

УДК 519.6:532.546.2

МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Жеглова Ю.Г., Сафина Г.Л.

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
Москва, e-mail: uliagermanovna@yandex.ru*

Изучение фильтрации суспензии в пористой среде является актуальной проблемой при проектировании и строительстве туннелей, подземных и гидравлических сооружений, систем очистки сточных вод и жидких промышленных отходов. Рассматривается математическая модель переноса и осаждения твердых частиц при фильтрации нестационарного потока монодисперсной суспензии в пористой среде с механико-геометрическим механизмом захвата частиц. Построено точное решение задачи на входе пористой среды. Проводится расчет полного осадка на входе пористой среды. Рассмотрены различные распределения концентрации взвешенных частиц на входе пористой среды для линейного блокирующего коэффициента фильтрации. Показано, что предельное значение полного осадка не зависит от формы распределения концентрации взвешенных частиц на входе фильтра. Величина предельного суммарного осадка определяется объемом взвешенных частиц, впрыскиваемых в пористую среду. Этот максимум достигается за конечное время для конечного распределения времени.

Ключевые слова: фильтрация, суспензия, пористая среда, математическая модель, численное решение

MODEL OF THE NONSTATIONARY FLOW OF SUSPENSION IN A POROUS MEDIUM

Zheglova Yu.G., Safina G.L.

*National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow,
e-mail: uliagermanovna@yandex.ru*

Filtration of a suspension in a porous medium is an actual problem in the design and construction of tunnels, underground and hydraulic structures and wastewater and water cleaning systems. A mathematical model of the transport and retention of solid particles in a homogeneous porous medium is considered. It is assumed that the flow of a monodisperse suspension is non-stationary and that the particles are retained by the size-exclusion mechanism of particles capture. An exact solution of the problem at the inlet of the porous medium is constructed. The calculation of the total deposit at the inlet of the porous medium is carried out. For a linear blocking filtration coefficient various time distributions of the concentration of suspended particles at the inlet are considered. It is shown that the maximum of total deposit does not depend on the shape of the time distribution of the suspended particles concentration at the filter inlet. The value of the maximum total deposit is determined by the volume of suspended particles injected into the porous medium. This maximum is reached in a finite time for a finite time distribution.

Keywords: filtration, suspension, porous medium, mathematical model, numerical solution

Изучение движения мельчайших твердых частиц в пористом грунте является актуальной задачей при проектировании и строительстве туннелей и гидротехнических сооружений. При фильтрации суспензии часть частиц проходит через пористую среду вместе с потоком несущей жидкости, а часть застревает в порах фильтра. Долговременная глубинная фильтрация, сопровождающаяся образованием осадка во всей пористой среде, а не только в ее поверхностном слое, существенно влияет на свойства горных пород и почвенных слоев [1]. В разнообразных технических и биологических системах очистки поверхностных и сточных вод и жидких промышленных отходов происходит захват частиц при движении суспензии через фильтрующую среду [2].

В работе рассматривается математическая модель движения частиц в фильтре, основанная на механико-геометрическом вза-

имодействии частиц с пористой средой [3]. Предполагается, что частицы свободно проходят через поры большого размера и застревают на входе пор, если диаметр частицы больше диаметра поры. Осажденная частица не может быть выбита из поры потоком жидкости или другой частицей, и навсегда остается в поре. С ростом осадка количество свободных малых пор сокращается и скорость образования осадка замедляется. Если все поры малого размера заблокированы частицами, концентрация осадка S достигает максимально возможного предельного значения S_M . Коэффициент пропорциональности $\Lambda(S)$ между скоростью роста осадка и концентрацией взвешенных частиц, обращающийся в ноль при блокировании всех малых пор $S = S_M$, называется блокирующим коэффициентом фильтрации.

Для различных моделей фильтрации стационарного потока суспензии в пори-

стой среде получены точные и асимптотические решения [4–9]. При отсутствии аналитических решений используются численные расчеты [10–13].

Стандартные модели фильтрации суспензии в пористой среде предполагают, что на вход фильтра подается суспензия с взвешенными частицами постоянной концентрации. В работе рассматривается фильтрация нестационарного потока суспензии. Приводится решение одномерной задачи фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде. Производится расчет полного осадка в пористой среде в случае линейного блокирующего коэффициента фильтрации для различных распределений концентрации взвешенных частиц на входе фильтра.

Постановка задачи

Рассмотрим основные уравнения, описывающие динамику взвешенных и осажженных частиц суспензии в фильтре длиной 1. Обозначим через $C(x, t)$ концентрацию взвешенных частиц, пусть $S(x, t)$ – концентрация осажженных частиц. Концентрации частиц удовлетворяют уравнению непрерывности, которое с учетом неподвижности осадка в простейшем случае имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Рост осадка пропорционален концентрации взвешенных частиц, из которых он образуется, а также зависит от текущей величины осадка $S(x, t)$: чем больше пор малого диаметра закрыто частицами, тем меньше скорость роста осадка

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C. \quad (2)$$

Здесь $\Lambda(S) > 0$ при $S \geq 0$.

Система уравнений (1), (2) рассматривается в области $\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$. Краевые условия для системы (1), (2) ставятся на входе фильтра $x = 0$ и в начальный момент времени $t = 0$:

$$C(x, t)|_{x=0} = p(t); \quad (3)$$

$$C(x, t)|_{t=0} = 0; \quad S(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Условия (4) означают, что в начальный момент пористая среда не содержит взвешенных и осажженных частиц. Суспензия переменной концентрации начинает поступать на вход фильтра в момент $t = 0$ и движется в пористой среде со скоростью $v = 1$. Характеристика $t = x$ – фронт концентраций взвешенных и осажженных частиц является подвижной границей суспензии. В области пустой пористой среды

$\Omega_0 = \{0 < x < 1, 0 < t < x\}$ решение нулевое; в области суспензии $\Omega_s = \{0 < x < 1, t > x\}$ решение положительно.

Решение на входе фильтра

Уравнение (2) на входе фильтра $x = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)p(t). \quad (5)$$

Делим обе части уравнения (5) на $\Lambda(S)$ и интегрируем по переменной t :

$$\int_0^t \frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)} dt = P(t), \quad P(t) = \int_0^t p(t) dt. \quad (6)$$

Используя условие (4), преобразуем интеграл в левой части (6):

$$\int_0^{S(0,t)} \frac{dS}{\Lambda(S)} = P(t). \quad (7)$$

Формула (7) задает концентрацию осажженных частиц на входе фильтра.

Рассмотрим модель с линейным блокирующим коэффициентом фильтрации:

$$\Lambda(S) = \lambda(S_M - S), \quad S_M > 0. \quad (8)$$

В этом случае согласно (7) концентрация осадка на входе фильтра

$$S(0, t) = S_M (1 - e^{-\lambda P(t)}). \quad (9)$$

Согласно [3, 4] для коэффициента фильтрации (8) концентрация осажженных частиц в области Ω_s равна

$$S(x, t) = \frac{S_M (e^{\lambda P(t-x)} - 1)}{e^{\lambda S_M x} + e^{\lambda P(t-x)} - 1}. \quad (10)$$

Расчет полного осадка

Объем осажженных частиц (полный осадок) в пористой среде в момент времени t равен

$$S^f(t) = \int_0^1 S(x, t) dx. \quad (11)$$

Если суспензия впрыскивается в пористую среду в течение конечного промежутка времени $t_1 \leq t \leq t_2$, то $S'(t) = 0$ при $t \leq t_1$. Поскольку частицы проходят от входа до выхода пористой среды за время $t_0 > 1$, то $S'(t)$ возрастает при $t_1 < t < t_2 + 1$ и $S'(t) = S'(t_2 + 1) = \text{const}$ при $t > t_2 + 1$. Если впрыск суспензии происходит при всех значениях времени $t > 0$, то функция $S'(t)$ возрастает при $t > 0$.

Численный расчет выполнен для линейного коэффициента фильтрации (8) при $\lambda = 1$, $S_M = 1$ для трех распределений $p_i(t)$ концентрации взвешенных частиц на входе фильтра, заданных на рис. 1.

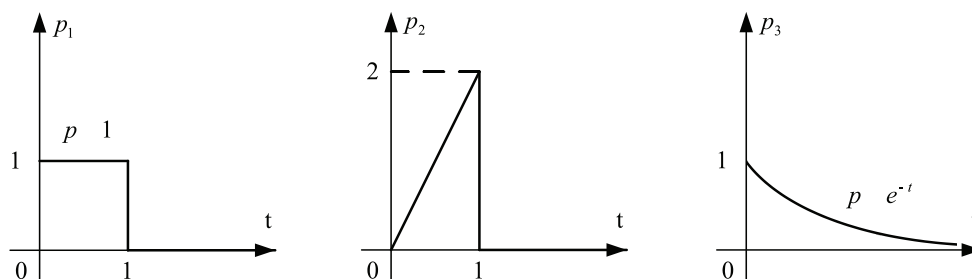


Рис. 1. Концентрации взвешенных частиц на входе фильтра

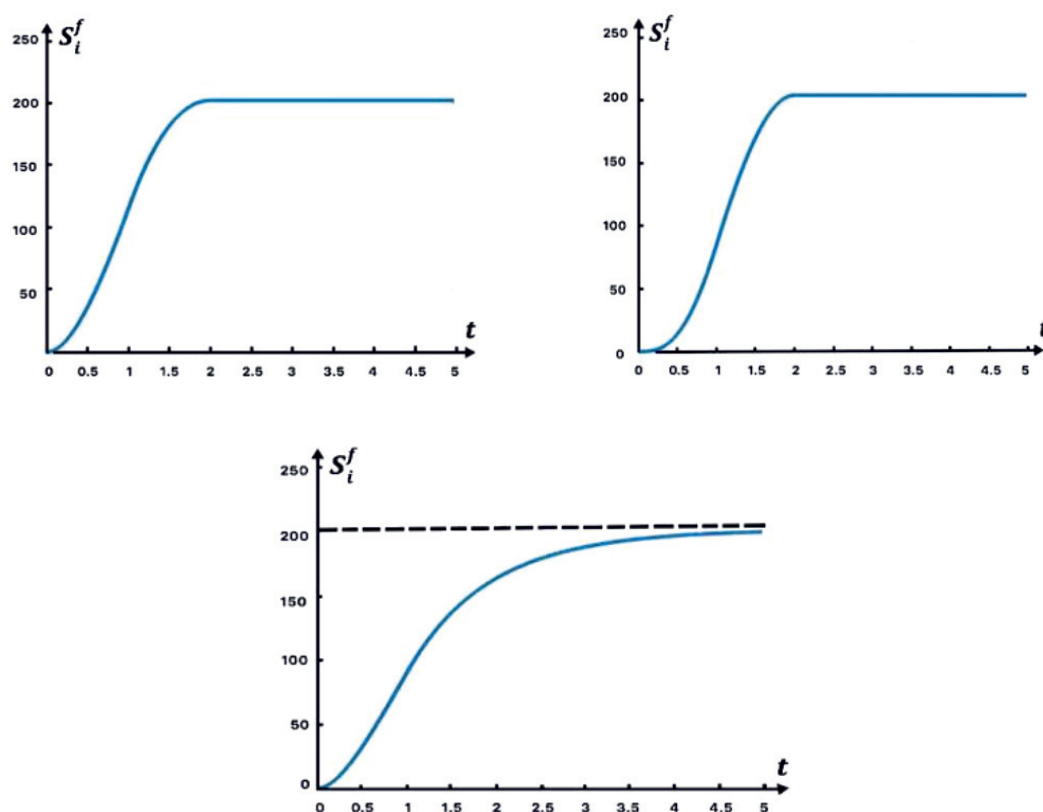


Рис. 2. Полный осадок в пористой среде для трех граничных распределений

На рис. 2 изображены графики полного осадка $S_i^f(t)$, $i=1,2,3$.

Общее количество взвешенных частиц, впрыскиваемых в пористую среду, является одинаковым для всех трех рассматриваемых распределений $p_i(t)$, поскольку $\int_0^\infty p_i(t)dt=1$, $i=1,2,3$ (рис. 1). Для финитных распределений концентрации взвешенных частиц $p_1(t)$, $p_2(t)$ на входе фильтра полный осадок достигает максимального значения при $t=2$; для распределения $p_3(t)$ процесс фильтрации длится неограниченно, полный осадок возрастает и стремится

к предельному максимальному значению при $t \rightarrow \infty$ (рис. 2).

Заключение

В работе рассматривается одномерная математическая модель фильтрации суспензии в однородной пористой среде для переменной концентрации взвешенных частиц на входе фильтра. В случае линейного блокирующего коэффициента фильтрации для решения имеются явные аналитические формулы, обобщающие известное решение для потока суспензии постоянной концентрации. Указанные формулы используются

для численного нахождения полного осадка в пористой среде.

Форма распределения концентрации взвешенных частиц на входе фильтра $p_i(t)$ определяет вид графика $S_i^f(t)$. Поскольку $P_1(t) > P_2(t)$ при $0 < t < 1$, то на этом интервале график $S_1^f(t)$ выше графика $S_2^f(t)$.

Согласно рис. 2 предельный полный осадок не зависит от формы распределения концентрации взвешенных частиц на входе фильтра. Величина предельного полного осадка определяется объемом взвешенных частиц, впрыскиваемых в пористую среду.

Найденное точное решение позволит упростить нахождение параметров процесса фильтрации в лабораторных и полевых условиях.

Список литературы

1. C. Tien. Principles of filtration. – Elsevier, Oxford, 2012.
2. D.J. Logan. Transport Modelling in Hydrogeochemical Systems. – Springer, N.Y., 2001.
3. Bedrikovetsky P. Upscaling of Stochastic Micro Model for Suspension Transport in Porous Media // Transport in Porous Media. – 2008. – vol. 75. – P. 335–369.
4. You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media // Abstract and Applied Analysis. – 2013. – vol. 2013, iss. Mathematical and Computational Analyses of Flow and Transport Phenomena, 9 p.
5. You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic model for deep bed filtration // Chemical Engineering Journal. – 2014. – vol. 258. – P. 374–385.
6. Osipov Yu., Kuzmina L. Calculation of the filtration of polydisperse suspension with a small rate // Matec Web of Conferences. – 2017. – vol. 117, 00131. – 6 p.
7. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit // Procedia Engineering. – 2015. – vol. 111. – P. 491–494.
8. Kuzmina L., Osipov Yu. Filtration model of the unsteady suspension flow in a porous medium // Matec Web of Conferences. – 2017. – vol. 117, 00097. – 6 p.
9. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V., Galaguz Yu.P. A model of two-velocity particles transport in a porous medium // International Journal of Non-linear Mechanics. – 2017. – vol. 93. – P. 1–6.
10. Galaguz Y.P., Safina G.L. Modeling of Particle Filtration in a Porous Medium with Changing Flow Direction // Procedia Engineering. – 2016. – vol. 153. – P. 157–161.
11. Galaguz Y.P., Safina G.L. Modeling of fine migration in a porous medium // MATEC Web of Conferences. – 2016. – vol. 86, 03003. – 6 p.
12. Galaguz Y., Safina G. Calculation of the filtration in a heterogeneous porous medium // Matec Web of Conferences. – 2017. – vol. 117, 00052. – 6 p.
13. Galaguz Y., Safina G. Modeling of filtration of 2-types particles suspension in a porous medium // Matec Web of Conferences. – 2017. – vol. 117, 00053. – 6 p.