

УДК 336.77.067.21

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПАНИИ ПО МИКРОФИНАНСИРОВАНИЮ СО СМЕШАННЫМИ ПОТОКАМИ ВХОДЯЩИХ РИСКОВ

Носова М.Г.

*ФГБОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»,
Томск, e-mail: nosovamgm@gmail.com*

В этой статье предложена математическая модель изменения численности клиентов компании по микрофинансированию со смешанными потоками входящих рисков. Такая компания по микрофинансированию специализируется на двух видах кредитования, например простой займ и пенсионный займ. В качестве математической модели выбрана бесконечно-линейная система массового обслуживания $M|M|_{\infty}$ с неограниченным числом обслуживающих приборов, с простейшими входящими потоками заявок и экспоненциальным временем обслуживания их на приборах. Деятельность компании определяется двумя случайными процессами: числом заключенных кредитных договоров и капиталом компании. Исследование этих двух процессов выполнено методами теории массового обслуживания. Получена система дифференциальных уравнений, определяющая распределение вероятностей числа пришедших клиентов и числа заключенных договоров в системе массового обслуживания. Найден вид характеристической функции величины изменения капитала компании по микрофинансированию. Методом моментов найдены основные вероятностные характеристики капитала компании: математическое ожидание и дисперсия.

Ключевые слова: система массового обслуживания, компания по микрофинансированию, собственный капитал, $M|M|_{\infty}$

A MATHEMATICAL MODEL OF MICROFINANCE COMPANY WITH MIXED FLOWS OF INCOMING RISKS

Nosova M.G.

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, e-mail: nosovamgm@gmail.com

In this paper a mathematical model of microfinance company with mixed flows of incoming risks is proposed. The microfinance company specializes in two types of lending, for example a simple loan and a pension loan. The mathematical model defines an infinitely linear queueing system $M|M|_{\infty}$ with an unlimited number of serving devices, with the simplest incoming streams of applications and with exponential service time. The company's activity is determined by two random processes: the number of concluded loan agreements and the company's capital. Research of these two processes is performed by the methods of queueing theory. By the method of moments the main probabilistic characteristics of the company's capital: mathematical expectation and variance are found.

Keywords: queueing theory, microfinance company, company's capital, $M|M|_{\infty}$

В настоящее время развивающимся направлением в России является микрофинансирование. Востребованность микрофинансирования и доступность открытия компании делают этот сегмент кредитования весьма привлекательным для создания собственного бизнеса. В этих условиях большое значение приобретает исследование вопросов микрофинансирования. Одним из таких вопросов является оценка минимального размера создаваемого капитала компании и прогнозирование динамики капитала с учетом возможных рисков. Ведь собственный капитал является базовым показателем при расчете нормативов деятельности кредитной организации, установленных Банком России, и одним из ориентиров для оценки бизнеса рынком, а следовательно, и инвесторами [1].

Кредитование как отрасль экономики, связана с риском случайных финансовых потерь (невозвратом долга), которые возникают в результате нежелательных событий, например потеря трудоспособности,

болезнь, смерть и т.п. Основной принцип любого кредитования состоит в том, что кредитор (банк) выдает заемщику определенную денежную сумму на определенный срок под определенный процент, а заемщик обязуется вернуть денежную сумму на оговоренных условиях. В результате некоторых нежелательных событий заемщик не возвращает сумму, в этом случае кредитор несет финансовые потери.

Хотя для каждого кредитного договора значения денежной суммы (кредита) и возможной выплаты с учетом процентов строго оговорены, до момента заключения кредитного договора они неизвестны и должны рассматриваться как случайные величины. Моменты заключения новых кредитных договоров и наступления выплат по кредитам также являются случайными величинами.

Математическое моделирование является мощным и эффективным инструментом исследования таких вопросов и позволяет найти основные характеристики, а также

построить научно обоснованные прогнозы величины капитала компании.

В работе для построения математической модели предлагается применить модели и методы теории массового обслуживания. Рассмотрим классическую бесконечно-линейную систему массового обслуживания $M|M|\infty$ с неограниченным числом обслуживающих приборов, с простейшими входящими потоками заявок и экспоненциальным временем обслуживания их на приборах [2, 3].

Указанную систему массового обслуживания можно рассматривать как математическую модель потока клиентов некоторой компании по микрофинансированию, специализирующейся на двух видах кредитования, например простой займ и пенсионный займ [1]. Кредит выдается одной суммой, возврат кредита должен быть произведен в течение определенного срока, выплата процентов за использование кредитом происходит регулярно, процентная ставка фиксированная. Тогда приходящие заявки целесообразно разделить на две группы, каждая из которых обслуживается определённым образом.

На вход системы $M|M|\infty$ поступает смешанный поток, состоящий из двух простейших потоков (стационарный пуассоновский) договоров с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Договоры 1-го типа поступают в первый блок обслуживания, 2-го типа – во второй блок обслуживания и занимают любой из свободных приборов, на котором выполняется их обслуживание в течение случайного времени, распределённого по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

Деятельность компании по микрофинансированию можно охарактеризовать двумя случайными величинами: числом заключённых кредитных договоров $k(t)$ и капиталом компании $S(t)$. Будем считать, что потенциальный рынок кредитных услуг считается бесконечным.

Рассмотрим процесс изменения состояний случайных процессов $k(t)$ и $S(t)$ с течением времени t . Изменение числа кредитных договоров и значений капитала компании происходит в следующих случаях.

1. Компания по микрофинансированию заключает новый кредитный договор и выдает денежную сумму. Будем предполагать, что поток заключённых кредитных договоров состоит из двух простейших потоков с параметрами λ_1 и λ_2 . Очевидно, что заключение кредитного договора и выдача денежной суммы связаны с риском для компании. Вероятность того, что за время Δt компания примет на себя новый риск в зависимости от типа договора, равна $\lambda_1 \Delta t + 0(\Delta t)$ и $\lambda_2 \Delta t + 0(\Delta t)$. Каждый новый риск для ком-

пании связан с выдачей денежной суммы заемщику. φ_1 и φ_2 – размеры для первого и второго вида кредитования, которые являются случайными величинами с функциями распределения F_{φ_1} , F_{φ_2} и моментами $M\{\varphi_1\} = a_1$, $M\{\varphi_1^2\} = a_2$, $M\{\varphi_2\} = A_1$, $M\{\varphi_2^2\} = A_2$.

2. По каждому из k_1 заключённых кредитных договоров первого типа с интенсивностью λ_{ξ_1} выплачивается взнос по кредиту в размере ξ_1 , который является случайной величиной с функцией распределения F_{ξ_1} и моментами $M\{\xi_1\} = b_1$, $M\{\xi_1^2\} = b_2$. Выплаты вносятся независимо друг от друга, и поэтому за время Δt в компанию по микрофинансированию поступит такой взнос с вероятностью $k_1 \lambda_{\xi_1} \Delta t + 0(\Delta t)$. Аналогично по каждому из k_2 заключённых кредитных договоров второго типа с интенсивностью λ_{ξ_2} выплачивается взнос по кредиту в размере ξ_2 , который является случайной величиной с функцией распределения F_{ξ_2} и моментами $M\{\xi_2\} = B_1$, $M\{\xi_2^2\} = B_2$. Выплаты вносятся независимо друг от друга, и поэтому за время Δt в компанию по микрофинансированию поступит такой взнос с вероятностью $k_2 \lambda_{\xi_2} \Delta t + 0(\Delta t)$.

3. В какой-то момент срок кредитного договора заканчивается. Будем считать, что срок, на который заключается кредитный договор, является случайной величиной с функцией распределения $F_1 = 1 - e^{-\mu_1 t}$ для первого типа и $F_2 = 1 - e^{-\mu_2 t}$ для второго типа. Каждый кредитный договор расторгается и «покидает» компанию, независимо от срока действия других кредитных договоров, с интенсивностями μ_1 и μ_2 . Тогда за время Δt кредитные договоры «покидают» компанию с вероятностями $k_1 \mu_1 \Delta t + 0(\Delta t)$ и $k_2 \mu_2 \Delta t + 0(\Delta t)$ соответственно.

4. Будем предполагать, что с каждым кредитным договором первого вида может наступить случай невозврата кредита с интенсивностью Ψ_{η_1} . Эти случаи для различных кредитных договоров независимы. С вероятностью $k_1 \Psi_{\eta_1} \Delta t + 0(\Delta t)$ наступают случаи невозврата кредита, где η_1 – финансовые убытки компании. Размер η_1 является случайной величиной с функцией распределения F_{η_1} и моментами $M\{\eta_1\} = c_1$, $M\{\eta_1^2\} = c_2$. Аналогично, с каждым кредитным договором второго вида может наступить случай невозврата кредита с интенсивностью Ψ_{η_2} . Эти случаи для различных кредитных договоров независимы. С вероятностью $k_2 \Psi_{\eta_2} \Delta t + 0(\Delta t)$ наступают случаи невозврата кредита, где η_2 – финансовые убытки компании. Размер η_2 является случайной величиной с функцией распределения F_{η_2} и моментами $M\{\eta_2\} = C_1$, $M\{\eta_2^2\} = C_2$.

Определим $l_1(t)$ и $l_2(t)$ как случайные процессы, которые характеризует число пришедших клиентов за время t за кредитами первого типа и второго типа, а $i_1(t)$ и $i_2(t)$ – число заключенных кредитных договоров каждого вида (выданных кредитов) в момент времени t .

Задача исследования данной математической модели состоит в нахождении распределения вероятностей

$$P(l_1, l_2, i_1, i_2, t) = P\{l_1(t) = l_1, l_2(t) = l_2, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, t\}.$$

Составим Δt -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [3, 4]:

$$\begin{aligned} P(l_1, l_2, i_1, i_2, t + \Delta t) = & (1 - \lambda_1 \Delta t)(1 - \lambda_2 \Delta t)(1 - i_1 \mu_1 \Delta t)(1 - i_2 \mu_2 \Delta t)P(l_1, l_2, i_1, i_2, t) + \\ & + \lambda_1 \Delta t P(l_1 - 1, l_2, i_1 - 1, i_2, t) + \lambda_2 \Delta t P(l_1, l_2 - 1, i_1, i_2 - 1, t) + \\ & + (i_1 + 1) \mu_1 \Delta t P(l_1, l_2, i_1 + 1, i_2, t) + (i_2 + 1) \mu_2 \Delta t P(l_1, l_2, i_1, i_2 + 1, t). \end{aligned}$$

Откуда получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(l_1, l_2, i_1, i_2, t)}{\partial t} = & -(\lambda_1 + \lambda_2 + i_1 \mu_1 + i_2 \mu_2)P(l_1, l_2, i_1, i_2, t) + \lambda_1 P(l_1 - 1, l_2, i_1 - 1, i_2, t) + \\ & + \lambda_2 P(l_1, l_2 - 1, i_1, i_2 - 1, t) + (i_1 + 1) \mu_1 P(l_1, l_2, i_1 + 1, i_2, t) + (i_2 + 1) \mu_2 P(l_1, l_2, i_1, i_2 + 1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (1), определим производящую функцию четырехмерного распределения $P(l_1, l_2, i_1, i_2, t)$ в виде

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} x_1^{l_1} x_2^{l_2} y_1^{i_1} y_2^{i_2} P(l_1, l_2, i_1, i_2, t).$$

Для производящей функции $F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$ из (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка следующего вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\partial t} + \mu_1 (y_1 - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\partial y_1} + \mu_2 (y_2 - 1) \frac{\partial F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)}{\partial y_2} = \\ = (\lambda_1 (x_1 y_1 - 1) + \lambda_2 (x_2 y_2 - 1)) F(x_1, x_2, y_1, y_2, t). \end{aligned}$$

Откуда найдем выражение для производящей функции $F(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \exp \left\{ (\lambda_1 (x_1 - 1) + \lambda_2 (x_2 - 1)) t + \frac{\lambda_1 x_1}{\mu_1} (y_1 - 1) (1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda_2 x_2}{\mu_2} (y_2 - 1) (1 - e^{-\mu_2 t}) \right\}. \quad (2)$$

В результате определен вид производящей функции четырехмерного распределения $P(l_1, l_2, i_1, i_2, t)$.

Из [5] известно, что капитал любой компании по микрофинансированию в определенный момент времени определяется следующим выражением:

$$S(t) = S(0) + \tilde{S}(t),$$

где $S(0)$ – начальный капитал.

Изменение капитала компании по микрофинансированию можно описать выражением

$$\tilde{S}(t) = \sum_{i=1}^{i_1(t)} (\xi_{1i} - \psi_{\eta_1} \eta_{1i}) - \sum_{l=1}^{l_1(t)} \phi_{1l} + \sum_{i=1}^{i_2(t)} (\xi_{2i} - \psi_{\eta_2} \eta_{2i}) - \sum_{l=1}^{l_2(t)} \phi_{2l}.$$

Рассмотрим характеристическую функцию величины изменения капитала компании по микрофинансированию, полученного за время t . Очевидно, что

$$H(\alpha, t) = \text{Me}^{-\alpha \tilde{S}(t)} = F(\phi_1(\alpha), \phi_2(\alpha), \psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha), t).$$

Согласно виду производящей функции (2) найдем, что

$$H(\alpha, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda_1 \varphi_1(\alpha)}{\mu_1} (\psi_1(\alpha) - 1) (1 - e^{-\mu_1 t}) + (\lambda_1 (\varphi_1(\alpha) - 1) + \lambda_2 (\varphi_2(\alpha) - 1)) t + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2 \varphi_2(\alpha)}{\mu_2} (\psi_2(\alpha) - 1) (1 - e^{-\mu_2 t}) \right\}, \quad (3)$$

где $\varphi_1(\alpha) = Me^{-j\alpha(-\varphi_{1i})}$ – характеристическая функция величины $(-\varphi_{1i})$, $\varphi_2(\alpha) = Me^{-j\alpha(-\varphi_{2k})}$ – характеристическая функция величины $(-\varphi_{2k})$, $\psi_1(\alpha) = Me^{-j\alpha(\xi_{1i} - \psi_{\eta_1} \eta_{1i})}$ – характеристическая функция величины $\xi_{1i} - \psi_{\eta_1} \eta_{1i}$, $\psi_2(\alpha) = Me^{-j\alpha(\xi_{2k} - \psi_{\eta_2} \eta_{2k})}$ – характеристическая функция величины $\xi_{2k} - \psi_{\eta_2} \eta_{2k}$, j – мнимая единица.

Среднее значение величины изменения капитала компании по микрокредитованию, полученного за время t , можно определить как

$$M\tilde{S}(t) = \frac{1}{j} \frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}.$$

Учитывая, что

$$\varphi_1(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 1, \quad \varphi_2(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 1, \quad \psi_1(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 1, \quad \psi_2(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 1,$$

$$\varphi_1'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = -ja_1, \quad \varphi_2'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = -jA_1,$$

$$\varphi_1''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = -j^2 a_2, \quad \varphi_2''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = -j^2 A_2,$$

$$\psi_1'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = j(b_1 - \psi_{\eta_1} c_1), \quad \psi_2'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = j(B_1 - \psi_{\eta_2} C_1),$$

$$\psi_1''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = j^2(b_2 - 2\psi_{\eta_1} b_2 c_2 + \psi_{\eta_1}^2 c_2), \quad \psi_2''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = j^2(B_2 - 2\psi_{\eta_2} B_2 C_2 + \psi_{\eta_2}^2 C_2).$$

Тогда методом моментов из (3) получим основные вероятностные характеристики [3, 6] капитала компании по микрофинансированию: математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия:

$$MS(t) = S(0) + M\tilde{S}(t),$$

$$M\tilde{S}(t) = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \left(1 - e^{-\mu_1 t}\right) (b_1 - \psi_{\eta_1} c_1) + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) (B_1 - \psi_{\eta_2} C_1) - \lambda_1 a_1 t - \lambda_2 A_1 t,$$

$$D\tilde{S}(t) = \frac{\lambda_1}{\mu_1} (b_2 - \psi_{\eta_1}^2 c_2) \left(1 - e^{-\mu_1 t}\right) - 2 \frac{\lambda_1}{\mu_1} a_1 (b_1 - \psi_{\eta_1} c_1) \left(1 - e^{-\mu_1 t}\right) - \lambda_1 a_2 t + \\ + \frac{\lambda_2}{\mu_2} (B_2 - \psi_{\eta_2}^2 C_2) \left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) - 2 \frac{\lambda_2}{\mu_2} A_1 (B_1 - \psi_{\eta_2} C_1) \left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) - \lambda_2 A_2 t.$$

Заключение

1. Построена математическая модель изменения численности клиентов компаний по микрофинансированию со смешанными потоками входящих рисков в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов ($M|M|\infty$).

2. Получена система дифференциальных уравнений, определяющая распре-

деление вероятностей числа пришедших клиентов и числа заключенных договоров в системе массового обслуживания.

3. Найден вид характеристической функции величины изменения капитала компании по микрофинансированию.

4. Методом моментов найдены основные вероятностные характеристики капитала компании: математическое ожидание и дисперсия.

Список литературы

1. Носова М.Г., Тивякова М.В. Математическая модель компании по микрокредитованию в виде системы массового обслуживания // Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 13–15 мая 2015 г.). – Томск, 2015. – Ч. 4. – С. 304–305.
2. Моисеев А.П., Сергеев А.Е. Математическая модель страховой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи: материалы XVI Всероссийской научно-практической конференции (Анжеро-Судженск, 17–18 мая 2012 г.). – Анжеро-Судженск, 2012. – Ч. 1. – С. 37–38. URL: <http://www.asf.ru/upload/sbornikNTM-2012-ch1.pdf> (дата обращения: 01.11.2017).
3. Назаров А.А. Теория массового обслуживания: Учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 429 с.
5. Зорин А.В., Федоткин М.А. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А.В. Зорин, М.А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 7. – С. 102–111.
6. Назаров А.А., Носова М.Г. Математическая модель процесса изменения демографической ситуации и ее исследование // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2009. – Т. 2 (20). – С. 100–105.