

УДК 519.852

## ОБ ОДНОМ НЕВЫПУКЛОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПРОИЗВОДСТВАМИ

Осечкина Т.А., Севодин М.А.

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»,  
Пермь, e-mail: m.sevodin@mail.ru

В настоящей статье исследуется задача распределения производственных мощностей между предприятиями отрасли. Рассматриваются ситуации, в которых целевая функция соответствует суммарному выпуску производствами продукции, а ограничения связаны с количеством используемых сырьевых материалов нескольких видов. Для таких задач в работе модифицируется известный метод решения: применение для доказательства существования и единственности решения задачи условий Куна-Таккера. Если обычно эти условия применялись к вогнутым функциям, то в работе рассмотрены обобщения этих свойств – К-вогнутость, то есть исследованы такие функции, для которых вогнутость выполняется только на конусе К направлений. Установлены достаточность и необходимость условий Куна-Таккера для такого расширения классов функций. В случае числовых функций двух переменных построенные условия имеют наиболее простую и наглядную форму. Полученные условия позволили задачу распределения мощностей рассматривать в более широком ракурсе.

**Ключевые слова:** математическое программирование, распределение мощностей, вогнутость, конус направлений

## ABOUT ONE NONCONVEX CASE OF RESOURCE ALLOCATION PROBLEM BETWEEN ENTERPRISES

Osechkina T.A., Sevodin M.A.

FGBOU VPO «The Perm national research polytechnical university», Perm, e-mail: m.sevodin@mail.ru

The production capacity allocation case between enterprises is researched in the article. Situations when object function equals total production output and limited by the amount of different type raw materials are overviewed. Modified Kuhn-Tucker method conditions are used. These conditions are usually applied to a concave function, but in applied case such functions are studied for which the concavity is performed only on the cone K directions. The sufficiency and necessity of the Kuhn-Tucker conditions for such extension classes of functions are established. In the case of numerical functions of two variables have conditions built the most simple and clear form. This allowed to see the production capacity allocation problem in a broader perspective.

**Keywords:** mathematical programming, capacity allocation, concavity, cone of directions

Современное промышленное производство характеризуется высоким развитием производственных сил и высокими темпами научно-технического прогресса. Поэтому определение оптимальных вариантов планирования и управления производством представляет собой актуальную проблему. Показатели доходов, затрат, объемов производства, возникающих в процессе производства, необходимо точно определить и оценить, а затем управлять ими для достижения желаемого финансового результата. Эти задачи могут быть решены только с использованием соответствующих экономико-математических моделей и методов.

Существующие методы решения задач оптимального программирования [2, 3, 4, 7] и современные вычислительные средства позволяют реализовывать в практических задачах такие экономико-математические модели.

Основными компонентами математического программирования являются целевая функция и система ограничений. Традиционными требованиями к функциям здесь

являются вогнутость целевой и вогнутость функций, определяющих систему ограничений. С математической точки зрения, эти требования делают условия Куна-Таккера достаточными для существования и единственности решения задачи математического программирования, а с экономической – обеспечивают существование равновесия в конкурентном взаимодействии между промышленностью и рынком. Производство стремится максимизировать доход от своей продукции. Этой цели противостоит рынок, который из-за того, что он платит производству, добывается (за счет управления ценами на сырье, которое производство приобретает на рынке) минимизации дохода производства. Отказ от предположений вогнутости функций в задачах оптимизации приводит к тому, что нельзя уже утверждать существования и единственности конкурентного равновесия. Известно [7], что в случае, например, растущей производительности (невогнутость целевой функции) производство стоит перед дилеммой: либо работать в пользу социального оптимума

и сталкиваться со значительными убытками, либо сбалансировать бюджет и получать доход, зная, что, скорее всего, ситуация не соответствует оптимальным параметрам.

В данной статье исследуются ситуации, когда вогнутости в названных требованиях нет, но тем не менее оптимальность сохраняется. Для этого в работе рассматривается  $K$  – вогнутость [6] функций и приводятся некоторые расширения теоремы Куна-Таккера.

**Постановка задачи. Решение в вогнутом случае.** Рассмотрим задачу распределения некоторого запаса ресурсов между производствами (см., напр., [1]). В этой задаче нужно определить такой совместный план  $x = (x_1, \dots, x_n)$  интенсивностей  $n$  производств одной отрасли, что его выполнение приводит к наибольшему значению общего выпуска продукции в условиях ограниченности запаса  $m$  видов ресурсов (напр., энергии, материала и т.д.). Таким образом, целевая функция  $f(x)$  представляет собой суммарный выпуск продукции всеми производствами, соответствующий уровню производства в промышленности, равному  $x$ . Кроме того, промышленности требуется  $m$  видов сырья, при этом наличное количество сырьевого материала вида  $i$  составляет  $b_i, i = 1, \dots, m$ . Пусть  $g_i^1(x)$  – количество сырья  $i$ , которое необходимо при уровне производства, равному  $x$ , а  $g_i(x) = b_i - g_i^1(x)$ .

Итак, математическая модель задачи является классической задачей математического программирования [2] и имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \max, \\ g_i(x) &\geq 0, i = 1, \dots, m, x \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно (условия Куна-Таккера, см., напр., [2]), что в случае дифференцируемости функций из (1) и выполнения условия регулярности [2] для оптимальной точки  $x^*$  задачи (1) должны выполняться следующие условия:

- 1)  $x^*$  – допустимая точка;
- 2) существуют множители  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , такие, что  $\lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$ ;

$$3) \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0.$$

Приведенные условия являются необходимыми. Достаточность условий появляется при дополнительных требованиях на функции  $f(x), g_i(x), i = 1, \dots, m$ . Именно [2], если названные функции вогнуты, то точка  $x^*$ , удовлетворяющая условиям Куна-Таккера, является решением задачи (1).

С экономической точки зрения свойство вогнутости функций  $f(x), g_i(x), i = 1, \dots, m$ ,

связано [1] с представлением об убывающей эффективности производства, т.е. о снижении предельных норм выпуска и увеличении предельных норм затрат при расширении масштабов (интенсивностей) производства. Эти свойства в экономической теории обычно принимаются без ограничений, хотя понятно, что на самом деле они должны часто не выполняться. Так происходит в силу причин технологического характера, из-за политического устройства экономики, в силу, наконец, причин экономического характера. Поэтому в исследованиях подобного рода естественно пытаться выделять условия, обобщающие условия вогнутости, что и будет сделано в следующем пункте статьи.

**$K$  – вогнутые функции.** Приведем определение выпуклого в конусе направлений  $K$  множества, или, более коротко,  $K$  – выпуклого множества [6].

Определение 1. Множество  $X$  в пространстве  $R^n$  называется  $K$  – выпуклым множеством, если из  $x, y \in X, \pm(x - y) \in K$  следует, что отрезок, соединяющий точки  $x, y$ , принадлежит множеству  $X$ .

Здесь  $\pm(x - y) \in K$  означает, что по крайней мере один из векторов  $(x - y), (y - x)$  принадлежит  $K$ .

Заметим, что в этом определении в качестве множества  $K$  можно взять произвольное множество.

Будем вновь считать  $K$  выпуклым конусом в  $R^n$  и рассмотрим скалярную функцию  $f(x)$  на некотором множестве  $X$  из  $R^n$ .

Определение 3. Функция  $f$ , определенная на  $K$  – выпуклом множестве  $X$  в  $R^n$ , называется  $K$  – вогнутой на  $X$ , если

$$f(\lambda x + \mu y) \geq \lambda f(x) + \mu f(y) \quad (2)$$

для любых  $x, y \in X, \pm(x - y) \in K$  и любых  $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ .

В случае выполнения в (2) строгого неравенства при  $x \neq y$  и  $\lambda, \mu \in (0, 1)$  функция  $f$  называется строго  $K$  – вогнутой на  $X$ .

Пусть функция  $f(x)$ , определенная на  $K$  – вогнутой на  $R^n$ , множество  $X = \{x \in R^n \mid f(x) \geq f(a)\}$  является  $K$  – выпуклым. В самом деле, так как множество  $X$  содержит  $a$ , то  $X \neq \emptyset$ . Функция  $f(x) - K$  – выпуклая и поэтому для любой выпуклой линейной комбинации  $\lambda x + \mu y$  точек  $x, y$  из  $X$ , таких, что  $\pm(x - y) \in K$ , имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &\geq \lambda f(x) + \mu f(y) \geq \\ &\geq (\lambda + \mu)f(a) = f(a), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Перед тем, как сформулировать следующее утверждение, введем один класс мно-

жеств. Будем говорить [6], что множество  $X$  является  $l$ -множеством, если выпуклая оболочка  $C(X)$  множества  $X$  есть объединение самого  $X$  и точек отрезков, соединяющих всевозможные пары точек из  $X$ . Пусть  $K = K(R_+^n) = R^n \setminus (\pm R_+^n)$ . Если в этом случае  $X$  не содержит положительных точек, то и  $C(X)$  их также не содержит. Поэтому из [5, 6] вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть  $X = K(R_+^n)$  – выпуклое  $l$ -множество, не содержащее положительных точек. Тогда существует отделяющая гиперплоскость  $\langle p, x \rangle = 0$  с полуположительным вектором нормали  $p \geq 0$ , такая, что полупространство  $\langle p, x \rangle \leq 0$  содержит множество  $X$ .

Введем в рассмотрение множество  $Y$ :

$$Y = \{y \in R^{m+1} \mid y = \varphi(x), x \in X\},$$

где отображение  $\varphi: X \rightarrow R^{m+1}$  с некоторой фиксированной точкой  $\hat{x} \in X$  определяется по (1) следующими выражениями для компонент  $\varphi_i(x) (i = 0, 1, \dots, m)$  вектор-функции  $\varphi(x)$ :

$$\varphi_0(x) = f(x) - f(\hat{x}),$$

$$\varphi_i(x) = g_i(x) (i = 1, \dots, m).$$

Имеет место

**Теорема 1.** (ср.[2]) Пусть множество  $X$  выпукло, а максимизируемая функция  $f$  и функции  $g_i(x) (i = 1, \dots, m)$  таковы, что множество  $Y = K(R_+^{m+1})$  – выпукло и является  $l$ -множеством. Пусть также выполнено условие Слейтера: в  $X$  существует точка  $c$ , для которой  $g_i(c) > 0 (i = 1, \dots, m)$ . Тогда, если  $\hat{x}$  – какое-либо решение задачи максимизации при ограничениях (1), то существуют неотрицательные числа  $\lambda_i (i = 1, \dots, m)$ , такие, что

$$(a) \lambda_i g_i(\hat{x}) = 0 (i = 1, \dots, m),$$

(b)  $\hat{x}$  максимизирует лагранжиан задачи (1) на множестве  $X$  при указанных  $\lambda_i$ .

Доказательство проводится по схеме, предложенной в [5].

Приведем одну из возможных конкретизаций теоремы 1. Рассмотрим случай  $m = 1, n = 2$ . Возьмем за  $X$  верхнюю полуплоскость, то есть  $X = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 \geq 0\}$ . Обозначим  $g(x) = g_1(x)$ . Отображение  $\varphi(x) = (f(x), g(x))$  будем считать непрерывно дифференцируемым и локально взаимно однозначным в  $X$ . В этих предположениях справедлива

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  на границе  $\Gamma = \{x = (x_1, 0), x_1 \in R^1\}$  множества  $X$  удовлетворяют следующим условиям:

$$(1) f'_{x_1}(x) + g'_{x_1}(x) > 0;$$

$$(2) |(f'_{x_1}(x) - g'_{x_1}(x)) / (f'_{x_1}(x) + g'_{x_1}(x))| \leq 1.$$

Тогда если  $\hat{x}$  – какое-либо решение задачи максимизации при ограничениях, то существует неотрицательное число  $\lambda$ , такое, что

$$(a) \lambda g(\hat{x}) = 0,$$

(b)  $\hat{x}$  максимизирует лагранжиан на множестве  $X$  при указанном  $\lambda$ .

В заключение приведем одно из возможных следствий утверждения 1 [6].

**Теорема 3.** Пусть в задаче максимизации с ограничениями (1) функции  $f: X \rightarrow R$  и  $g_i: X \rightarrow R, i = 1, \dots, m$  являются непрерывно дифференцируемыми на выпуклом множестве  $X$ , градиент целевой вогнутой на  $X$  функции  $f$  при любом  $x \in X$  принадлежит положительному ортанту  $R_+^n$ , а ограничения  $g_i, i = 1, \dots, m, K(R_+^n)$  вогнуты на  $X$ . Предположим, что в допустимой точке  $\hat{x}$  выполнены условия Куна-Таккера. Тогда если для любой допустимой точки  $x$  задачи (8) разность  $x - \hat{x}$  не принадлежит множеству  $R_+^n$ , то  $\hat{x}$  – решение задачи (1).

## Список литературы

1. Багриновский К.А. и др. Экономико-математические методы и модели. Микроэкономика / К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М.: Изд-во РУДН, 1999. – 183 с.
2. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единный подход / У. Зангвилл – М.: Советское радио, 1973. – 312 с.
3. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин – М.: Мир, 1964. – 839 с.
4. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации / Ю.Е. Нестеров. – М.: Изд-во МЦНМО, 2010. – 281 с.
5. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972. – 519 с.
6. Севодин М.А. Множества, выпуклые в конусе направлений / М.А. Севодин // Изв. вузов. Матем., 2013. – № 10. – С. 73–76.
7. Экланд И. Элементы математической экономики / И. Экланд. – М.: Мир, 1983. – 248 с.

## References

1. Bagrinovskij K.A. i dr. Jekonomiko-matematicheskie metody i modeli. Mikrojekonomika / K.A. Bagrinovskij, V.M. Matjushok. M.: Izd-vo RUDN, 1999. 183 p.
2. Zangvill U. Nelinejnoe programmirovanie. Edinyj podhod / U. Zangvill M.: Sovetskoe radio, 1973. 312 p.
3. Karlin S. Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i jekonomike / S. Karlin M.: Mir, 1964. 839 p.
4. Nesterov Ju.E. Metody vypukloj optimizacii / Ju.E. Nesterov. M.: Izd-vo MCNMO, 2010. 281 p.
5. Nikajdo H. Vypuklye struktury i matematicheskaja jekonomika / H. Nikajdo. M.: Mir, 1972. 519 p.
6. Sevodin M.A. Mnozhestva, vypuklye v konuse napravlenij / M.A. Sevodin // Izv. vuzov. Matem., 2013. no. 10. pp. 73–76.
7. Jekland I. Jelementy matematicheskoy jekonomiki / I. Jekland. M.: Mir, 1983. 248 p.