УДК 330.4:331

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

[1,2]Зайцева И.В., [3]Казначеева О.Х., [3]Ворохобина Я.В., [3]Попова М.В., [3,4]Тихонов Э.Е.

[1]ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, e-mail: zirinazirina2015@yandex.ru;

[2]Ставропольский филиал ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», Ставрополь;

[3]ГАОУ ВО «Невинномысский государственный гуманитарно-технический институт», Невинномысск;

[4]НЧОУ ВО «Невинномысский институт экономики, управления и права», Невинномысск

Любой социально-экономический процесс не обходится без человека и результатов его деятельности. В связи с этим особенно актуальным является изучение трудовой деятельности человека с целью ее управления. Движущей силой процесса перераспределения трудовых ресурсов является перенасыщенность рынка труда. Знание основных компонентов управляемого процесса перераспределения трудовых ресурсов, позволит значительно снизить издержки производства. Сущность процесса перераспределения трудовых ресурсов, на что или на кого он нацелен и его основные законы становятся предметом изучения, в том числе и экономико-математическими методами. В статье рассматривается математическая модель динамики процесса перераспределения трудовых ресурсов. Ставятся задачи оптимизации программы управления трудовыми ресурсами и другими параметрами. Предлагается один локальный метод градиентной оптимизации.

Ключевые слова: математическая модель, трудовые ресурсы, распределение, оптимизация, управление

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION OF MANAGEMENT OF PROCESS OF REDISTRIBUTION OF LABOR RESOURCES

[1,2]Zaytseva I.V., [3]Kaznacheeva O.Kh., [3]Vorokhobina Ya.V., [3]Popova M.V., [3,4]Tikhonov E.E.

[1]Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: zirinazirina2015@yandex.ru;

[2]Stavropol branch of the Moscow State Pedagogical University, Stavropol;

[3]Nevinnomyssk State Humanitarian Institute, Nevinnomyssk;

[4]Nevinnomyssky Institute of Economics, Management and Law, Nevinnomyssk

Any socio-economic process is not complete without a man and the results of its activities. In this regard, particularly relevant is the study of the labour activity with a view to its control. The driving force behind the reallocation of labor resources is the over-saturation of the labour market. Knowledge of the basic components of a controlled process of reallocation of labor resources will greatly reduce production costs. The essence of the process of redistribution of labor resources, on what or whom it targets, and its basic laws are becoming a subject of study, including economic-mathematical methods. The article considers the mathematical model of dynamics of process of redistribution of labor resources. The goals of optimization of the program management workforce, and other parameters. One proposes a local gradient optimization.

Keywords: mathematical model, of labour resources, distribution, optimization, management

Решение сложных проблем, связанных с управлением трудовыми ресурсами, соотнесено с разработкой новых теоретических и методологических подходов к построению системы управления, адекватного их свойствам, что требует создания соответствующих экономико-математических моделей управления и оптимизации, определения критериев качества переходных процессов, усовершенствованных законов управления и программной реализации разработанных моделей.

Существующие в настоящее время противоречия в сфере труда и занятости возникают из-за несовершенства хозяйственного механизма и системы управления трудом в целом и трудовыми ресурсами в частности, а в результате возникает целый ряд новых проблем в области его формирования и использования [3].

Возникает необходимость эффективного использования трудовых ресурсов, одним из основных компонентов которого является механизм управления. Управление трудовыми ресурсами в соответствии с целями социально-экономического развития должно систематически объединять субъект и объект управления, отражать целостность их движения.

Динамическая модель перераспределения трудовых ресурсов

Рассмотрим процесс перераспределения трудовых ресурсов. Движущей силой такого процесса является перенасыщенность рынка труда. Для количественного описания процесса выделения трудовых ресурсов определенной квалификации, рассмотрим это явление в «условном объеме» общего количества трудовых ресурсов, отнесенного к некоторой точке x рабочего пространства (рынка труда) и к промежутку времени $[t, t + \Delta t]$.

Пусть в этом объеме находится N трудовых ресурсов определенной квалификации, каждый массой $m_K = m_K(t)$, $k = 1, \overline{N}$ и межресурсный состав массой $M = M(t)$. Состав межресурсного состава характеризуется долей $B = B(t)$ – трудовых ресурсов разной квалификации и долей квалификации $\tau = \tau(t)$ в них (доброкачественность межресурсного состава). Величины B и τ будем понимать именно как доли (а не процентное содержание), так что масса межресурсного состава – M_{CB} и масса квалифицированного состава в M_S выразятся соответственно:

$$M_{CB} = MB, M_S = M_{CB}\tau = MB\tau. \qquad (1)$$

Потребность в трудовых ресурсах и их качественный рост зависят прежде всего от коэффициента пересыщения

$$\Pi = \frac{H}{H_0} = \frac{M_S}{(1-B)MH_0}, \qquad (2)$$

где H – коэффициент трудовых ресурсов, приходящийся на единицу массы рынка труда в межресурсном составе, H_0 – коэффициент потребности в трудовых ресурсах, зависящий от величины $T(\tau)$.

Эмпирическая зависимость будет иметь вид

$$H_0 = H_0(\mathrm{T},\tau) = 3{,}33 + 0{,}18\mathrm{T} -$$
$$-0{,}14\mathrm{T}\tau - 18{,}8\tau + 16{,}75\tau^2. \qquad (3)$$

При значениях $\Pi \geq 1{,}2$ происходит перераспределение трудовых ресурсов.

Далее будем рассматривать процесс перераспределения трудовых ресурсов при $\Pi \in [1{,}05,\ 1{,}10]$, когда перераспределения трудовых ресурсов практически не происходит, но идет эффективный рост квалификации трудовых ресурсов. При этом прирост Δm_k массы каждого ресурса k пропорционален площади поверхности его F_k, времени перераспределения трудовых ресурсов Δt и выражается формулой (закон Фика):

$$\Delta m_k = K_v \frac{T(\Pi - 1)}{\eta} F_k \Delta t = vF_k\Delta t, \qquad (4)$$

где K_v – коэффициент скорости перераспределения трудовых ресурсов, η – плотность рынка труда. Далее имеем

$$K_v = -550 + 1050\tau +$$
$$+245000\tau(\Pi - 1)^2 + 1910^4(\Pi - 1)^2, \qquad (5)$$

$$\eta = \left(a_0 + a_1 T + a_2 T^2\right) A^{10(\Pi-1)}, \qquad (6)$$

$$a_0 = 130{,}12 - 250\tau + 122\tau^2,$$

$$a_1 = \left(272{,}7 + 505{,}8\tau - 273\tau^2\right)10^{-2},$$

$$a_2 = \left(18{,}6 - 33\tau + 14{,}8\tau^2\right)10^{-3},$$

$$A = 0{,}525(1-\tau)\tau^{-1} + 1{,}65.$$

Величина $\upsilon = K_v T(\Pi - 1)/\eta$ в формуле (4) называется скоростью перераспределения трудовых ресурсов. Воспользуемся в (4) связью между массой и площадью поверхности рынка труда:

$$F_K = 4{,}12\sqrt[3]{m_k^2}. \qquad (7)$$

Поделив равенство (4) на Δt и перейдя к пределу при Δt, получим с учетом (7) дифференциальное уравнение изменения массы трудовых ресурсов определенной квалификации

$$\frac{dm_k}{dt} = K_v \frac{T(\Pi - 1)}{\eta} 4{,}12\sqrt[3]{m_k^2}. \qquad (8)$$

Пусть $M_z = M_z(t) = \sum_{k=1}^{N} m_k(t)$ – масса трудовых ресурсов определенной квалификации на рынке труда. В соответствии с этим прирост ΔM_z массы M_z за время Δt будет равен

$$\Delta M_z = \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k = 4{,}12v\left(\sum_{k=1}^{N} \sqrt[3]{m_k^2}\right)\Delta t.$$

Если считать, что массы всех ресурсов одинаковы, то отсюда предельным переходом по $\Delta t \to 0$, найдем

$$M_z = 4{,}12vN\sqrt[3]{M_z^2 N^{-2}}. \qquad (9)$$

Пусть b_i и τ_i – соответственно качественные характеристики трудовых ресурсов и качественные характеристики, а $u = u(t)$ – скорость их формирования в рассматриваемом межресурсном составе, т.е. $\Delta Q = u\Delta t$ – качественные характеристики за время Δt. За это же время удалено $W\Delta t$ ресурсов из рынка труда. Таким образом, за время с момента t изменение состава M, B, τ межресурсного состава выразится с учетом (1) формулами

$$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t) =$$
$$= u\Delta t - \Delta M_z - w\Delta t - M(t),$$

$$\Delta B = B(t + \Delta t) - B(t) =$$
$$= \left(MB + ub_i\Delta t - \Delta M_z\right)\left(M + \Delta M\right)^{-1} - B(t),$$

$$\Delta\tau = \tau(t + \Delta t) - \tau(t) =$$
$$= \left(MB\tau + ub_i\tau_i\Delta t - \Delta M_z\right)\left(MB + \Delta B\right)^{-1} - \tau(t).$$

Поделив эти соотношения на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$M = u + W - Mz, \quad (10)$$

$$B = \left(ub_i - M_z - BM\right)M^{-1}, \quad (11)$$

$$\tau = \left(ub_i\tau_i - M_z - \tau B\right)(MB)^{-1}. \quad (12)$$

Итак, решение системы (9)–(12) однозначно динамике процесса перераспределения трудовых ресурсов в «условном объеме», если задать начальное состояние – $M_z(t_0), M(t_0), B(t_0), \tau(t_0)$, выходной поток – функцию $u(t)$ – скорость перераспределения трудовых ресурсов с параметрами $b_i(t)$, $\tau_i(t)$ и скорость перераспределения трудовых ресурсов W, которая выражается формулой

$$W = K_w F_w\left(T_w - T\right), \quad (13)$$

где F_w – объем рынка труда (в «условном объеме»), T_w – степень перераспределения, K_w – коэффициент квалификации:

$$K_w = 219\left(\frac{1-B}{1{,}18-B}\right)^2\left(\frac{760-P}{736}\right)^{0{,}84}\left(T_w - T\right), \quad (14)$$

P – плотность рынка труда. Понятно, что рассматриваемая модель процесса перераспределения трудовых ресурсов существенно нелинейна в силу (2)–(6), (13), (14).

Отразим наиболее существенные ограничения на процессе перераспределения трудовых ресурсов [4]:

а) рабочее пространство рынка труда ограничено заданным объемом $\overline{V}$. Будем рассматривать рынок труда периодического действия и считать процесс перераспределения трудовых ресурсов однородным по всему рабочему пространству рынка труда и описываемым системой (9)–(12). Тогда объем $V(t)$, занимаемый трудовыми ресурсами и межресурсным составом, определится удельными весами p_z – трудовых ресурсов, p_s – квалификацией, p_H – нетрудовых ресурсов, p_w – количественных характеристик при данной степени перераспределения T и плотности рынка труда. Очевидно,

$$V(t) = \frac{M_z}{p_z} + \frac{MB\tau}{p_s} + \frac{MB(1-z)}{p_H} + \frac{M(1-B)}{p_w}. \quad (15)$$

Таким образом, ограничение на объем выражается неравенством

$$V(t) \le \overline{V}\ ; \quad (16)$$

б) изменяющиеся поверхности рынка труда должны быть покрыты ресурсами:

$$\underline{V} \le V(t). \quad (17)$$

в) размер (масса) трудовых ресурсов не превосходит заданного:

$$m_k(t) \le \overline{m}. \quad (18)$$

г) ограничения на степень перераспределения

$$\tau(t) \le \overline{\tau}, (1-P)M(M+M_z)^{-1} \ge \gamma > 0. \quad (19)$$

д) коэффициент пресыщения лежит в зоне:

$$1{,}05 \le \Pi \le 1. \quad (20)$$

Нарушение каждого из условий (16)–(20) по существу означает окончание процесса перераспределения трудовых ресурсов. Если нарушение условий (16) и (15) означает «аварию», то достижение равенств (18) или (19) при $V(t) = V$ означает готовность перераспределения трудовых ресурсов на следующем уровне. Таким образом, определенный момент $t = \overline{t}$, будем считать окончанием процесса перераспределения трудовых ресурсов на рынке труда [4–6].

В модели (9)–(12) управляющими параметрами можно считать: скорость входного потока $u(t)$ и его состав $b_i(t)$, $\tau_i(t)$, степень перераспределения T межресурсного состава, а также N – трудовых ресурсов. Набор этих параметров сведем их в вектор $u = (u(t), b_i(t), \tau_i(t), T(t), N, P)$ назовем управлением. Управление назовем допустимым, если решение системы (9)–(12), соответствующее ему существует на некотором интервале $\left[t_0, \overline{t}\right]$ при выполнении ограничений (16)–(19). Здесь числа $t_0, \overline{t}$ – начало и конец процесса перераспределения трудовых ресурсов. Конец процесса $\overline{t} = t(u)$ может быть определен как выше или другим способом, в частности можно считать, что $\overline{t} - \tau_0 = \tau$ заданная продолжительность процесса.

Класс управлений U обозначим через V. Это означает, что составляющие вектор-функций $U = U(t) = (u, i, \tau_i, T, N, P)$ непрерывны и стеснены дополнительными ограничениями. Например,

$$u^- \le u(t) \le u^+, \quad (21)$$

$$b_i(t) \in \left[b_i^-, b_i^+\right], \tau_i(t) \in \left[\tau_i^-, \tau_i^+\right],$$
$$T(t) \in [T_-, T_+], p \in [p_-, p_+]. \quad (22)$$

Здесь величины $b_i^-, b_i^+, \tau_i^-, \tau_i^+, T_-, T_+, p_-, p_+$ – заданные константы. Возможны ограничения на характер изменения функций управления.

Рассмотрим несколько критериев управляемости процесса перераспределения трудовых ресурсов. Пусть $t_0 = 0$ и процесс перераспределения трудовых ресурсов заканчивается в момент $\bar{t} = t(u)$, определенный равенством

$$m_k(\bar{t}) = \bar{m}. \quad (23)$$

Методы программной оптимизации

Поставленные выше задачи 1–3 при фиксированных начальных условиях в уравнениях (9)–(12) относятся к известному классу вариационных задач с фазовыми ограничениями (16)–(20) и поточечными ограничениями на уравнения (21), (22). Необходимые условия экстремума решения таких задач – оптимальных программ – выражаются уравнениями Эйлера – Лагранжа или принципом максимума Л.С. Понтрягина [7]. Построение и решение соответствующей этим условиям граничной задачи затруднено как нелинейностью модели, так и фазовыми ограничениями (16)–(20). Последние нередко заменяют штрафной добавкой в функционал задачи и затем организуют прямой метод спуска в классе управлений. Другие методы базируются на идее проектирования градиента [1, 2]. Рассмотрим такой пример, управляя только скоростью подкачки $u(t)$, т.е. в ограничениях (23) $b_i^- = b_i^+, \tau_i^- = \tau_i^+, T_- = T_+, p_- = p_+$ – перераспределение идет при постоянном составе входных ресурсов, постоянной степени перераспределения и плотности рынка труда.

Пусть $\bar{u}(t)$ – некоторое управление (программа скорости изменения характеристик). Рассмотрим соответствующую траекторию системы (9)–(12)

$$\overline{M_z}(t), \bar{M}(t), \bar{B}(t), \bar{\tau}(t) = Y(t) = \\ = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$$

на промежутке $t \in [0, \bar{t}]$, где $\bar{t}$ определено как первый момент достижения одного из равенств в фазовых ограничениях (16)–(20). Для удобства изложения запишем эти ограничения в виде

$$\varphi_j(y(t)) \le 0, t \in [0, \bar{t}\,], j = \overline{1,5}. \quad (24)$$

Таким образом, число $\bar{t}$ удовлетворяет одному или нескольким равенствам

$$\varphi_j(y(\bar{t}\,)) = 0, j = J(\bar{u}). \quad (25)$$

Возьмем допустимое направление $q(t)$, так что при малых $\mu \in [0,1]$ не нарушается ограничения (21): $u \le \bar{u}(t) + \mu q(t) \le u^+$. Построим первые вариации величин φ_j из (25) и выберем $q(t)$ из условий:

$$\delta y_1(\bar{t}\,) + y_1(t)\delta t \ge \varepsilon_0 \;, -\left(\frac{\partial \varphi_j(y(\bar{t}\,))}{\tau y}, \delta y(\bar{t}\,) + y(\bar{t}\,)\delta t \right) \ge \varepsilon_{jx} j \in \pi\bar{u}). \quad (26)$$

Здесь $\varepsilon_j > 0$ – произвольные, но достаточно малые числа, а $\delta y(t)$ – первая вариация траектории системы (9)–(12). Если решение ($q(t)$, δt) неравенств (19) существует, то существует лучшее по сравнению с $\bar{u}(t)$ управление, а именно, при малых $\mu > 0$ управление $u_\mu(t) = \bar{u}(t) + \mu q(t)$ на промежутке $[0, \bar{t} + \mu\delta t]$ удовлетворяет всем ограничениям (24).

Выводы

Предложенный формальный метод требует регуляризации, которая обусловлена главным образом тем, что управление u входит линейно в систему (10)–(12) при ограничениях (21), в то время как в практике перераспределения трудовых ресурсов известно наличие внутреннего экстремума [8]. Следовательно, оптимальный режим в задаче будет обычным и его классический анализ затронет исследование вариации высших порядков при указанных связях (2), (3), (5), (6), (15)–(20). Это обстоятельство, быть может, потребует учета потери трудовых ресурсов, т.е. уточнения модели (9)–(12).

Список литературы

1. Зайцева И.В. Математическая модель оптимального распределения трудового потенциала региона по отраслям экономики [Текст] / И.В. Зайцева, Е.А. Семенчин, В.А. Гимбицкий // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 8–2. – С. 413–416.

2. Зайцева И.В. Решение задачи оптимального управления математической моделью сложной экономической системы [Текст] / И.В. Зайцева // Наука. Инновации. Технологии. – 2010. – № 5. – С. 16–21.

3. Зайцева И.В. Системный подход как теоретическая основа исследования структуры трудового потенциала [Текст] / И.В. Зайцева, М.В. Попова, О.Х. Казначеева, Э.Е. Тихонов // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 5–1. – С. 190–194.

4. Колокольцов В.Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (теория игр для всех) [Текст] / В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев. СПб.: СПбГУ, 2012. – 315 с.

5. Колокольцов В.Н., Малафеев О.А. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть II) [Текст] / В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 1. – С. 134–145.

6. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болдянский, Р.В. Гаикрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.

7. Парфенов А.П. Равновесное и компромиссное управление в сетевых моделях многоагентного взаимодействия [Текст] / А.П. Парфенов, О.А. Малафеев // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2007. – № 39. – С. 154–167.

8. Malafeyev O.A., Neverova E.G., Nemnyugin S.A. and Alferov G.V. Multi-criteria model of laser radiation control. 2nd International Conference on Emission Electronics (ICEE), Saint Petersburg state University, 2014, P. 33–37.