

УДК 519.711

НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ В УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИКЕ МНОГОТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Полянина А.С.

Камышинский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», Камышин, e-mail: A.S.Churzina@mail.ru

В статье рассматривается случай управляемого движения многотельных систем. Действия управляющих сил в уравнениях движения заменяются уравнениями неголономных связей с заданными программными траекториями. Управление системой сводится к перемещению ее точек по заданным траекториям. Нахождение параметров управления для получения заданного движения одной или нескольких точек механической системы является актуальной задачей в робототехнике. Для реализации заданного закона перемещения в основном используют метод обратной задачи. Решение обратной задачи получается из системы дифференциально-алгебраических уравнений. В качестве примера в статье рассматривается задача обеспечения устойчивого движения системы управления. При несогласованных начальных условиях возникает возмущение движения, что может приводить к неустойчивости численного интегрирования системы. Предлагается несколько способов получения параметрической устойчивости ее решения. Численное моделирование иллюстрирует основные результаты работы.

Ключевые слова: многотельная система, неголономные связи, управление, устойчивость

NONHOLONOMIC CONSTRAINTS IN CONTROLLED DYNAMICS OF MANY-BODY SYSTEMS

Polyanina A.S.

*Kamyshin Technological Institute (branch of) State Educational Institution of Higher Education
Volgograd State Technical University, Kamyshin, e-mail: A.S.Churzina@mail.ru*

In article the case of the controlled motion of many-body systems is considered. The effect of control forces in equations of motion is replaced by the equations of nonholonomic constraints with given program trajectories. Controlling the system is reduced to moving its points along given trajectories. Finding control parameters for obtaining a given motion of one or more points of a mechanical system is an actual task in robotics. To implement the given principle of motion, the inverse problem method is mainly used. The solution of the inverse problem is obtained from the system of differential-algebraic equations. As an example in the article, the problem of ensuring a stable motion of a control system is considered. Under uncoordinated initial conditions there is displacement of the motion that can result in instability of numerical integration of system. Several methods for obtaining the parametric stability of its solution are offered. Numerical modeling illustrates the main results of work.

Keywords: many-body system, nonholonomic constraints, control, stability

В современных численных методах анализа динамики многотельных систем широко используется запись уравнений в форме уравнений Лагранжа I рода с неопределенными множителями [1]. С помощью уравнений такого типа решается широкий класс задач неуправляемого и управляемого движения связанной системы тел.

В робототехнике [2] при решении задач синтеза управляемого движения использование уравнений Лагранжа I рода ведет к необходимости задания программных траекторий отдельных точек системы. В работе [3] рассматривается методика встраивания в систему управления программными движениями звеньев роботов генератора устойчивых траекторий. Предложенная система управления включает в себя управляемую подсистему, уравнения генератора программных траекторий по форме, близких к прямоугольной, и уравнения голономных связей. Выбор таких траекторий был обусловлен особенностями движения схва-

та работа. В работах [4–6] рассматриваются генераторы автоколебательного типа, которые позволяют обеспечить устойчивость движения управляемой подсистемы по заданным траекториям.

В данной работе конструируется система управления, в которой связи генератора траекторий с объектом управления являются неголономными [7]. Приведен пример системы управления с таким типом связей и получены условия устойчивости ее решения.

Математическая модель динамики системы тел

Рассмотрим динамику многотельных систем в форме уравнений Лагранжа I рода:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \Phi_{\mathbf{x}}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор обобщенных координат всей системы, \mathbf{M} – матрица

инерции, \mathbf{p} – вектор множителей Лагранжа, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ – вектор внешних, внутренних сил системы, Φ – вектор геометрических связей, Φ_x^T – матрица переменных коэффициентов связей точек. Уравнения в форме (1) не всегда удобно использовать для численного интегрирования, поэтому второе уравнение системы часто дифференцируют два раза, после чего система принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{D} = \Phi_{x\dot{x}}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – вектор правых частей уравнений связей после двукратного дифференцирования. Если движение управляемое, то система (2) дополняется вектором управления $\mathbf{u}(t)$ и записывается в следующей форме

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}). \end{cases}$$

Таким образом, уравнения динамики включают в себя уравнения свободного движения тел и уравнения от геометрических связей; $\mathbf{u}(t)$ – вектор управляющих сил, действующих на систему.

Действие управляющих сил $\mathbf{u}(t)$ в уравнениях движения можно заменить уравнениями связей с заданными траекториями движения. Управление системой сводится

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} + \mathbf{p}^{*T} (\Phi_{x\dot{x}}^T)_{x\dot{x}} & \Phi_{x\dot{x}}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{x\dot{x}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{D}^T \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}}^* \\ \dot{\mathbf{p}}^* \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Условия параметрической устойчивости системы управляемого движения

В качестве примера рассмотрим систему управляемого движения массы m : уравнения (3) будут иметь вид

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 = Q, \\ x_1 - \dot{x}_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

после введения множителя Лагранжа –

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 - p^* = 0, \\ \ddot{x}_2 - \dot{p}^* = Q, \\ x_1 - \dot{x}_2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где Q – постоянная сила.

к перемещению ее точек по заданным траекториям.

В случае неголономных связей управляемое движение системы определим следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ \Phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)^T$ – вектор обобщенных координат генератора системы; $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, $\Phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}^*)$ – векторы связей.

После введения множителей Лагранжа система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{p}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{p}^{*T} (\Phi_{x\dot{x}}^T)_{x\dot{x}}) \ddot{\mathbf{x}}^* + \Phi_{x\dot{x}}^T \dot{\mathbf{p}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \\ \Phi_{x\dot{x}} \dot{\mathbf{x}} + \Phi_{\dot{x}} \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0}, \end{cases}$$

где \mathbf{p}^* – вектор множителей Лагранжа, соответствующих связям с заданными программными траекториями. При численном интегрировании такой системы дифференциальных уравнений с использованием явных методов интегрирования многократно решается система уравнений

Аналитическое решение системы (5) представим в виде

$$\begin{cases} \dot{p}^* = \dot{x}_1 - Q, \\ m\ddot{x}_1 = p^*, \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_1. \end{cases}$$

Условия связи в уравнении (4) делают зависимыми начальные условия для интегрирования уравнений (4), (5): $x_1 = \dot{x}_2$, $\dot{x}_1 = Q$.

При несогласованных начальных условиях $x_1 = \dot{x}_2$, $\dot{x}_1 = Q - 0,05$ возникает возмущение движения (рис. 1), что может приводить к неустойчивости численного интегрирования системы (5).

Для анализа устойчивости (5) рассмотрим линеаризованные уравнения возму-

ценного движения, которые в матричной форме имеют следующий вид

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{x} = (p^*, x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – вектор состояния системы, \mathbf{A} – матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Устойчивость системы (5) определяется собственными значениями матрицы \mathbf{A} ; для матрицы (6) одно из собственных значений имеет положительную действительную часть. Возмущенная система является неустойчивой, что проявляется при несогласованных начальных условиях. Этому случаю соответствуют графики перемещения и скорости, приведенные на рис. 1.

Для обеспечения устойчивости численного интегрирования (5) умножим обе части второго уравнения системы (4) на α . В этом случае аналитическое решение системы (5) можно получить из следующего представления уравнений

$$\begin{cases} \dot{p}^* = \alpha(\dot{x}_1 - Q), \\ m\ddot{x}_1 = p^*, \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_1. \end{cases} \quad (7)$$

Устойчивое численное решение системы (7) можно получить двумя способами:

1) возможные значения параметра α первого уравнения системы (7) положить в интервал меньше 1, т.е. $\alpha < 1$.

При уменьшении α наблюдается тенденция приближения графиков к точному решению (рис. 2).

При $\alpha < 0$ собственные значения матрицы (6) имеют чисто мнимые части; при $0 < \alpha < 1$ некоторые из них – положительные действительные части;

2) введение дополнительных членов пропорциональных невязкам уравнений связей. Здесь этого можно добиться путем подстановки в первое уравнение системы (7) слагаемого, пропорционального множителю Лагранжа p^* . Пусть параметр $\alpha = 1$, тогда решение системы (7) примет вид

$$\begin{cases} \dot{p}^* = \dot{x}_1 - Q - cp^*, \\ m\ddot{x}_1 = p^*, \\ \dot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0, \end{cases}$$

где c – положительное число.

Увеличение значений параметра c позволит стабилизировать возмущенное движение, возникающее в системе при несогласованных начальных условиях (рис. 3);

3) при получении устойчивого решения в п. 1 параметр α должен был удовлетворять условию: $\alpha < 1$. Введение в первое уравнение системы (7) слагаемого $-cp^*$ снимает ограничения на значения α . Система запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{p}^* = \alpha(\dot{x}_1 - Q) - cp^*, \\ m\ddot{x}_1 = p^*, \\ \dot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Матрице \mathbf{A} линеаризованной системы в этом случае соответствуют отрицательные и положительные действительные части собственных значений. При достаточно больших значениях α положительная действительная часть будет стремиться к нулю.

Результаты численного интегрирования таких систем представлены на рис. 4, 5.

Для устойчивого решения роста α должен сопутствовать еще больший рост c .

Собственные значения матрицы \mathbf{A} только при $\alpha < 0$ имеют нулевые и отрицательные действительные части.

При малых отрицательных значениях c : $-1 < c < 0$, также можно получить устойчивое решение системы (8) при условии $\alpha < 1$.

Таким образом, для стабилизации системы (8) должно выполняться одно из следующих соотношений на параметры

$$\begin{cases} \alpha < 1, \\ -1 < c \leq 0; \\ \alpha > 1, \\ c > 0; \end{cases}$$

При $\alpha = 1, c = 0$ система устойчива только при согласованных начальных условиях.

Рассмотрим систему (4), заменив в нем второе уравнение:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2, \\ x_1 - \dot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) в связанном виде записывается в форме

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = p^*, \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 + \dot{p}^*, \\ x_1 - \dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

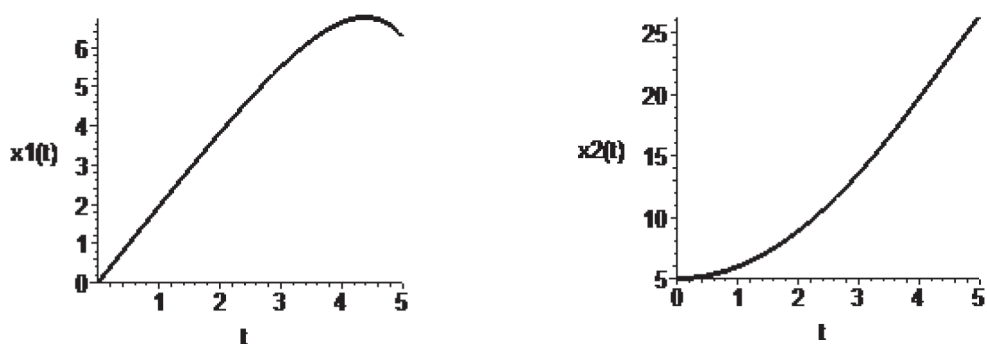


Рис. 1. Зависимость переменных x_1 и x_2 от времени t до стабилизации

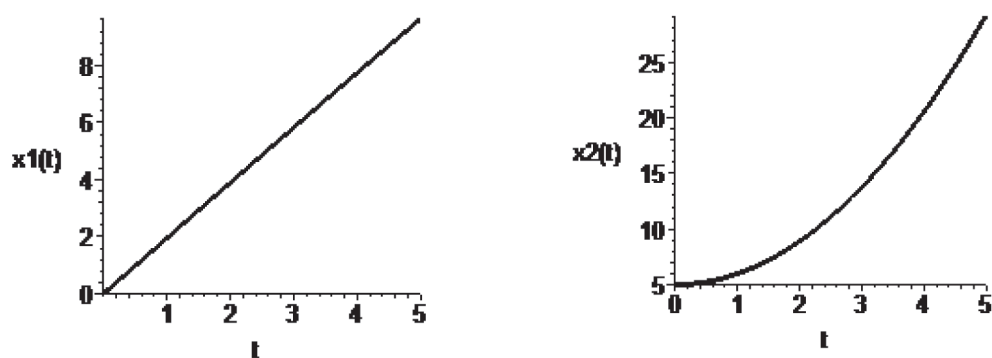


Рис. 2. Зависимость переменных x_1 и x_2 от времени t при $\alpha = 0,1$, $\alpha \leq -1$

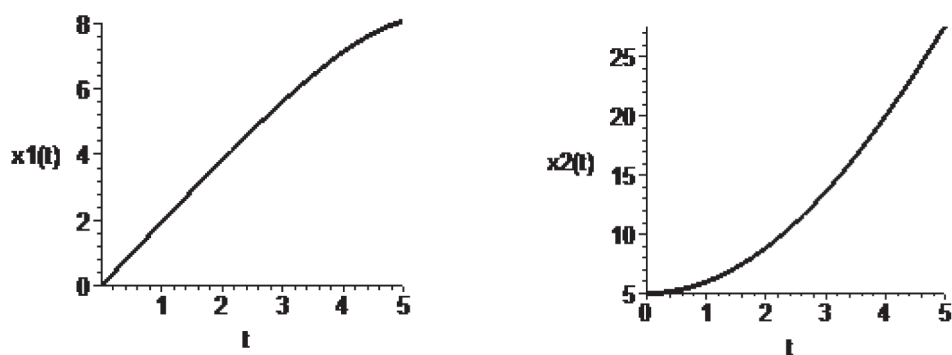


Рис. 3. Зависимость переменных x_1 и x_2 от времени t при $c = 0,5$

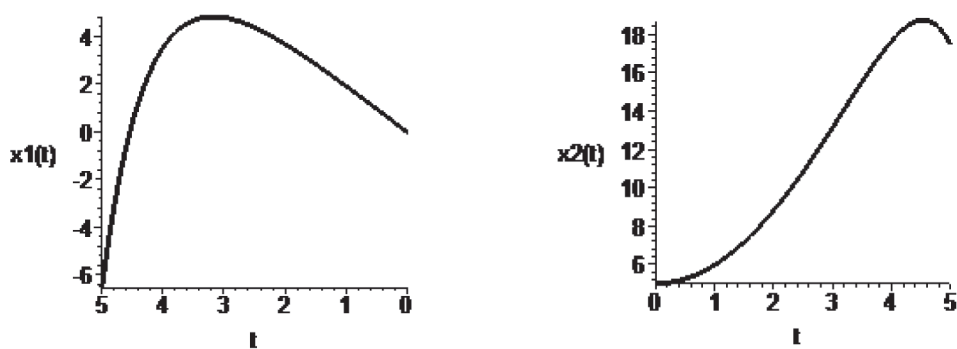


Рис. 4. Зависимость переменных x_1 и x_2 от времени t при $\alpha = 3$, $c = 1$

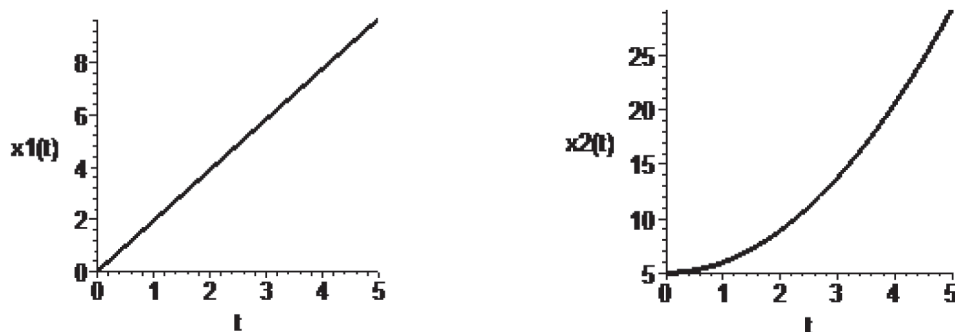


Рис. 5. Зависимость переменных x_1 и x_2 от времени t при $\alpha = 3$, $c = 30$

Аналитическое решение системы (9) после дифференцирования уравнения связи представим следующим образом:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = p^*, \\ \dot{p}^* = \dot{x}_1 + \omega^2 x_2, \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_1. \end{cases} \quad (10)$$

Хотя система (9) имеет очевидное решение $x_2(t) = a \sin(\omega t + \varepsilon)$, $x_1(t) = a\omega \cos(\omega t + \varepsilon)$, численное интегрирование уравнения (10) не дает искомого решения и поиск методов стабилизации решения требует дополнительного исследования.

Заключение

Построена система управления, в которой взаимодействие генератора программных траекторий с управляемой подсистемой обеспечивают уравнения неголономных связей.

В робототехнике зачастую требуется получить циклические движения различной формы, обеспечивающие устойчивость движения как отдельного звена, так и всей системы.

Обычно в этом случае используются робастные ПИД-регуляторы, которые не всегда могут обеспечить устойчивость системы. Поэтому проблема синтеза устойчивых режимов управления движением по заданным траекториям остается актуальной.

Список литературы

1. Банах Л.Я. Условия разбиения системы дифференциально-алгебраических уравнений на слабосвязанные подсистемы / Л.Я. Банах, А.С. Горобцов, О.К. Чесноков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 12. – С. 2225–2229.
2. Горобцов А.С., Андреев А.Е., Тарасов П.С., Скориков А.В., Карцов С.К. Синтез устойчивых квазистатических режимов шагания антропоморфного робота // Известия ВолгГТУ. Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. – 2016. – № 6 (185). – С. 75–76.
3. Полянина А.С. Задача синтеза автоколебательных режимов в многомерных динамических системах // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 12–4. – С. 618–621.
4. Горобцов А.С. Притягивающие эллипсоиды и синтез нелинейных колебательных режимов / А.С. Горобцов, О.Е. Григорьева, Е.Н. Рыжов // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 8. – С. 40–48.
5. Gorobtsov A. About formation of the stable modes of the movement of multilink mechanical systems / A. Gorobtsov, E. Ryzhov, A. Polyamina // Vibroengineering Procedia. Vol. 8: proc. of 22nd International Conference on Vibroengineering (Moscow, Russia, 4–7 October 2016) / Publisher JVE International Ltd. – Kaunas (Lithuania), 2016. – P. 522–526.
6. Gorobtsov A., Polyamina A., Andreev A. The Use of the Limit Cycles of Dynamic Systems for Formation of Program Trajectories of Points Feet of the Anthropomorphous Robot // World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index 126, International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering. – 2017. – № 11(6). – P. 717–720.
7. Морозов В.М. Неголономные механические системы. Устойчивость и стабилизация / В.М. Морозов, В.И. Каленова, М.А. Салмина // Устойчивость и процессы управления: тр. междунар. конф. (Санкт – Петербург, 29 июня – 1 июля 2005 г.). – Т. 2. – С. 1107–1116.