УДК 519.816

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НАСТУПЛЕНИЯ БУДУЩИХ СОБЫТИЙ

Мадера А.Г.

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук (НИИСИ РАН), Москва, e-mail: alexmadera@mail.ru

Разработан метод, позволяющий оценивать вероятности наступления прогнозируемых событий. Метод использует как априорные данные о прогнозировании релевантных событий за прошлые периоды, так и данные о наблюдаемых в настоящий момент времени событиях. По обоим видам данных формируются две матрицы, одна из которых характеризует погрешности прогнозирования, известные из прошлых периодов, другая – содержит уточненные оценки, полученные на основании новой информации, поступившей в настоящий момент времени. Произведение указанных матриц формирует полную матрицу погрешностей прогнозирования, присущих субъекту, в том числе и эксперту, при совершении прогнозов. Показано, что вектор вероятностей наступления прогнозируемых событий представляет собой собственный вектор полной матрицы погрешностей прогнозирования, отвечающий единичному собственному значению этой матрицы.

Ключевые слова: прогнозирование, принятие решений, вероятность события, погрешность прогнозирования, собственный вектор, собственное значение

FORECASTING THE PROBABILITIES OF OCCURRENCE OF FUTURE EVENTS

Madera A.G.

Scientific Research Institute of System Analysis of the Russia Academy of Sciences (SRISA RAS), Moscow, e-mail: alexmadera@mail.ru

In this paper, we developed a method to estimate the probability of occurrence of the forecasted events. The method uses a priori data about the prediction of relevant events in the past periods and data of observed events at present. For both types of data there are generated two matrices, one of which describes the prediction error known from previous periods, and the other contains detailed estimates obtained on the basis of new information at present. The product of these matrices forms a complete matrix of prediction errors, which characterizes the complete error of subject or the expert when making forecasts. It is shown that the vector of probabilities of occurrence of the forecasted events is the eigenvector of the full matrix prediction error, which is responsible to the unit eigenvalue of this matrix.

Keywords: forecasting, decision-making, the probability of events, the prediction error, eigenvector, eigenvalue

Неопределенный характер будущего обусловливает множественность будущих событий, результатов и последствий, которые наступят после принятия (или не принятия) субъектом данного решения и его реализации на практике. Каждое из событий, результатов и последствий может в будущем актуализироваться, однако, какое именно из них наступит в реальности, по какому пути пойдет развитие событий, *априори* неизвестно. Субъект не знает, к чему приведет принятое им решение, будет ли достигнута поставленная цель, особенно если получение результата ожидается в среднесрочной (несколько недель, месяцев) и долгосрочной перспективе (несколько лет). Неопределенность сценариев развития событий и актуализации будущих последствий и результатов является главным препятствием на пути принятия субъектом наилучшего решения [6, 8, 9]. Поэтому, прежде чем принять решение, субъекту необходимо провести прогнозирование достижения в неопределенном будущем поставленной цели и желаемого результата, а также вероятности их возможной актуализации.

Вместе с тем следует сознавать, что любой прогноз наступления будущих событий носит субъективный характер, поскольку выполняется субъектом (лицом, принимающим решение, экспертом, как индивидуальным, так и коллективным), способности которого к прогнозированию будущих событий и оценке вероятностей их наступления, весьма ограничены [3–6, 8]. И если субъект заинтересован в повышении степени актуализации запланированных результатов и достижении поставленных целей, то принимаемое решение должно опираться исключительно на научные методы прогнозирования и принятия решений [3, 5–10, 15–17], которые должны учитывать как актуальную информацию, поступающую в настоящий момент времени, так и данные, относящиеся к прогнозированию релевантных событий и их реализациям, имевшим место в прошлые периоды.

Существующие методы прогнозирования будущих событий и оценки вероятностей их наступления могут быть объединены в три группы. Методы первой группы основываются на допущении, что прошлое и будущее практически неразличимы между собой, так что тенденции, наблюдаемые в прошлом, сохраняют свой характер и в будущем. Это позволяет осуществлять прогнозирование, используя простую экстраполяцию тенденций, наблюдаемых в прошлом, на будущие периоды, при этом в качестве методов выявления тенденций за прошлые периоды выступают разнообразные регрессии, временные ряды, различные виды усреднений, скользящих средних, сглаживаний, и т.д. [2, 15]. Такая прогнозная концепция не адекватна реальности, поскольку пренебрегает неопределенностью будущего и его слабой предсказуемостью. Методы прогнозирования второй группы относятся, по преимуществу, к области финансовых и товарных рынков и используют *гипотезу о стохастическом характере* финансовых инструментов (курсов акций, валют, цен на сырье, энергоносители, недвижимость и пр.). Между тем данная гипотеза не подтверждается практикой [11, 12], и, более того, многочисленные исследования и факты показывают, что будущие курсы акций и валют, равно как и цены на различные виды сырья, – не являются случайными объектами, понимаемыми в смысле классической или статистической вероятностей, которые составляют предмет изучения в теории вероятностей. Так, в [11, 12] показано, что будущие цены невозможно предсказать по историческому временному ряду их изменения за прошлые периоды, причем предсказанные и наблюдаемые в реальности цены по всем видам сырья, курсам акций и валют, могут различаться между собой в несколько раз. Третья группа методов прогнозирования основывается на так называемом экспертном анализе [15], который применяется в тех случаях, когда релевантные данные по прогнозированию событий за прошлые периоды отсутствуют, или их количество недостаточно для проведения сколь-нибудь значимого анализа. При этом, как показано в [3], оценки экспертов носят субъективный характер, поскольку выполняются людьми (индивидами, или группами индивидов) и зачастую мало отличаются от оценок обычных субъектов, которые не позиционируются в качестве экспертов, иначе говоря, значимого различия между обоими видами оценок не выявляется.

Оценивание вероятностей наступления прогнозируемых событий осуществляется, как правило, одним из двух подходов – либо с использованием байесовского подхода, либо на основании гипотезы о применимости классической вероятностной модели.

Байесовский подход, основывается на следующей концепции: рассматриваются несовместные события A_1, A_2,…, A_n, образующие полную группу и именуемые гипотезами, относительно которых принято, что вероятности их наступления $p(A_j)$ *априори* известны. После проведения некоего опыта, в результате которого совместно с одним из событий A_i наступает другое событие B, определяются *апостериорные* вероятности $p(A_i|B)$, уточняющие *априорные* вероятности $p(A_j)$ и рассчитываемые по формуле Байеса

$$p\left(A_i|B\right)=p\left(A_i\right)p(B\mid A_i)\Big/\sum_{j=1}^{n}p\left(A_j\right)p(B\mid A_j),$$

при этом условные вероятности $p(B|A_j)$ также считаются известными *априори*. Если рассматриваются события, вероятностная модель которых может быть отнесена к типу «урны с шарами» [13], то *априорные* $p(A_j)$ и *апостериорные* $p(A_i|B)$ вероятности являются классическими и без труда вычисляются.

Между тем для различных сфер человеческой деятельности, в которых главным действующим лицом является человек (экономика, менеджмент, финансы и др.), вероятности наступления будущих событий $p(A_i)$, равно как и условные вероятности $p(B|A_j)$, не известны *априори* в принципе. Последние могут быть получены на основании статистических данных (при их наличии), относящихся к прогнозированию релевантных событий в прошлые периоды и в этом случае условные вероятности $p(B|A_j)$ могут трактоваться как *погрешности прогнозирования*.

Необходимо понимать, что неопределенность прогнозируемого субъектом будущего обусловлена воздействием огромного множества неопределенных факторов, носящих различную природу, необратимой и непредсказуемой изменчивостью окружающей среды, самого субъекта и процесса взаимодействия субъекта со средой, окружающим социумом и пр. [8]. Следовательно комплекс условий, при котором происходит то или иное событие, является невоспроизводимым, а само событие, происходящее в будущем, – уникальным и единичным, и поэтому будущие события не являются случайными объектами [8, 13]. В этом смысле вероятности прогнозируемых событий необходимо рассматривать как *субъективные вероятности*, значения которых определяются субъектом, исходящим из собственного понимания ситуации.

В статье развивается метод оценивания вероятностей $P\left(A\right)=\left(p\left(A_1\right),p(A_2),\ldots,p\left(A_n\right)\right)$ наступления прогнозируемых событий A_1, A_2,…, A_n, который позволяет существенно уменьшить степень субъективизма при прогнозировании и оценивании вероятностей будущих событий. Показывается, что вектор вероятностей $P(A)$ представляет собой *собственный вектор* полной матрицы погрешностей прогнозирования, отвечающий ее единичному собственному значению.

Оценивание вероятностей наступления прогнозируемых событий

Несмотря на то, что субъект не обладает способностью однозначно и с абсолютной точностью предсказывать какое именно событие наступит в будущем и какова будет вероятность его наступления, он тем не менее может попытаться построить множество событий, которые, по его мнению, произойдут в будущей реальности. Пусть субъект построил такое множество **A** с n возможными событиями A_1, A_2,…, $A_n \in \mathbf{A}$, называемыми далее *реальными событиями*, образующими полную группу и $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$, причем вероятности $p(A_1), p(A_2), \ldots, p(A_n)$ *априори* неизвестны и подлежат определению.

Субъект составляет свой прогноз о наступлении в будущем тех или иных реальных событий A_1, A_2,…, $A_n \in$ A на основании наблюдений над другими событиями B_1, B_2,…, $B_n \in \mathbf{B}$, которые по его мнению, позволяют осуществить наилучший прогноз. События B_1, B_2,…, $B_n \in \mathbf{B}$, называемые далее *прогнозирующими событиями*, также образуют полную группу и $\sum_{i=1}^{n} p(B_i) = 1$.

Поскольку никакое событие, наблюдаемое в прошлом или в настоящем, не может однозначно и абсолютно достоверно с вероятностью единица обусловливать наступление какого-либо реального события в будущем, то прогноз субъекта о наступлении того или иного реального события $A_j \in \mathbf{A}$ ($j = 1,2,\ldots,n$), основанный на наблюдении событий $B_i \in \mathbf{B}$, ($i = 1,2,\ldots,n$), не может быть достоверным в принципе. Поэтому событие $B_i \in \mathbf{B}$, ($i = 1,2,\ldots,n$), прогнозирующее (по мнению субъекта) наступление реального события $A_j \in \mathbf{A}$, может появиться совместно с любым из событий A_1, A_2,…, $A_n \in \mathbf{A}$, что можно записать как $B_i = \bigcup_k A_k$, то есть прогноз наступления в будущем реального события $A_j \in \mathbf{A}$ ($j = 1,2,\ldots,n$) по наблюдаемым событиям $B_i \in \mathbf{B}$, ($i = 1,2,\ldots,n$) всегда осуществляется с некоторой погрешностью.

Погрешность прогнозирования характеризуется двумя видами условных вероятностей $p(B_i|A_j)$ и $p(A_j|B_i)$, $i, j = 1,2,\ldots,n$:

- $p(B_i|A_j)$ – погрешность прогнозирования события из множества **A** на основании наступления прогнозирующего события B_i, в то время как на самом деле реализовалось событие A_j; она может быть определена по доступным статистическим данным прогнозирования релевантных событий в прошлые периоды, как относительное количество оправдавшихся и не оправдавшихся прогнозов;
- $p(A_j|B_i)$ – погрешность прогноза наступления реального события A_j, который дается субъектом на основании возможного наступления прогнозирующего события B_i в настоящий момент времени. Величина погрешности прогнозирования субъекта $p(A_j|B_i)$ отражает его субъективную убежденность в достоверности своего прогноза.

Располагая значениями погрешностей прогнозирования $p(B_i|A_j)$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, известных из прошлого опыта, получим по формуле полной вероятности систему n равенств, определяющих полные вероятности $p(B_i)$ наступления прогнозирующих событий B_i ($i = 1,2,\ldots,n$):

$$p(B_i) = \sum_{j=1}^{n} p(A_j)\, p(B_i|A_j). \qquad (1)$$

Введя вектор полных вероятностей прогнозирующих событий $P(B) = \left(p(B_1), p(B_2), \ldots, p(B_n)\right)^T$ ($(\cdot)^T$ – операция транспонирования), вектор искомых вероятностей прогнозируемых реальных событий $P(A) = \left(p(A_1), p(A_2), \ldots, p(A_n)\right)^T$, $n\times n$-матрицу погрешностей прогнозирования $L = \left\| p(B_i \mid A_j) \right\|$ релевантных событий в прошлые периоды:

$$L = \begin{pmatrix} p(B_1 \mid A_1) & \cdots & p(B_1 \mid A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(B_n \mid A_1) & \cdots & p(B_n \mid A_n) \end{pmatrix},$$

равенство (1) может быть записано в матричном виде:

$$P(B) = L \cdot P(A). \qquad (2)$$

Матрица L является стохастической, или марковской, векторы $P(A)$ и $P(B)$ – вероятностными, и обладают следующими свойствами [1, 2, 14]: (*a*) произведение стохастической матрицы на вероятностный вектор дает вероятностный вектор, (*b*) произведение двух стохастических матриц является стохастической матрицей, (*c*) максимальное собственное значение стохастической матрицы равно 1.

Вместе с тем, при прогнозировании событий и вероятностей их наступления, субъект ориентируется не только на данные о прогнозах релевантных событий, совершенных в прошлые периоды, но также и на новую информацию, следующую из наблюдений за событиями и тенденциями в настоящий момент времени. На основании полученной новой информации субъект строит прогноз о наступлении будущих реальных событий, основываясь на предположениях о возможном наступлении того или иного прогнозируемого реального события $A_j \in \mathbf{A}$ ($j = 1,2,\ldots,n$), при условии реализации прогнозирующих событий $B_i \in \mathbf{B}$ ($i = 1,2,\ldots,n$). С этой целью субъект оценивает условные вероятности $p(A_j|B_i)$ наступления реальных событий $A_j \in \mathbf{A}$ ($j = 1,2,\ldots,n$), при условии возможного наступления прогнозирующих событий $B_i \in \mathbf{B}$ ($i = 1,2,\ldots,n$) в настоящий момент времени. Величина условной вероятности $p(A_j|B_i)$, отражает, с одной стороны, степень убежденности субъекта в наступлении реальных событий $A_j \in \mathbf{A}$ ($j = 1,2,\ldots,n$) в случае, если наступит прогнозирующее событие $B_i \in \mathbf{B}$, а с другой – погрешность прогноза, которая в полной мере выявится лишь после реализации событий в будущем.

По формуле полной вероятности получаем систему n равенств определяющих вероятности $p(A_j)$ наступления реальных событий A_j ($j = 1,2,\ldots,n$):

$$p\left(A_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(B_i\right) p(A_j \mid B_i). \qquad (3)$$

Введя $n \times n$-матрицу $M = \left\| p\left(A_j \mid B_i\right) \right\|$ условных вероятностей $p(A_j|B_i)$, $i, j = 1,2,\ldots,n$,

$$M = \begin{pmatrix} p(A_1 \mid B_1) & \cdots & p(A_1 \mid B_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(A_n \mid B_1) & \cdots & p(A_n \mid B_n) \end{pmatrix},$$

систему уравнений (3) можно записть в матричном виде:

$$P\left(A\right) = M \cdot P\left(B\right). \qquad (4)$$

Матрица M, подобно матрице L, является стохастической и удовлетворяет условиям (a), (b) и (c), приведенным выше.

В соответствии с полученными результатами вероятности прогнозирующих $P(B)$ и прогнозируемых реальных событий $P(A)$, которые актуализируются в будущем, связаны между собой матричными равенствами (2) и (4). Подставляя в правую часть (4) вместо вектора $P(B)$ его выражение из равенства (2), получим уравнение для определения искомого вектора вероятностей прогнозируемых реальных событий $P(A)$:

$$P\left(A\right) = K \cdot P\left(A\right), \qquad (5)$$

где $K = M{\cdot}L$ – стохастическая $n \times n$-матрица (см. свойство (b)).

Из уравнения (5) следует, что искомый вектор вероятностей $P\left(A\right) = \left(p\left(A_1\right), p(A_2), \ldots, p\left(A_n\right)\right)^T$ наступления реальных событий $A_j \in \mathbf{A}$, $i = 1,2,\ldots,n$, представляет собой собственный вектор стохастической матрицы $K = M{\cdot}L$, соответствующий ее единичному собственному значению. Матрица $K = M{\cdot}L$ является полной матрицей погрешностей прогнозирования и исчерпывающим образом характеризует погрешности субъекта (эксперта) при составлении прогнозов. Искомый вектор вероятностей прогнозируемых событий $P(A)$ определяется из решения системы уравнений (5) совместно с дополнительным уравнением, описывающим условие нормировки $\sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right) = 1$.

Список литературы

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман; пер. с англ. – М.: Наука, 1969. – 376 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

3. Канеман Д. Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения / Д. Канеман, П. Словик, А. Тверски; пер. с англ. – Харьков: Гуманитарный центр, 2005. – 632 с.

4. Канеман Д. Думай медленно… решай быстро / Д. Канеман; пер. с англ. – М.: АСТ, 2014. – 654 с.

5. Мадера А.Г. Метод прогнозирования вероятностей актуализации последствий принятых решений в условиях неопределенности / А.Г. Мадера // Менеджмент в России и за рубежом. – 2012. – № 6. – С. 21–29.

6. Мадера А.Г. Риски и шансы: принятие решений в условиях неопределенного будущего / А.Г. Мадера // Менеджмент в России и за рубежом. – 2014. – № 2. – С. 12–21.

7. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте / А.Г. Мадера. – М.: Издательство ЛКИ, 2010. – 688 с.

8. Мадера А.Г. Риски и шансы: неопределенность, прогнозирование и оценка / А.Г. Мадера. – М.: КРАСАНД, 2014. – 448 с.

9. Мадера А.Г. Оценка кредитоспособности потенциального заемщика / А.Г. Мадера // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2013. – № 1. – С. 72–75.

10. Мадера А.Г. Метод определения вероятностей прогнозируемых событий при принятии решений / А.Г. Мадера // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2016. – № 2. – С. 38–45.

11. Мантенья Р.Н. Введение в эконофизику: Корреляция и сложность в финансах / Р.Н. Мантенья, Г.Ю. Стенли; пер. с англ. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 198 с.

12. Международная практика прогнозирования мировых цен на финансовых рынках (сырье, акции, курсы валют) / ред. Я.М. Миркин. – М.: Магистр, 2014. – 358 с.

13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей / В. Феллер. Т. 1; пер. с англ. – М.: Либроком, 2010. – 498 с.

14. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

15. Ханк Д.Э. Бизнес-прогнозирование / Д.Э. Ханк, А. Дж. Райтс, Д.У. Уичерн; пер. с англ. – М.: Вильямс, 2001. – 656 с.

16. Madera A.G. Simulation of stochastic heat conduction processes // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1994. – Vol. 37. № 16. – P. 2571–2577.

17. Madera A.G. Estimating the probability of forecasted events // International Journal of Accounting and Economics Studies. – 2016. – Vol. 4. № 1. – P. 76–80.