

УДК 004.896

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ПРОЕКТНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ЮВЕЛИРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Чеблакова Е.А., Ченцов С.В.

ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», Институт космических
и информационных технологий, Красноярск, e-mail: xhelen_86@mail.ru

Настоящая статья посвящена созданию автоматизированной проектной среды формирования новых художественных форм, используемых в ювелирном производстве. В разработанное средство проектирования сложных художественных форм (генератор сложных форм) интегрированы интеллектуальные системы на основе генетических алгоритмов, фрактальной геометрии и системы итерированных функций. Посредством метода доказательной аргументации и нечеткой логики, использованных для нахождения аналогичных форм художественных изделий, увеличена эффективность поиска необходимых конструкций. Механизм быстрого прототипирования, как модуль разработанной системы, позволяет быстро произвести демонстрационную версию продукта, а также оценить ее качественные и количественные характеристики. Предложенная система проектирования позволяет создавать новые проекты даже при постановке нечетких задач с высокой степенью неопределенности и производить приблизительный расчет затрат на ранней стадии процесса проектирования.

Ключевые слова: САПР, генетические алгоритмы, СППР, ювелирные украшения, прототипирование

DEVELOPMENT OF THE AUTOMATED DESIGN ENVIRONMENT FOR JEWELRY PRODUCTION

Cheblakova E.A., Chentsov S.V.

Federal Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education «Siberian Federal University», Institute of Space and Informational Technologies, Krasnoyarsk, e-mail: xhelen_86@mail.ru

This article is devoted to the creation of automated design implementation of the formation of the new art forms used in production. The intellectual systems are integrated into a design tool of difficult art forms (the difficult forms generator). The complex forms are received by means of iterated functions system. The case based reasoning method and fuzzy logic used in finding similar forms increases the efficiency of the needed forms search. A genetic algorithm is used as a mechanism to create new art forms. The rapid prototyping machine is an automated system module which allows to produce a demonstration model of the product.

Keywords: CAD, genetic algorithms, DSS, jewelry, prototyping

Концептуальное проектирование является ранней стадией общего процесса проектирования. Этот этап, как правило, имеет характеристики нечетких задач с высокой степенью неопределенности. Во время концептуального проектирования дизайнеры создают множество идей и представляют их в виде быстрых набросков с помощью карандаша и бумаги. Автоматизированное проектирование (САПР) редко используется на стадии концептуального проектирования, потому что требуются полные, конкретные и точные геометрические задания проектных значений, которые доступны только на последующих технологических этапах. Автоматизированные инструменты в искусстве и проектировании играют ключевую роль не только на этапе концептуального дизайна, но и в ходе всего процесса разработки.

В данной статье для повышения эффективности разработки моделей ювелирных украшений (ЮУ) предлагается интегрированная система автоматизированного проектирования на основе экспертных систем (ЭС) и эволюционных алгоритмов (ЭА).

Процесс проектирования начинается с выбора дизайнером относительной важности различных конструктивных характеристик. Затем система извлекает из базы данных ранее созданных конструкций набор конструкций ЮУ, который наиболее точно соответствуют требуемым атрибутам. Система использует эти конструкции моделей как родителей для получения соответствующего проекта-потомка (фенотипа).

Каждый индивидум из этой популяции может быть оценен по приспособленности дизайнером или компьютером.

Эволюционный алгоритм

Эволюционное искусство и система проектирования обеспечивают эффективный способ создания привлекательных произведений искусства, которые обладают различными стилями. В эволюционной художественной системе эволюционный процесс работает не в качестве оптимизатора форм, а в качестве генератора форм и обеспечивает их широкое разнообразие [4]. Большинство эволюционных про-

ектных систем генерируют новые формы на основе некоторой случайной исходной популяции [3].

Пользовательский интерфейс проектируется таким образом, чтобы дизайнер мог быстро оценивать пригодность любого индивида, ранжировать или выбирать различные индивиды. Эволюционный процесс генерирует новые художественные формы, основанные на индивидах с самым высоким рейтингом пригодности. Этот процесс использует преимущества эволюционных форм, улучшая формы последующих поколений. Предложенный подход эволюционного проектирования применяется для создания художественных форм при проектировании ювелирного украшения. Художественные формы моделируются с помощью фрактальной геометрии и с использованием системы итерированных функций (IFS) [7].

Фрактальная геометрия и система итерированных функций

Фрактал системы итерированных функций состоит из объединения нескольких копий самого себя, каждая копия рекурсивно трансформируется аффинным преобразованием (масштабированием, вращением, сдвигом и перемещением). Система итерированных функций является простым способом для генерации фракталов с самоподобными эстетическими шаблонами с минимальными затратами времени [5].

Система итерированных функций состоит из полного метрического пространства (X, d) , множества сжимающих отображений и факторов сжатия s_n , $|s_n| \leq 1$ при $n = 1, 2, \dots, N$, где n – индекс для каждого аффинного отображения. Аффинное преобразование множества точек на евклидовой плоскости определяется как карта $w: R^2 \rightarrow E^2$ и $w(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$, где действительные числа $a, b, c, d \in [-1, 1]$ и $e, f \in [-\infty, \infty]$.

Система итерированных функций состоит из конечного числа карт сжатия (1), её можно переписать в матричной форме как

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Любая система итерированных функций состоит как минимум из двух аффинных преобразований. Каждое преобразование имеет свою собственную вероятность p_i . Эта вероятность определяет частоту, с которой аффинное преобразование будет выбрано из системы итерированных функций и которое будет применено к множеству точек, установленных в случайных итерациях.

Для представления фракталов, полученных в системе итерированных функций, Барнсли (Barnsley) ввёл приближение вероятности выбора p_i каждого аффинного преобразования $A_i(2)$:

$$p_i \approx \frac{|\det A_i|}{\sum_{i=1}^N |A_i|} = \frac{|a_i d_i - b_i c_i|}{\sum_{i=1}^N |a_i d_i - b_i c_i|}, \quad (2)$$

где $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ и $p_i > 0$. Это уравнение основа-

но на быстрой сходимости для представления соответствующего фрактала.

Согласно теореме Элтона (Elton) [5, с. 364–378], мы можем объяснить процесс аффинного преобразования при случайных итерациях следующим образом: дана начальная точка $x_0 \in R^2$. Одно из аффинных преобразований из множества $w_1, w_2, \dots, w_n$ – выбирается случайно с вероятностью p_i для $i = 1, 2, \dots, N$. Выбранное преобразование затем применяется к x_0 для того, чтобы определить новую точку $x_1 \in R^2$.

Этот процесс повторяется в том же порядке для генерации последовательных новых точек до тех пор, пока заранее определенное число итераций (целое положительное число) не будет достигнуто.

Структура интеллектуального генератора ювелирных художественных форм

В системе интеллектуальной генерации ювелирных художественных форм применяются методы экспертных систем и эволюционных алгоритмов.

В основе системы лежат 3 основных блока.

Первый блок – «Интерфейс дизайнера». Помогает пользователю вводить исходные параметры форм ЮУ, а затем работать с системой эволюционного проектирования.

Второй блок – «Алгоритмическое проектирование». Включает в себя: *Алгоритм генерации форм ЮУ* – извлекает подобные формы из базы проектных данных, *Алгоритм оценки формы ЮУ* – определяет количество морфологических форм и эстетичность и *Алгоритм оценки стоимости ЮУ*, использующий метод рассуждений на основе правил и помогающий оценить себестоимость проектируемого изделия.

Третий блок – «Модуль автоматического создания модели». Связывает систему проектирования с машиной числового программного управления (ЧПУ) или машиной быстрого прототипирования (RP) для быстрого изготовления физических проектных моделей ЮУ.

Интерфейс дизайнера

Дизайнер при взаимодействии с системой проектирования определяет атрибуты проектируемого изделия и желаемые атрибуты дизайна (золотое сечение, зеркальная симметрия, осевая симметрия и/или логарифмическая спиральная симметрия), вес изделия, оценивает спроектированные изделия в ходе эволюционного процесса, завершает процесс проектирования при достижении удовлетворительного результата и отправляет производственную информацию клиенту либо эксперту.

Система выводит на экран несколько фенотипов. Пользователь оценивает отображенные конструкции путем ввода числового рейтинга (от 1 до 9) для каждой конструкции. После каждой цикловой итерации пользователь может завершить процесс, выбрав удовлетворяющий дизайн ЮУ или продолжать процесс выбора. Процесс также может быть прекращен автоматически после выполнения заданного количества итераций.

При принятии решения о производстве физической модели ЮУ уточняется информация, касающаяся типа материала, который будет использоваться, тип прототипирования, процесс литья и тип финишной отделки, а также количество частей, производимой восковой модели.

Алгоритмическое проектирование

Система алгоритмического проектирования включает базу знаний и 3 основных модуля:

- 1) модуль рассуждений на основе аналогичных случаев,
- 2) модуль эволюционного алгоритма проектирования,
- 3) модуль рассуждений на основе правил.

База знаний использует следующие базы данных:

- 1) хранилище предыдущих проектов ЮУ,
- 2) описание различных материалов, используемых при изготовлении,
- 3) информацию о способах производства.

Первоначально система запрашивает существующие художественные формы из проектной базы данных, используя метод рассуждений на основе аналогичных случаев и меру сходства нечетких множеств. Извлеченные художественные формы используются в качестве начальной популяции в системе ЭА.

Модуль рассуждений на основе аналогичных случаев:

Расчет схожести в нечеткой логике

Модуль на основе аналогичных случаев используется для получения набора существующих конструкций из базы данных.

Каждый новый проект обрабатывается методами нечеткой логики при первом добавлении в базу данных. Каждый из четырех проектных атрибутов накладывается на соответствующую треугольную функцию нечеткой логики.

Треугольная функция принадлежности определяется по формуле (3):

$$S(f_p) = \begin{cases} \frac{f_p - f_L}{f_c - f_L}, f_L \leq f_p < f_c \\ \frac{f_u - f_p}{f_u - f_c}, f_c \leq f_p < f_u \\ 0, f_p < f_L \text{ и } f_p > f_u \end{cases}, \quad (3)$$

где $S(f_p)$ – степень принадлежности первоначальных проектов новому проекту ЮУ, f_p – значение параметра первоначального проекта, f_c – значение параметра нового проекта, f_L – минимальное значение f_c , f_u – максимальное значение f_c .

Форма ЮУ наиболее близка к проектируемой, если найден максимум степени принадлежности. Далее эта форма используется в качестве родителя в модуле эволюционного алгоритма.

Модуль эволюционного алгоритма.

Генератор художественных форм и оценка ЮУ

Компактные множества систем итерированных функций закодированы и представлены основным узлом эволюции – геном. Для представления художественной формы ЮУ гены формируют хромосому, представляющую из себя генотип (или индивид). В нашем случае генотип кодируется действительными числами. До того, как оценивается пригодность решения, генотипы отображаются в виде фактического решения (фенотипа). Фенотипы, как правило, состоят из наборов параметров, представляющих формы или модели. Хромосома состоит, по крайней мере, из двух генов (или аффинных преобразований (рис. 1)).

Каждый ген состоит из шести аллелей $\{a, b, c, d, e, f\}$ аффинных преобразований, где $a, b, c, d \in [-1, 1]$ и $e, f \in [-50, 50]$ и являются действительными числами. Аллели a и d отвечают за масштабирование на x и y осях соответственно. Аллели b и c отвечают за сдвиг на x и y осях соответственно. Аллели e и f отвечают за перемещение на x и y осях соответственно.

Вращение осуществляется с помощью матриц. Точка x, y , которая будет вращаться,

описана как вектор и затем умножена на матрицу, вычисленную из угла θ (4).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Система итерированных функций может быть переписана в следующей форме (5):

$$\frac{x'}{y'} = \begin{pmatrix} r_1 \cos\theta_1 & -r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $r_1\theta_1$ – полярные координаты точки (a, c) и $(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$ – полярные координаты точки (b, d) .

Хромосомы системы итерированных функций хранятся в проектной базе данных. Фракталы формируются полученными точками посредством кодирования системы итерированных функций с использованием случайных итераций.

В многоточечной гауссовой мутации множество гауссовых случайных чисел применяется ко всем аллелям одновременно с определенным уровнем мутации (5%). Точки кроссовера случайно выбираются системой и располагаются таким способом, при котором индивиды обмениваются полными наборами параметров аффинных преобразований, как показано на рис. 3.

Следующие четыре проектных атрибута используются для получения и оценки эстетики генерируемых художественных форм.

Золотое сечение

Для количественной оценки золотого сечения в конкретной проектной конструкции ЮУ наш алгоритм начинается с опре-

деления двух перпендикулярных направлений [6, с. 53]. Ось А перпендикулярна пальцу, в то время как ось В проходит вдоль пальца (рис. 3).

Система координат помещается в средней точке фрактала, а ширина (W) и длина (L) ограничительной рамки вычисляются. Отклонение от золотого соотношения (6) рассчитывается как

$$\Delta = \left| \left(\frac{W}{L} \right) - \phi \right|, \quad (6)$$

где золотое соотношение $\phi = 1,6180339$. Далее мы оцениваем эту разницу в нормализованном диапазоне $[0, 1]$ (7):

$$G = e^{-\Delta}. \quad (7)$$

Опорные оси поворачивают до тех пор, пока максимальное значение G не будет получено. Максимальное значение G используется в качестве индикатора, который показывает, насколько близка часть конструкции ЮУ к проявлению в ней золотого сечения.

Зеркальная симметрия

Как и золотое сечение, зеркальная симметрия зависит от тех же исходных осей. Мы находим среднюю точку фрактала, а затем размещаем на нем оси. Используя методы обработки морфологических изображений, делим фрактал на две части по оси В, и далее разница между левой частью L_{part} и правой частью R_{part} рассчитывается по формуле 8:

$$\Delta M = |L_{part} - R_{part}|. \quad (8)$$



Рис. 1. Пример кодирования хромосомы

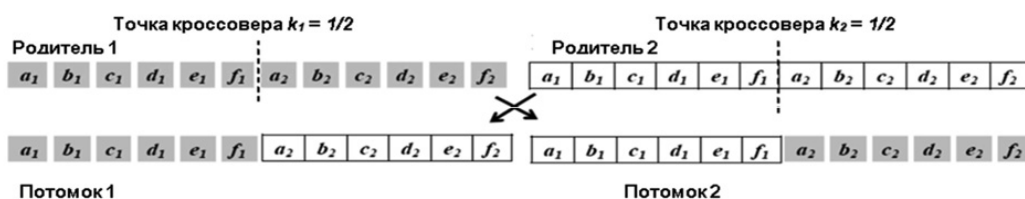


Рис. 2. Работа модифицированного арифметического кроссовера

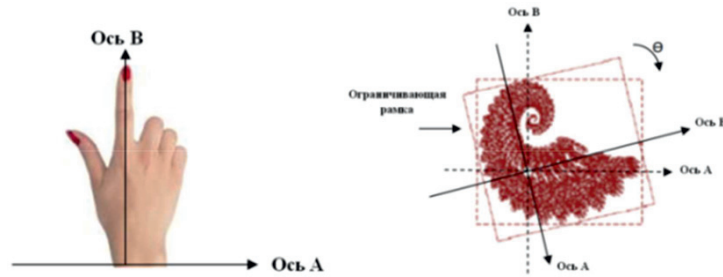


Рис. 3. Опорные оси, изображенные относительно человеческого пальца (слева) и их наложение на фрактал системы итерированных функций (справа)

Вращаем опорные оси до тех пор, пока не получится минимальное значение ΔM . ΔM лежит в интервале $[0, 1]$.

Осевая симметрия

Осевая симметрия фрактала системы итерированных функций может быть измерена свойствами подобия [5, с. 54–64]. Чтобы измерить подобие каждого аффинного преобразования, система итерированных функций может быть записана в полярной форме.

Любая система итерированных функций имеет осевую симметрию, содержащую, по крайней мере, одно осевое аффинное преобразование [5, с. 80–81]. Ниже представлено условие для измерения вращения аффинной карты (9):

$$1. \Delta(\theta_1, \theta_2), \theta_1 - \theta_2 \rightarrow 0 \text{ и} \\ \Delta(r_1, r_2), r_1 - r_2 \rightarrow 0; \quad (9)$$

$$2. \theta_1, \theta_2 \geq 45^\circ \text{ и } r_1, r_2 \rightarrow 1.$$

Далее $\Delta(\theta_1, \theta_2)$ делится 90 градусами для нормализации $[0, 1]$. Вращающий фактор определяется как: $\theta_r = 1 - \Delta(\theta_1, \theta_2) / 90^\circ$, где θ_r – вращающий фактор при $0 \leq \theta_r \leq 1$ и $0 \leq \Delta(r_1, r_2) \leq 1$, $r_R = 1 - \Delta(r_1, r_2)$, где r_R – фактор шкалирования.

Таким образом, осевая симметрия (10) формулируется как

$$R^T = \frac{(\theta_r + \theta_{1r} + \theta_{2r} + r_R + |r_1| + |r_2|)}{6}, \quad (10)$$

где R^T = значению осевой симметрии, $0 \leq R^T \leq 1$,

$$\theta_{1r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_1 \geq 45^\circ \\ 45^\circ - \theta_1, & \text{если } \theta_1 < 45^\circ \end{cases}, \quad 0 \leq \theta_{1r} \leq 1$$

$$\theta_{2r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_2 \geq 45^\circ \\ 45^\circ - \theta_2, & \text{если } \theta_2 < 45^\circ \end{cases}, \quad 0 \leq \theta_{2r} \leq 1$$

$$r_R = \text{фактору шкалирования, } 0 \leq r_R \leq 1.$$

Логарифмическая спиральная симметрия

Как и осевая симметрия, логарифмическая спиральная симметрия может быть количественно измерена свойствами подобия аффинного преобразования [2] с соблюдением следующих условий (11):

$$1. \Delta(\theta_1, \theta_2), \theta_1 - \theta_2 \rightarrow 0 \text{ и} \\ \Delta(r_1, r_2), r_1 - r_2 \rightarrow 0; \quad (11)$$

$$2. \theta_1, \theta_2 < 45^\circ \text{ и } r_1, r_2 \rightarrow 1.$$

Логарифмическая спиральная симметрия будет появляться, когда угол поворота аффинного преобразования более 45° . Логарифмической спиральной симметрии аналогична осевой симметрии (12):

$$L^T = \frac{(\theta_r + \theta_{1r} + \theta_{2r} + r_R + |r_1| + |r_2|)}{6}, \quad (12)$$

где L^T = значению логарифмической спиральной симметрии, $0 \leq L^T \leq 1$:

$$\theta_{1r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_1 < 45^\circ \\ \theta_1 - 45^\circ, & \text{если } \theta_1 \geq 45^\circ \end{cases}, \quad 0 \leq \theta_{1r} \leq 1$$

$$\theta_{2r} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_2 < 45^\circ \\ \theta_2 - 45^\circ, & \text{если } \theta_2 \geq 45^\circ \end{cases}, \quad 0 \leq \theta_{2r} \leq 1$$

Модуль рассуждений на основе правил. Оценка стоимости

Этот модуль содержит правила «ЕСЛИ-ТО» для оценки материальных затрат, затрат на оплату труда, затрат на оборудование и расходы на обработку. Модуль используется при выборе материалов и методов производства. Ориентировочная стоимость производства ювелирной продукции вычисляется авторами в данный момент.

Модуль автоматического создания модели

Модуль создания модели внутри проектной системы обеспечивает две опции

для автоматического производства ювелирного прототипа.

Первая базируется на компьютерно-числовой обработке (Matrix 3D) и системы автоматизированного производства для моделирования фрезерования прототипа с помощью ЧПУ обработки. Система проектирования рассчитывает необходимые траектории движения инструмента и коды числового управления.

Вторая опция – быстрое прототипирование, основанное на производстве прототипа путем наращивания [1]. Для этого законченный проект ЮУ загружается в формате стереолитографии. Предварительный файл с описанием создается с помощью программного пакета Matrix 3D.

Результаты исследования и их обсуждение

Набор из двадцати существующих художественных форм был извлечен из базы данных на основе проектных атрибутов. Процесс поиска и декодирования в базе данных занял в общей сложности 16 секунд. Лучшие соответствия отображаются на экране, где пользователь выбирает два из них для скрещивания (рис. 4).

Две художественные формы, выбранные экспертом, были использованы в качестве родителей на первом этапе эволюционного алгоритма. Используя операцию кроссовера, произведены два потомка, представленные на рис. 4, в и 4, г. Эти проекты индивидуально модифицированы с помощью операции мутации несколько раз, как показано на рис. 4, д и 4, е. Время вычисления эксперимента – 119 секунд. Пользователь может прервать процесс в любой момент времени. В этом случае конструкции в кружочках на рис. 4, д

и 4, е были признаны удовлетворительными и достойными для прототипирования. На рис. 4, ж и 4, з приведены 3D-модели в Matrix 3D, и ниже представлены реальные модели, выполненные на машине прототипирования.

Было проведено два эксперимента для демонстрации эффективности системы автоматизированного проектирования. В эксперименте 48 конструкций были извлечены из базы данных на основе входных наборов. Из них эксперт выбирал два в качестве родителей. Далее ЭА сгенерировал новые конструктивные проекты ЮУ, и эксперт вновь выбрал два новых родителя в каждом поколении. Эволюционный процесс завершился, когда эксперт остановился на одной из сгенерированных конструкций. Для эксперимента среднее время получения результатов – 39,2 секунды. В среднем пользователь системы автоматизированного проектирования тратит 3313,6 секунд на обработку ЮУ до получения желаемого эффекта.

Заключение

1. В настоящей работе на основании результатов экспериментальных исследований, полученных при сборе и анализе данных ювелирного предприятия, разработана система автоматизированной проектной среды художественных форм ювелирных украшений (ЮУ).

2. Разработанная система автоматизированной проектной среды демонстрирует эффективный поиск по коллекции предыдущих конструкций и нахождение вариантов, которые соответствуют лучшим заявленным проектным предпочтениям, при этом, сохраняя хорошее разнообразие вариантов дизайна.

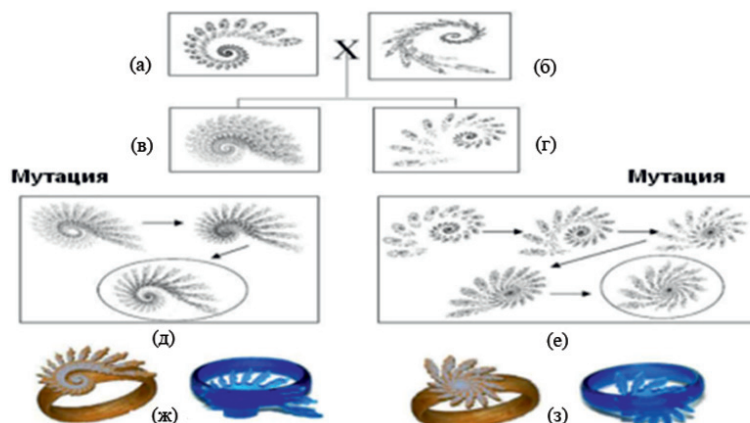


Рис. 4. История эволюции художественных форм, их CAD и RP-моделей

3. На основании первоначальных проектных спецификаций создано интерактивное управление эволюционным алгоритмом для генерации богатого набора альтернативных форм и конструкций, а также расчет приблизительной оценки затрат на ранней стадии процесса проектирования.

4. Предложенная система проектирования позволяет создавать новые проекты даже при постановке нечетких задач с высокой степенью неопределенности.

Список литературы

1. Евсеев А.В., Камаев В.С., Коцюба Е.В. Лазерная стереолитография // Современные лазерно-информационные и лазерные технологии: сборник трудов ИЛИТ РАН. – Интерконтакт Наука, 2005. – С. 40–42.

2. Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства: Учебное пособие. – Казань: ТГПУ, 2013. – 188 с.

3. Норенков И.П., Арутюнян Н.М. Эволюционные методы в задачах выбора проектных решений // НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – Эл № ФС 77 – 48211.

4. Чеблакова Е.А. Применение эволюционных алгоритмов в САПР ювелирных изделий // Молодежь и наука: проспект свободный: статьи Междун. науч. конф. (Красноярск, 11–15 апреля 2015 г.). – Красноярск, 2015. – URL: <http://www.conf.sfu-kras.ru/mn2015> (дата обращения: 17.01.16).

5. Barnsley M. Fractal Everywhere. – San Francisco: Academic Press, 1993. – P. 80–81.

6. Huntley H.E. The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. – New York: Dover Publications, 1970.

7. Hutchinson John E. Fractals and Self Similarity. – Indian University Mathematics Journal. – 1981. – Vol. 30, № 5. – P. 713–747.

References

1. Evseev A.V., Kamaev V.S., Kocjuba E.V. Lazernaja stereolitografija // Sovremennye lazerno-informacionnye i lazernye tehnologii: sbornik trudov IPLIT RAN. Interkontakt Nauka, 2005. pp. 40–42.

2. Ignatev Ju.G. Analiticheskaja geometrija. Chast II. Affinnye i evklidovy prostranstva: Uchebnoe posobie. Kazan: TGGPU, 2013. 188 p.

3. Norenkov I.P., Arutjunjan N.M. Jevoljucionnye metody v zadachah vybora proektnyh reshenij // NAUKA i OBRAZOVANIE: nauchnoe izdanie MG TU im. N.Je. Bauman. MG TU im. N.Je. Bauman, 2007. Jel no. FS 77 48211.

4. Cheblakova E.A. Primenenie jevoljucionnyh algoritmov v SAPR juvelirnyh izdelij // Molodezh i nauka: prospekt svobodnyj: stati Mezhdun. nauch. konf. (Krasnojarsk, 11–15 aprelya 2015 g.). Krasnojarsk, 2015. – URL: <http://www.conf.sfu-kras.ru/mn2015> (data obrashhenija: 17.01.16).

5. Barnsley M. Fractal Everywhere. San Francisco: Academic Press, 1993. pp. 80–81.

6. Huntley H.E. The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. New York: Dover Publications, 1970.

7. Hutchinson John E. Fractals and Self Similarity. Indian University Mathematics Journal. – 1981. Vol. 30, no. 5. pp. 713–747.