УДК 69.036:[539.374 + 004.925.83]

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Сибгатуллин Э.С., Сибгатуллин К.Э., Новоселов О.Г.

ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет (Набережночелнинский институт)», Набережные Челны, e-mail: cibes@mail.ru

Данная работа является развитием кинематического метода теории предельного равновесия. Массивные элементы конструкций предложено разбить на объемные абсолютно жесткие конечные элементы (АЖКЭ), которые имеют, в общем случае, произвольную форму и шесть степеней свободы в трехмерном пространстве. Процесс разрушения тела идет по бесконечно тонким поверхностям между соседними АЖКЭ. Опорные устройства включены в число АЖКЭ, перемещения которых заданы. Использованы жесткопластическая модель деформируемого твердого тела, уравнение равновесия в форме Лагранжа, принцип максимума Мизеса. Задача сведена к стандартной задаче линейного программирования, которая решается с использованием симплекс-метода. Составлена соответствующая программа для ЭВМ в среде Matlab, которая позволяет решать рассматриваемую задачу в общей постановке. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: массивные тела, прочность, трехмерное напряженное состояние, предельная несущая способность

THE METHOD OF DETERMINING THE BEARING CAPACITY OF THE MASSIVE STRUCTURAL ELEMENTS

Sibgatullin E.S., Sibgatullin K.E., Novoselov O.G.

Federal Autonomous Educational Institution of Higher Education Kazan Federal University (Naberezhnochelninsky Institute), Naberezhnye Chelny, e-mail: cibes@mail.ru

This work is the development of the kinematic method of limit equilibrium theory. Massive structural elements proposed to be split into volume absolutely rigid finite elements (ARFE), which are, in General, of arbitrary shape and six degrees of freedom in three-dimensional physical space. The process of destruction of the body goes on infinitely thin surfaces between adjacent ARFE. The supporting device included in the number of ARFE, move set. Used rigid-plastic model of a deformable solid body, the equation of equilibrium in the Lagrangian form, the principle of maximum Mises. The problem is reduced to a standard linear programming problem, which is solved using the simplex method. Composed of a corresponding computer program in Matlab that allows to solve the considered problem in the General setting. The example of calculation.

Keywords: massive body, strength, three-dimensional stress state, ultimate bearing capacity

Опыт показывает, что тела часто разрушаются квазихрупко, по определенным тонким поверхностям, области между которыми не разрушаются и не претерпевают заметных пластических деформаций. При расчетах на прочность с использованием компьютеров необходима предварительная дискретизация таких тел. Это часто осуществляют с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Например, в работе [1] разработана математическая модель пространственного АЖКЭ, включающая в себя статические и геометрические ограничения, накладываемые АЖКЭ на напряженно-деформированное состояние упругих частей металлоконструкций. Описан алгоритм учета АЖКЭ применительно к МКЭ в форме метода перемещений. Приведены примеры расчетов, подтверждающие необходимость учета АЖКЭ с целью получения корректной матрицы жесткости. Метод АЖКЭ и обобщенных шарниров разрушения для общего случая деформирования пластин и оболочек разработан, в частности, авторами работ [2], для общего случая деформирования стержневых систем – авторами работы [3]. В работах [2, 3] использован кинематический метод теории предельного равновесия. Статический метод использован, в частности, в работах [4, 5]. Определение коэффициента запаса прочности по несущей способности осуществлено в работах [6, 7]. Задача определения несущей способности системы тонкостенная конструкция – грунт решена в работе [8]. В настоящей работе кинематический метод теории предельного равновесия развит применительно к массивным элементам конструкций (в том числе – к грунтовым массивам).

Тела, у которых все три измерения (длина, ширина, высота) – величины одного порядка, называются массивными [9]. Пусть такое тело нагружено внешними поверхностными p_i и объемными γ_i силами:

$$p_i = \mu p_i^0 + p_i^1, \ \gamma_j = \mu\gamma_j^0 + \gamma_j^1. \qquad (1)$$

Здесь p_i^0, p_i^1, γ_j^0, γ_j^1 являются функциями только пространственных координат, μ – монотонно возрастающий параметр. Способ закрепления тела исключает возможность его перемещений и поворотов как целиком жесткого тела.

Необходимо определить предельное значение μ_0 параметра внешнего нагружения, когда рассматриваемый массивный элемент теряет свойство геометрической неизменяемости.

В рассматриваемом случае, когда разрушение массивного тела происходит по отдельным «бесконечно» тонким обобщенным поверхностям разрушения (ОПР) между соседними АЖКЭ, основное энергетическое уравнение [10] можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{S_k} N dS = \mu\left(\int_{S_0} P_i^0 v_i dS + \int_{V_0} \gamma_j^0 v_j dV\right) + \int_{S_1} P_i^1 v_i dS + \int_{V_1} \gamma_j^1 v_j dV. \quad (2)$$

Здесь S_k – площадь k-й поверхности, по которой идет разрушение; m – число таких поверхностей; S_0, S_1 – площади на поверхности тела, где действуют силы μp_i^0, p_i^1 соответственно; V_0, V_1 – объемы в составе тела, где действуют силы $\mu\gamma_j^0$ и γ_j^1 соответственно; N – мощность внутренних силовых факторов (ВСФ), приходящаяся на единицу площади; v_i, v_j – компоненты векторов скоростей движения точек тела, где приложены силы p_i, γ_j соответственно.

На рис. 1 изображены два соседних АЖКЭ $P_1B_1...B_n$ и $P_2B_1...B_n$, контактирующие между собой через ОПР $B_1B_2...B_n$. Согласно теореме Шаля [11], движение каждого из АЖКЭ в трехмерном пространстве можно рассматривать как составленный из поступательного движения вместе с его полюсом и движения около полюса как неподвижного. Скорость диссипации внутренней энергии в произвольной точке B_i ОПР (рис. 1) определяется формулой

$$N(B_i) = \overrightarrow{R_*}(B_i)\cdot\Delta\vec{v}(P_1P_2) + \vec{M}_*(B_i)\cdot\Delta\vec{\omega}(P_1P_2). \quad (3)$$

Здесь $\overrightarrow{R_*}$, $\vec{M}_*$ – главный вектор и главный момент внутренних распределенных сил, приведенных в точку B_i соответственно; они отнесены к единице площади;

$$\overrightarrow{\Delta v}(P_1P_2) = \vec{v}(P_2) + \vec{\omega}(P_2)\times \times\overrightarrow{P_2B_i} - \vec{v}(P_1) - \vec{\omega}(P_1)\times\overrightarrow{P_1B_i};$$

$$\overrightarrow{\Delta\omega}(P_1P_2) = \vec{\omega}(P_2) - \vec{\omega}(P_1); \quad (4)$$

$\vec{v}(P_1)$, $\vec{v}(P_2)$ – скорости движения полюсов P_1 и P_2 (рис. 1) соответственно; $\vec{\omega}(P_1)$, $\vec{\omega}(P_2)$ – мгновенные угловые скорости вращения соответствующих АЖКЭ около полюсов P_1 и P_2 соответственно.

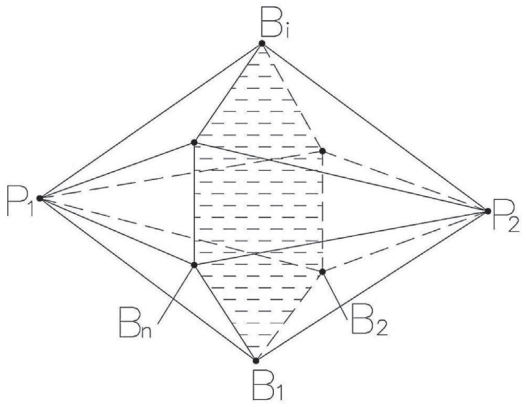


Рис. 1. Соседние АЖКЭ $P_1B_1...B_n$ и $P_2B_1...B_n$

Равенство (3) имеет место, когда обобщение силы и скорости обобщённых перемещений связаны ассоциированным законом деформирования [10]

$$\Delta\vec{v} = \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\overrightarrow{R_*}},\ \ \Delta\vec{\omega} = \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\overrightarrow{M_*}}. \quad (5)$$

Здесь $\dot{\lambda}(\Delta\vec{v},\Delta\vec{\omega}) \ge 0$ – скалярный множитель; $\Phi(\overrightarrow{R_*},\overrightarrow{M_*}) = 0$ – уравнение предельной поверхности (поверхности прочности) в пространстве обобщенных сил. В соответствии с принципом максимума Мизеса имеем (рис. 1):

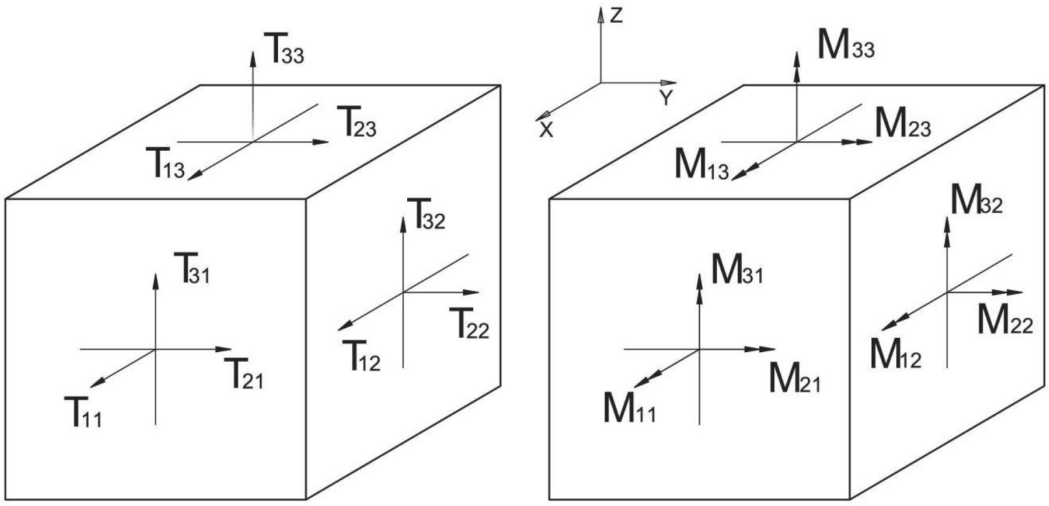
$$N(B_i) \ge \vec{R}\cdot\Delta\vec{v}(P_1P_2) + \vec{M}\cdot\Delta\vec{\omega}(P_1P_2). \quad (6)$$

Здесь $\vec{R},\vec{M}$ – любая комбинация обобщённых сил, удовлетворяющая условию $\Phi(\vec{R},\vec{M}) = 0$, но необязательно связанная ассоциированным законом деформирования с комбинацией $\Delta\vec{v}(P_1P_2)$, $\Delta\vec{\omega}(P_1P_2)$.

На рис. 2 изображён объемный элемент тела, имеющий единичные размеры, отнесенный к неподвижной системе координат XYZ. Внутренние силы, действующие на грани этого элемента, приведены в центры соответствующих граней. Главные векторы и главные моменты этих сил разложены по осям X, Y, Z. Получены векторы сосредоточенных сил $\vec{R}$ и сосредоточенных моментов $\vec{M}$:

$$\vec{R} = \{T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33}\}^T;$$

$$\vec{M} = \{M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}\}^T. \quad (7)$$



а) *б)*

Рис. 2. Объемный элемент тела

Представим рассматриваемую задачу в виде задачи математического программирования:

Найти min μ^+, где

$$\mu^+ = \sum_{k=1}^{m} \int_{S_k} N dS - \int_{S_1} p_i^1 v_i dS - \int_{V_1} \gamma_j^1 v_j dV, \quad (8)$$

при интегральном ограничении

$$\int_{S_0} P_i^0 v_i dS + \int_{V_0} \gamma_j^0 v_j dV = 1 \quad (9)$$

и при выполнении равенств вида (3) во всех точках всех ОПР. Для простоты записей некоторые знаки Σ у интегралов в правых частях (2) и (8), а также в левой части (9) опущены.

Наиболее применяемым вариантом математического программирования является линейное программирование (ЛП). Представим задачу в виде задачи ЛП, которая решается с использованием симплекс-метода. Для этого интегрирование в (8) и (9) необходимо заменить суммированием конечных величин, а вместо (3) необходимо использовать систему ограничений вида (6), где различные комбинации $\vec{R}$ и $\vec{M}$ соответствуют вершинам выпуклого предельного многогранника, аппроксимирующего предельную поверхность $\Phi\left(\vec{R},\vec{M}\right)=0$.

Внешние силы, приложенные в пределах отдельных АЖКЭ, можно привести к полюсам соответствующих АЖКЭ. В общем случае на рассматриваемой ОПР некоторые связи могут отсутствовать изначально. Тогда на ней соответствующие реакции (внутренние, или внешние) и их работа в процессе разрушения тождественно равны нулю.

Задача линейного программирования:

Найти min μ^+, где

$$\mu^+ = \sum_{k=1}^{m} \frac{S_k}{n_k}\left[\sum_{i=1}^{n_k} N_i\left(B_i\right)\right] - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\overrightarrow{F_j^1}\overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{M_j^1}\overrightarrow{\omega_j}\right), \quad (10)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n_1}\left(\overrightarrow{F_j^0}\overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{M_j^0}\overrightarrow{\omega_j}\right) = 1, \quad (11)$$

$$\left\{N_i\left(B_i\right) \geq \left[\vec{R}\cdot\Delta\vec{v}\left(P_1P_2\right) + \vec{M}\cdot\Delta\vec{\omega}\left(P_1P_2\right)\right]\right\}_l, \quad (12)$$

$$i=\overline{1,n_k},\ k=\overline{1,m},\ l=\overline{1,n_3}.$$

Здесь m – число ОПР; S_k – площадь k-й ОПР; n_k – число точек на k-й ОПР, в которых определяется $N_i(B_i)$; n_1 – число АЖКЭ, к которым приложены внешние активные силы, зависящие от μ; n_2 – число АЖКЭ, к которым приложены силы, не зависящие от μ; n_3 – число вершин предельного многогранника в пространстве ВСФ; $\overrightarrow{F_j^0}$, $\overrightarrow{F_j^1}$, $\overrightarrow{M_j^0}$, $\overrightarrow{M_j^1}$ – силы и моменты, полученные в результате приведения внешних сил, действующих на j-й АЖКЭ, к его полюсу; $\overrightarrow{v_j}$, $\overrightarrow{\omega_j}$ – скорости перемещения полюса j-го АЖКЭ и его поворота вокруг своего полюса, соответственно; $\vec{R}$ и $\vec{M}$ в (12) определяют произвольную вершину предельного многогранника; $\Delta\vec{v}$, $\Delta\vec{\omega}$ определяются в каждой точке B_i.

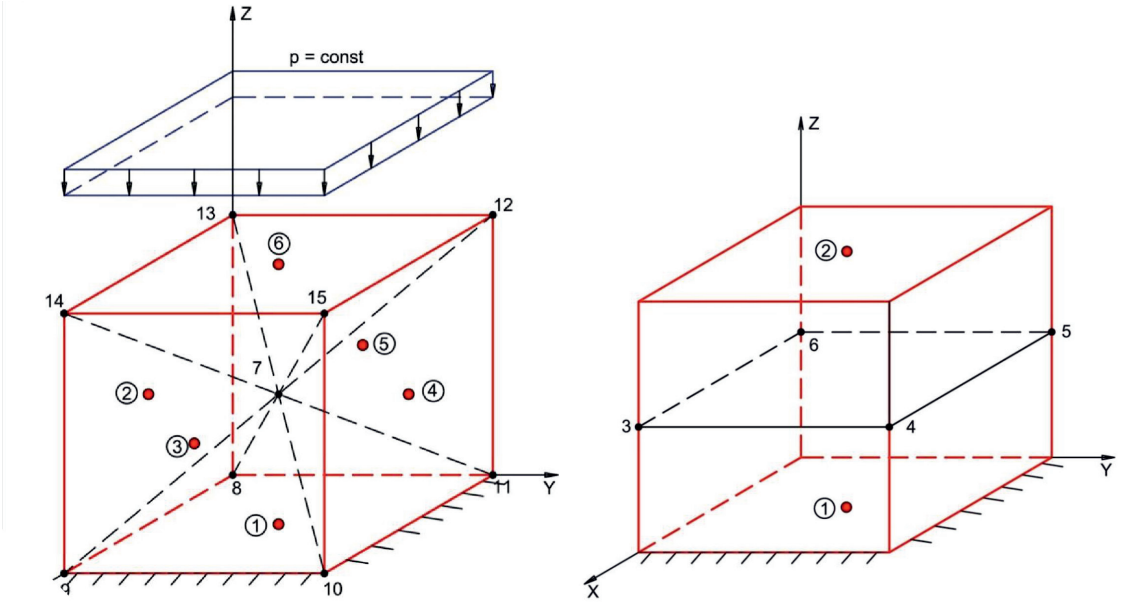
Число ограничений вида (12) равно произведению числа всех точек B_i на число вершин предельного многоугольника (в случае однородных тел предельный многогранник может быть одинаковым для всех точек B_i). Согласно (10) N на S_k определяется как сумма объемов прямоугольных призм с одинаковыми площадями оснований. Возможны другие варианты аппроксимации N в пределах S_k (например, суммой объемов непрямоугольных призм с различными треугольными основаниями и т.д.). Соотношения (10), (11), (12) переписаны нами в проекциях на оси неподвижной системы координат XYZ. Задачи ЛП, $N_i \geq 0$ являются несвободными переменными задачи ЛП, $v_j \gtrless 0$, $\omega_j \gtrless 0$ – свободными переменными. Составлена программа для ЭВМ в среде Matlab. Ниже приведены некоторые результаты расчетов, полученные с использованием этой программы.

На рис. 3, а изображен куб с размерами 1x1x1 (м) из однородного изотропного материала. На верхнюю грань куба действует равномерное давление с интенсивностью $p = \mu p^0$. Нижняя грань куба жестко защемлена. Необходимо определить предельное значение μ_0 параметра внешней нагрузки.

На рис. 3, а, куб разбит на 6 одинаковых АЖКЭ в форме пирамид; полюса АЖКЭ совпадают с центрами соответствующих граней куба, их номера указаны в кружочках. От 7 до 15 пронумерованы так называемые «сложные точки разрушения»; например, в точке № 7 сходятся 12 ОПР, соответственно, там будут 12 так называемых «простых точек разрушения», в каждой из которых должны выполняться ограничения вида (12). По условиям задачи АЖКЭ № 1 неподвижен. Вершины предельного многоугольника в пространстве ВСФ (7) имеют следующие координаты: $T_{ij} = \mp 1$ (МН/м²), $M_{ij} = \mp 1$ (МН/м²), $i, j = \overline{1,3}$.

Для варианта дискретизации на рис. 3, а получены следующие результаты решения рассматриваемой задачи: $\mu^+ = 1{,}414$ МН·м/с; $v_z(2) = v_z(3) = v_z(4) = v_z(5) = v_z(6) = -1$ м/с; остальные компоненты $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ для всех АЖКЭ равны нулю. Скорость диссипации внутренней энергии N имеет постоянное значение, равное 1 МН/(м·с), на четырех ОПР 7-8-9, 7-9-10, 7-10-11, 7-11-8, т.е. процесс разрушения идет по этим плоскостям.

На рис. 3, б рассматриваемый куб разбит только на 2 АЖКЭ плоскостью, параллельной координатной плоскости OXY. Остальные условия задачи – прежние, т.е. упрощающие предположения в отношении, например, степеней свободы АЖКЭ, количества вершин предельного многогранника (их число по-прежнему равно 36) не приняты. Для этого варианта дискретизации куба получены следующие результаты: $\mu^+ = 1$ МН·(м/с); $v_z(2) = -1$, остальные составляющие $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ для всех АЖКЭ равны нулю; скорость диссипации $N = 1$ МН/(м·с) на ОПР 3-4-5-6. Процесс разрушения идет по этой плоскости в результате исчерпания прочности материала куба на сжатие.



а) *б)*

Рис. 3. Куб с размерами 1x1x1 (м) из однородного изотропного материала

Как видно из приведенных результатов решения рассматриваемого примера, дискретизация куба согласно рис. 3, а дает значение μ^+, завышенное на 41,4 % (кинематический метод дает верхнюю оценку разрушающей нагрузки [9]), а дискретизация согласно 3, б, позволяет получить точное значение $\mu^+ = \mu_0 = 1$ МН·м/с. При дискретизации не нужно стремиться к разбиению конструкции на большое число АЖКЭ, а нужно постараться, при минимально необходимом количестве АЖКЭ, «уловить» истинную картину разрушения.

Нами были исследованы и другие варианты нагружения рассматриваемого куба (например, различные сочетания вертикальной и горизонтальной нагрузок). Полученные результаты (которые здесь не приведены) также соответствуют, на наш взгляд, действительной картине разрушения.

Список литературы

1. Панасенко Н.Н. Математическая модель абсолютно жёсткого пространственного конечного элемента / Н.Н. Панасенко, А.Н. Дудченко // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. н. – 1994. – № 3–4. – С. 214–227.

2. Сибгатуллин Э.С. Определение несущей способности металлокерамической сферической оболочки / Э.С. Сибгатуллин, К.Ф. Исламов // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9–3. – С. 512–516.

3. Сибгатуллин К.Э. Оценка предельной грузоподъёмности несущей системы самосвала КАМАЗ 65115 / К.Э. Сибгатуллин, Э.С. Сибгатуллин, В.Г. Шибаков // Перспективы науки. – 2010. – № 11(13). – С. 64–73.

4. Горелов А.В. Расчет нижней границы предельной нагрузки композитной лопасти несущего винта вертолета по теории предельного равновесия. Основные этапы алгоритма / А.В. Горелов, И.Н. Сидоров // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2011. – № 3. – С. 3–8.

5. Сарбаев Б.С. Расчет нижней границы предельной нагрузки для многослойных волокнистых композитов при двухосном нагружении / Б.С. Сарбаев // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 7 (19). – С. 25.

6. Сибгатуллин Э.С. Определение коэффициента запаса прочности объемных конечных элементов при трехосном напряженном состоянии / Э.С. Сибгатуллин, О.Г. Новоселов, К.Э. Сибгатуллин. – Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2016. – № 2. – С. 24–27.

7. Горелов А.В. Расчет коэффициента запаса статической прочности по теории предельного равновесия композитной лопасти несущего винта вертолета, имеющей повреждения / А.В. Горелов, Е.И. Николаев, И.Н. Сидоров // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2016. – № 3. – С. 13–19.

8. Каюмов Р.А. Моделирование поведения и оценка несущей способности системы тонкостенная конструкция – грунт с учетом ползучести и деградации грунта / Р.А. Каюмов, Ф.Р. Шакирзянов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – Т. 153, № 4. – С. 67–75.

9. Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности / И.Г. Терегулов. – М.: Высшая школа, 1984. – 472 с.

10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

11. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть I / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1972. – 468 с.