уравнений математической модели гемодинамики артериального русла сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Исходя из размерности задачи и требуемых вычислительных ресурсов, для расчета уравнений модели артериального русла перспективным является использование технологии высокопроизводительных вычислений NVIDIA CUDA. Технология предполагает расчет уравнений математической модели не на центральном процессоре, а на специальном графическом ускорителе или

видеокарте, поддерживающей технологию NVIDIA CUDA, что позволяет значительно увеличить скорость расчета уравнений математической модели гемодинамики [2].

Целью работы является разработка эффективного вычислительного метода решения уравнений математической модели гемодинамики артериального русла.

Материалы и методы исследования

Структура модели артериального русла подробно описана в [3]. В модели каждая артерия представляется совокупностью элементарных участков. Рассмотрим представление сосуда в модели артериального русла (рис. 1).

В квазиодномерном представлении i -ый сосуд длиной L_i разбивается на n_i элементарных участков длиной dl :

$$n_i = \frac{L_i}{dl}, \quad i \in [1, K], \quad (1)$$

где n_i – количество элементарных участков в i -ом сосуде; L_i – длина i -ого сосуда, см; dl – длина элементар-

ного участка сосуда, см; K – общее количество сосудов в квазидномерной модели артериального русла.

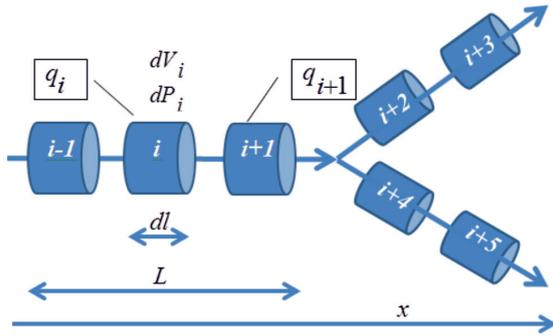


Рис. 1. Схематическое изображение бифуркации сосуда

Элементарный участок сосуда характеризуется элементарным объемом крови dV и давлением dP внутри него. Связь между i -ым и $i - 1$ -ым элементарными участками характеризуется объемным кровотоком $q_{i-1,i}$ между ними.

Для элементарного объема dV_i , согласно закону сохранения массы, можно записать

$$\frac{dV_i}{dt} = \sum_{\text{вх}} q_{\text{in},i} - \sum_{\text{вых}} q_{\text{out},i} \quad (2)$$

где $\sum_{\text{вх}} q_{\text{in},i}$ – сумма объемных кровотоков входящих в i -ый элементарный участок, см^3 ; $\sum_{\text{вых}} q_{\text{out},i}$ – сумма объемных кровотоков, выходящих из i -ого элементарного участка, см^3 .

Для давления dP_i в элементарном участке может быть принято допущение о линейной зависимости между элементарным объемом dV_i и давлением dP_i :

$$dP_i = e_i(dV_i - dU_i), \quad (3)$$

где dU_i – ненапряженный объем (стенки сосуда не растянуты) i -ого участка элементарного сосуда, см^3 ; e_i – эластичность стенки i -ого участка элементарного сосуда, $\text{см}^3/\text{Торр}$.

Для определения объемного кровотока q_i можно использовать закон Пуазейля:

$$q_i = \frac{\pi d_i^4}{128 \eta L_i} \Delta P_i, \quad (4)$$

где η – коэффициент динамической вязкости крови; d_i – диаметр i -ого элементарного участка сосуда, см.

При моделировании движения крови в аорте отдельно следует учесть, что течение крови в данном участке сердечно-сосудистой системы имеет значительное ускорение. Для учета инерционности крови уравнение (4) записывается в виде

$$J_i \frac{dq_i}{dt} + \frac{\pi d_i^4}{128 \eta L_i} \cdot q_i = \Delta P_i, \quad (5)$$

где J_i – инерционность крови, $\text{Торр} \cdot \text{с}^2 / \text{см}^3$.

Таким образом, используя уравнения (1)–(5) можно описать движение крови по одномерному артериальному руслу.

Результаты исследования и их обсуждение

Преобразуем систему уравнений (1)–(5) путем подстановки выражений для неизвестных величин:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= \left(\frac{P_{i-1} - P_i}{R_{i-1}} \right) - \left(\frac{P_i - P_{i+1}}{R_i} \right) = \\ &= \frac{R_{ii} (P_{i-1} - P) - R_{i-1} (P_i - P_{i+1})}{R_{i-1} R_i}, \end{aligned}$$

$$i \in [1, K].$$

Раскроем скобки и сгруппируем элементы:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &= \left[\frac{C_{i-1}}{R_{i-1}} V_{i-1} + \frac{(-R_i - R_{i-1}) C_i}{R_{i-1} R_i} V_i + \frac{C_{i+1}}{R_i} V_{i+1} \right] + \\ &+ \left[-\frac{C_{i-1} U_{i-1}}{R_{i-1}} + \frac{(R_i + R_{i-1}) C_i U_i}{R_{i-1} R_i} - \frac{C_{i+1} U_{i+1}}{R_i} \right]. \end{aligned}$$

Запишем полученное уравнение в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \mathbf{A}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{C_{i-1}}{R_{i-1}} & \frac{(-R_i - R_{i-1}) C_i}{R_{i-1} R_i} & \frac{C_{i+1}}{R_i} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_i^0 = \begin{bmatrix} V_{i-1}^0 \\ V_i^0 \\ V_{i+1}^0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\frac{C_{i-1} U_{i-1}}{R_{i-1}} + \frac{(R_i + R_{i-1}) C_i U_i}{R_{i-1} R_i} - \frac{C_{i+1} U_{i+1}}{R_i} \end{bmatrix}.$$

Распространяя представленный подход на совокупность элементарных участков выбранного сосуда, получим систему уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{C_{i-1}}{R_{i-1}} & \frac{(-R_i - R_{i-1})C_i}{R_{i-1}R_i} & \frac{C_{i+1}}{R_i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}(0) = \begin{bmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \\ V_3^0 \\ \dots \\ V_k^0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \frac{-C_{i-1}U_{i-1}}{R_{i-1}} + \frac{(R_i + R_{i-1})C_iU_i}{R_{i-1}R_i} - \frac{C_{i+1}U_{i+1}}{R_i} \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Для корректного описания модели гемодинамики артериального русла (1D модели) требуется задание соответствующих граничных условий на краевых участках артериальной системы. В разработанной модели неизвестными величинами на границах артериального русла являются q_{i-1} и P_{i+1} . Значения этих граничных условий могут быть получены при использовании разработанной ранее модели глобальной гемодинамики (0D модели). Таким образом, для входного участка артериального русла, при заданном значении q_0 , справедливо уравнение

$$\frac{dV_1}{dt} = \left[-\frac{C_1}{R_1}V_1 + \frac{C_2}{R_1}V_2 \right] + \left[\frac{C_1U_1 - C_2U_2}{R_1} + q_0 \right]. \quad (8)$$

Для выходного (терминального) участка артериального русла, при заданном значении P_{k+1} , справедливо уравнение

$$\frac{dV_k}{dt} = \left[\frac{C_{k-1}}{R_{k-1}}V_{k-1} + \frac{(-R_k - R_{k-1})C_k}{R_{k-1}R_k}V_k \right] + \left[-\frac{C_{k-1}U_{k-1}}{R_{k-1}} + \frac{(R_k + R_{k-1})C_kU_k}{R_{k-1}R_k} + \frac{P_{k+1}}{R_k} \right]. \quad (9)$$

Для элементарных участков сосуда, описывающих бифуркации (например, участок $i+1$ на рис. 1), обозначим x – первый участок первого сосуда после бифуркации; y – первый участок второго сосуда после бифуркации. Тогда для участка $I+1$ можно записать

$$\frac{dV_{i+1}}{dt} = \left[\frac{C_i}{R_i}V_i - C_{i+1} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) V_{i+1} + \frac{C_x}{R_x}V_x + \frac{C_y}{R_y}V_y \right] + \left[-\frac{C_i}{R_i}U_i + C_{i+1} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) U_{i+1} - \frac{C_x}{R_x}U_x - \frac{C_y}{R_y}U_y \right]. \quad (10)$$

Для модели гемодинамики артериального русла был разработан эффективный вычислительный метод решения уравнений модели (6)–(10), использующий параллельную обработку данных и реализованный с помощью технологии высокопроизводительных вычислений на графическом процессоре NVIDIA CUDA (рис. 2), включающий следующие этапы:

1. Ввод данных о длительности моделируемого периода времени, шагах дискретизации по времени и длине сосуда, структуре артериального русла и характеристиках артерий.

2. Разбиение артерий на элементарные участки и вычисление ненапряженного объема, сопротивления и эластичности каждого участка.

3. Формирование матрицы коэффициентов и векторов параметров. В качестве начальных условий для объема элементарного участка артериального русла используется значение его ненапряженного объема. Граничные условия на входе и выходе из артериального русла определяются в соответствии со значениями параметров глобальной гемодинамики.

4. На графическом процессоре предварительно выделяется память, необходимая для хранения расчетных данных, и производится копирование данных из RAM в GDRAM.

5. Для каждого временного шага производится параллельный расчет с использованием Θ вычислителей. Для этого матрица коэффициентов и векторы параметров разбиваются на подматрицы, для каждой из которых происходит обработка в параллельном режиме, определяется вектор объемов

элементарных участков и производится пересчет вектора сопротивлений элементарных участков.

6. Синхронизация всех вычислительных потоков для обеспечения целостности данных.

7. Определение новых значений элементов для матрицы коэффициентов и вектора параметров в соответствии с функциональным назначением элементарных участков.

8. Копирование вектора объемов элементарных участков из GDRAM в RAM и обработка результатов расчета.

9. Переход на следующий временной шаг. Процесс расчета повторяется, пока не будет смоделирован весь заданный период времени.

10. Сохранение значений в базе данных и вывод графиков изменения объема, объемного кровотока, давления и поперечного сечения выбранных элементарных участков сосудов артериальной системы.

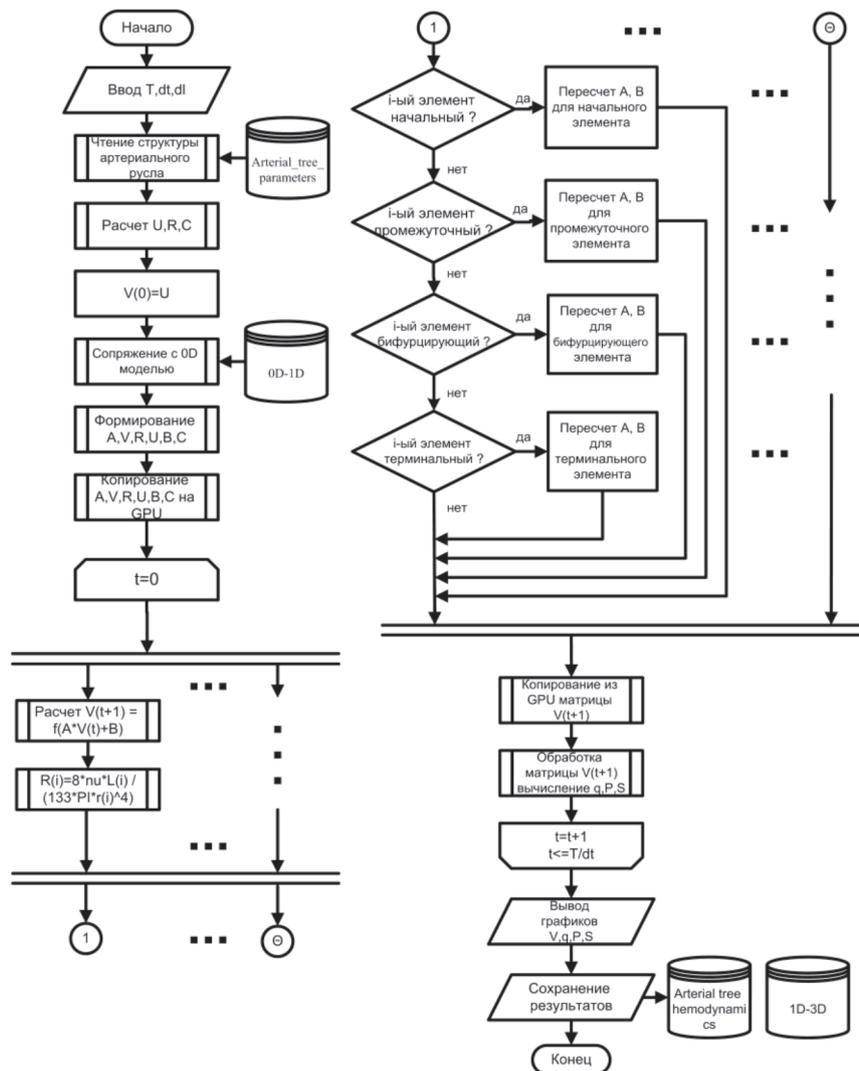


Рис. 2. Схема метода решения уравнений модели гемодинамики артериального русла

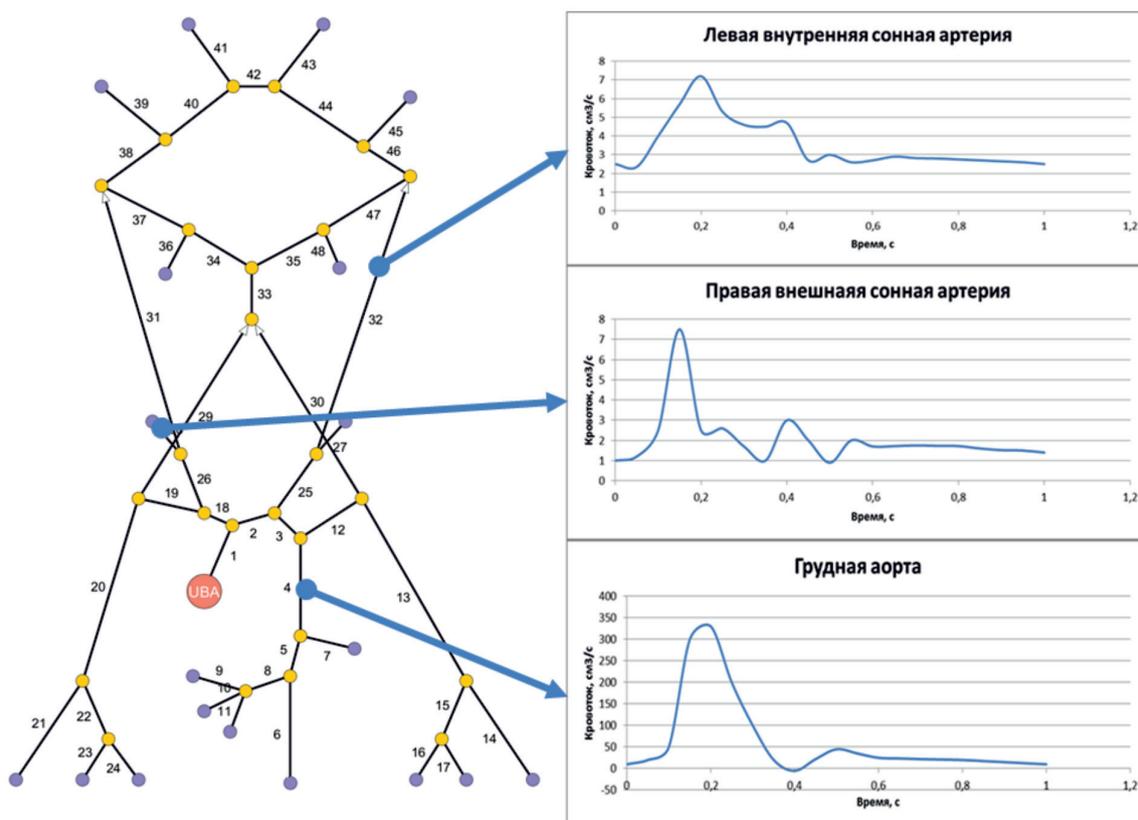


Рис. 3. Пример результатов расчета модели гемодинамики артериального русла

На языке программирования C++ разработано соответствующее программное обеспечение для расчета математической модели гемодинамики артериального русла (1D модель), использующее технологию высокопроизводительных вычислений NVIDIA CUDA. Запуск программного обеспечения осуществлялся на рабочей станции (HP Z640 E5-2620v3, 32GB DDR4-2133 (4x8GB), NVIDIA Quadro K4200 (4GB), 1TB SATA 7200 HDD). В качестве графического ускорителя использовался NVIDIA Quadro K4200.

Моделируемый период времени T составил 5 мин; шаг по длине сосуда $dl = 1 \cdot 10^{-4}$ м.; шаг по времени $dt = 1 \cdot 10^{-4}$ с. Выбранные шаги дискретизации обеспечивают сходимость разработанного метода. Пример результата расчета математической модели гемодинамики артериального русла приведен на рис. 3. Время расчета уравнений математической модели гемодинамики артериального русла при последовательной реализации предложенного вычислительного метода составило 4 часа 12 минут. Для проверки эффективности

разработанного вычислительного метода решения уравнений модели гемодинамики артериального русла, результаты расчета модели с использованием графического ускорителя были сравнены с результатами расчета модели с использованием центрального процессора. При использовании предложенного вычислительного метода, использующего технологию высокопроизводительных вычислений NVIDIA CUDA, время расчета уравнений математической модели гемодинамики артериального русла было существенно снижено и составило около 22 минут (ускорение приблизительно в 12 раз). Таким образом, можно заключить, что предложенный вычислительный метод решения уравнений математической модели гемодинамики артериального русла является эффективным и позволяет сократить затраты машинного времени при расчете модели гемодинамики артериального русла в среднем в 10–12 раз.

Заключение

Разработан и реализован эффективный вычислительный метод решения уравнений

модели гемодинамики артериального русла, отличающийся параллельной обработкой данных с использованием современной технологии высокопроизводительных вычислений NVIDIA CUDA.

Работа выполнена при финансовой поддержке DAAD (German Academic Exchange Service) по программе «Михаил Ломоносов» и в рамках госзадания по проекту № 18.706.2016/ДААД.

Список литературы

1. Синдеев С.В. Многомасштабное моделирование сердечно-сосудистой системы для оценки церебрального кро-

вообращения / С.В. Синдеев, С.В. Фролов // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 15–5. – С. 950–954.

2. *Computational Biomedicine* / P. Coveney, V. Diaz-Zuccharini, P. Hunter, M. Viceconti. – Oxford: Oxford University Press, 2014. – 296 p.

3. Development of multiscale hemodynamics model for research of basilar artery circulation / S.V. Frolov, S.V. Sindeev, V.A. Lischouk et al. // *Вопросы современной науки и практики*. Объединенный университет им. В.И. Вернадского. – 2013. – № 48(4). – С. 46–53.

4. Hemodynamics modeling of the cardiovascular system with a pulsating heart / S.V. Frolov, S.V. Sindeev, V.A. Lischouk, D.Sh. Gazizova // *Вестник ТГТУ*. – 2012. – № 18(3). – С. 546–551.

5. Formaggia L. *Cardiovascular Mathematics* / L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani. – Milan: Springer, 2009. – 522 p.