

УДК 620.172.212/ 624.042.7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С НЕПРЕРЫВНЫМИ И ДИСКРЕТНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В.

*ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный технический университет»,
Липецк, e-mail: pm03sav@mail.ru*

В статье приводится анализ математических моделей по оценке напряженно-деформированного состояния неоднородных анизотропных сред на примере конструкций, армированных непрерывными и дискретными стальными волокнами. Авторами на основе экспериментальных данных разработана модель, основанная на условиях равновесия нормального сечения. Для изгибаемых в плоскости симметрии поперечного сечения элементов система уравнений для расчета прочности по деформационной модели включает жесткостные характеристики, определяемые через напряжения в матрице, армированной дискретными волокнами. Высказано предположение о наличии общих недостатков у современных математических моделей, определяющих значения напряжений в поперечных сечениях композитов. Предложена модель на основе кусочно-линейных характеристических кривых, позволяющая определять значения напряжений в композитах, армированных дискретными волокнами сложной геометрии, – таких как сталефиброшлакобетон, армированный стальной фиброй с единичными отгибами на концах или волнистой фиброй.

Ключевые слова: модель напряженно-деформированного состояния, дискретное волокно, непрерывное волокно, композит, условия равновесия внутренних сил

DETERMINISTIC MATHEMATICAL MODEL OF MATRIX'S STRESS-STRAIN STATE OF WITH CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS FIBERS

Korneev A.M., Buzina O.P., Sukhanov A.V.

*Federal State Educational Institution of Higher Education Lipetsk State Technical University,
Lipetsk, e-mail: pm03sav@mail.ru*

The article provides an analysis of mathematical models according to diagnosis of the stress-strain state of anisotropic medium on the example of the construction, which is reinforced by continuous, discontinuous and discrete steel fibers. The authors, based on experimental data, developed a model, based on the terms of the normal section's balance. For the bent elements in the plane of the symmetry of transverse section, to calculate the strength for the deformation model a system of equations includes stiff characteristics, determined by the voltage in the matrix, which is reinforced by discrete fibers. It is suggested that the presence of general flaws in modern mathematical models that define the voltage values in the cross sections of the composites. A model based on the piecewise-linear characteristic curves is suggested, which allows to determine the voltage values in the composites, reinforced which are by discrete fibers of complex geometry, such as concrete reinforced steel fiber with a single limb at the ends of a fiber or wavy fiber.

Keywords: model of stress-strain state, discrete fibers, continuous fiber, composite, the conditions of internal forces' equilibrium

В настоящее время исследователями всё больше внимания уделяется проблемам обеспечения надёжности зданий и сооружений. Надёжность сооружений, прежде всего, зависит от надёжности их конструктивных элементов, это перемычки, стропильные фермы, стеновые панели, колонны. Большое значение играет выбор математических моделей, адекватно описывающих напряженно-деформированное состояние таких конструкций. Основу таких моделей составляют диаграммы деформирования композита и волокна, которые являются интегральной характеристикой физико-механических свойств материалов и могут быть описаны различными математическими выражениями, что предопределяет точность

получаемых расчётных данных. В качестве основных математических моделей, описывающих механику разрушения изгибаемых конструкций из композитов, армированных непрерывными волокнами (арматура), целесообразно использовать нормативную модель согласно современным нормам проектирования и модели расчета на основе реальных диаграмм деформирования материалов.

Анализ математических моделей по оценке напряженно-деформированного состояния анизотропных сред на примере железобетонных конструкций показал, что более точно отразить фактическое состояние композитных элементов под нагрузкой позволяет нелинейно-деформационная модель, предложенная В.Н. Байковым,

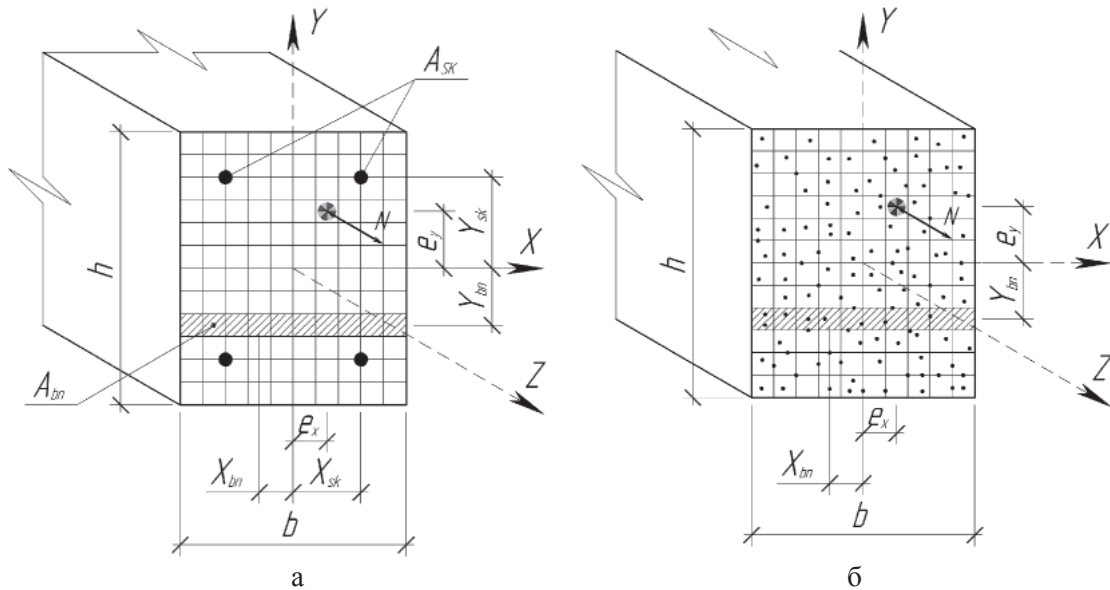


Схема поперечного сечения изгибаемого неоднородного элемента:
а – с непрерывными волокнами; б – с дискретными волокнами

Н.И. Карпенко, Б.С. Расторгуевым [1, 2, 5]. Данная модель основывается на условиях равновесия нормального сечения, разбитого на дискретные участки матрицы композита и непрерывного стального волокна (рис. 1, а). Учет физической нелинейности работы конструкций производится с помощью математического описания диаграмм деформирования каждого композита и применения шагово-итерационного метода, реализующего способ упругих решений А.А. Ильюшина. Суть метода заключается в том, что решение нелинейной задачи получается в виде последовательности решений линейных задач, сходящихся к результату. Условия равновесия внешних и внутренних сил при любом нагружении записываются в виде

$$\begin{cases} N_z = \sum_n \sigma_{bn} A_{bn} + \sum_k \sigma_{sk} A_{sk}; \\ M_x = -\sum_n \sigma_{bn} A_{bn} x_n - \sum_k \sigma_{sk} A_{sk} x_k; \\ M_y = -\sum_n \sigma_{bn} A_{bn} y_n - \sum_k \sigma_{sk} A_{sk} y_k, \end{cases} \quad (1)$$

где N_z – продольная сила; M_x – изгибающий момент в направлении оси X ; M_y – изгибающий момент в направлении оси Y .

Выбранный для исследования способ описания диаграмм деформирования материалов является наиболее оптимальным, поскольку он позволяет вычислять напряжения в матрице и в стальном волокне (арматуре) по единообразным зави-

симостям на каждом этапе кратковременного нагружения:

$$\begin{cases} \sigma_b = E_b \nu_b \varepsilon_b; \\ \sigma_s = E_s \nu_s \varepsilon_s, \end{cases} \quad (2)$$

где σ_b , σ_s – соответственно напряжения в матрице и волокне; E_b , E_s – модули упругости материалов; ε_b , ε_s – относительные деформации.

По результатам многочисленных опытов к настоящему времени как в нашей стране, так и за рубежом разработано большое количество различных способов описания диаграмм деформирования матрицы и стального стержня (непрерывного волокна), выдвинуто множество предложений по их построению [4, 7]. В работах В.В. Адичева, В.Н. Байкова, Н.И. Карпенко и др. [2] предложены аналитические зависимости для описания диаграмм деформирования материалов $\sigma = f(\varepsilon)$. На основании выполненных теоретических и экспериментальных исследований был сделан вывод, что наиболее удовлетворительно производится аппроксимация реальных диаграмм деформирования с помощью сплайн-функций или по способу переменных секущих модулей.

При аналитическом описании таких диаграмм используется коэффициент изменения секущего модуля, определяемый из условия

$$\nu_b = \bar{\nu}_b \pm (\nu_0 - \bar{\nu}_b) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2}, \quad (3)$$

где $\bar{\nu}_b$ – значение коэффициента изменения секущего модуля матрицы ν_b ($0 < \nu_b < 1$)

в вершине диаграммы ($\bar{v}_b = \frac{\bar{\sigma}_b}{\varepsilon_{br} E_b^0}$, $\bar{\sigma}_b = R_b -$ прочность матрицы; ε_{br} – относительная деформация при максимальном напряжении; E_b^0 – начальное значение модуля упругости матрицы); η – уровень напряжений ($\eta = \frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}_b}$, $0 < \eta < 1$); v_0 – значение коэффициента в начале диаграммы ($v_0 = 1$ при построении восходящей ветви диаграммы и $\bar{v}_b = 2,05\bar{v}$ при построении нисходящей); ω_1, ω_2 – параметры кривизны диаграммы, определяемые по формулам:

- для восходящей ветви:
- для нисходящей ветви:

$$\omega_1 = 2 - 2,5\bar{v}_b, \quad \omega_2 = 1 - \omega_1;$$

$$\omega_1 = 1,95\bar{v}_b - 0,138, \quad \omega_2 = 1 - \omega_1. \quad (4)$$

Секущий модуль упругости матрицы при любом значении напряжения определяется по формуле

$$E'_b = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_b} = v_b E_b^0. \quad (5)$$

В ряде случаев удобно использовать зависимости, предложенные в европейских нормативных документах (ЕКБ-ФИП):

$$\frac{\sigma_b}{R_b} = \frac{\left(\frac{E_b^0 \varepsilon_{br}}{R_b} \right) \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{br}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{br}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_b^0 \varepsilon_{br}}{R_b} - 2 \right) \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{br}}}. \quad (6)$$

Данные аналитические выражения применимы для описания с высокой достоверностью диаграмм растяжения и сжатия низкопрочностных композитов, в частности мелкозернистых матриц.

После выполнения соответствующих преобразований система (1) приводится к виду

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ k_x \\ k_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

или

$$\{F\} = [R(\{F\}, S)] \times \{U\{F\}, S\}, \quad (8)$$

где $\{F\} = \{N_z, M_x, M_y\}^m$ – вектор-столбец внешних сил, принимаемый в зависимости от схемы нагружения; $[R(\{F\}, S)]$ – матрица жесткости для нормального сечения, являющаяся функцией $\{F\}$ и S , элементы которой корректируются на каждом этапе нагружения; $\{U\{F\}, S\} = \{\varepsilon_z, k_x, k_y\}^T$ – вектор-стол-

бец деформаций, получаемый в результате решения системы уравнений (8).

Затем, исходя из гипотезы плоского деформирования, вычисляются деформации в матрице и стальном волокне для каждого дискретного участка:

$$\begin{cases} \varepsilon_{bn} = \varepsilon_z - k_x x_{bn} - k_y y_{bn}; \\ \varepsilon_{sk} = \varepsilon_z - k_x x_{sk} - k_y y_{sk}, \end{cases} \quad (9)$$

где ε_z – деформации элемента на уровне продольной оси Z ; k_x, k_y – соответственно значения кривизны в направлении осей X и Y ; x_{bn}, y_{bn} – координаты центра тяжести дискретных элементов матрицы; x_{sk}, y_{sk} – координаты центра тяжести дискретных элементов непрерывных стальных волокон.

Деформационная модель для расчета прочности включает:

- уравнения равновесия внешних и внутренних сил в нормальном сечении:

$$M_x = \sum_{i=y_{red}}^h \sigma_{bi} A_{bi} (V_i - y_{red}) + \quad (10)$$

$$+ \sum_{i=1}^{y_{red}} \sigma_{bii} A_{bi} (y_{red} - V_i) + \sum_j \sigma_{sj} A_{sj} y_j;$$

$$N = \sum_{i=y_{red}}^h \sigma_{bi} A_{bi} + \sum_{i=1}^{y_{red}} \sigma_{bii} A_{bi} + \sum_j \sigma_{sj} A_{sj}; \quad (11)$$

– уравнения, устанавливающие распределение деформации в матрице и непрерывном волокне по нормальному сечению, исходя из условия плоского поворота и плоского смещения сечения (гипотезы плоских сечений):

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} V_i; \quad \varepsilon_{sj} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} y_{sj}; \quad (12)$$

– уравнения, определяющие связь между напряжениями и относительными деформациями матрицы и непрерывного волокна в композите

$$\sigma_{bi} = f(\varepsilon_{bi}); \quad \sigma_{sj} = f(\varepsilon_{sj}). \quad (13)$$

В уравнениях (10)–(13): M_x, N – изгибающий момент и продольная сила от внешней нагрузки; A_{bi}, V_i, σ_{bi} и ε_{bi} – площадь, расстояние от нижней растянутой грани элемента до центра тяжести i -го элементарного слоя матрицы композита, напряжение и деформация на уровне его центра тяжести; $A_{sj}, y_{sj}, \sigma_{sj}$ и ε_{sj} – площадь, координаты центра тяжести j -го непрерывного волокна, напряжение и деформация в нем; ε_0 – относительная деформация волокна, расположенного на пересечении выбранных осей X и Y ; $1/r_x$ – кривизна в плоскости действия момента $\bar{M}_x$.

Для изгибаемых в плоскости симметрии поперечного сечения элементов система уравнений для расчета прочности по деформационной модели имеет вид

$$\begin{cases} M_x = D_{11} \frac{1}{r_x} + D_{12} \varepsilon_0; \\ N = D_{12} \frac{1}{r_x} + D_{22} \varepsilon_0, \end{cases} \quad (14)$$

где D_{ij} ($i, j = 1, 2$) – жесткостные характеристики, определяемые по формулам

$$D_{11} = \sum_{i=y_{red}}^h A_{bi} (V_i - y_{red})^2 E_b v_{bi} + \sum_{i=1}^{y_{red}} A_{bi} (y_{red} - V_i)^2 E_{bt} v_{bt} + \sum_j A_{sj} y_j^2 E_{sj} v_{sj}; \quad (15)$$

$$D_{12} = \sum_{i=y_{red}}^h A_{bi} (V_i - y_{red}) E_b v_{bi} + \sum_{i=1}^{y_{red}} A_{bi} (y_{red} - V_i) E_{bt} v_{bt} + \sum_j A_{sj} y_j E_{sj} v_{sj}; \quad (16)$$

$$D_{22} = \sum_{i=y_{red}}^h A_{bi} E_b v_{bi} + \sum_{i=1}^{y_{red}} A_{bi} E_{bt} v_{bt} + \sum_j A_{sj} E_{sj} v_{sj}. \quad (17)$$

Коэффициенты упругости i -го участка матрицы v_{bi} , v_{bti} и j -го непрерывного волокна v_{sj} определяются по формулам

$$v_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \varepsilon_{bi}}; \quad v_{bti} = \frac{\sigma_{bti}}{E_{bt} \varepsilon_{bti}}; \quad v_{sj} = \frac{\sigma_{sj}}{E_{sj} \varepsilon_{sj}}. \quad (18)$$

Напряжение и относительные деформации сжатой и растянутой матрицы композита и стального непрерывного волокна σ_{bi} , ε_{bi} , σ_{bti} , ε_{bti} , σ_{sj} , ε_{sj} определяют из приведенных выше зависимостей для диаграмм состояния матрицы и стального волокна (3)–(6).

Для определения напряжений и относительных деформаций сжатого и растянутого элемента композиционного материала, армированного дискретными волокнами (рис. 1, б), σ_{fbi} , ε_{fbi} , σ_{fbti} , ε_{fbti} необходимо проведение дополнительных исследований и соответствующих экспериментов для получения математических зависимостей $\sigma_{fbi} = f(\varepsilon_{fbi})$ и $\sigma_{fbti} = f(\varepsilon_{fbti})$, описывающих работу композиционного материала как в упругой стадии, так и в стадии трещинообразования.

Выводом таких зависимостей занималось множество исследователей. Кокс полагал, что тонкое дискретное волокно длиной l заключено в упругой матрице, а соединение волокна с матрицей является идеальным. При создании напряжений в волокне, действующих в осевом направлении, деформации на границах раздела матрицы и волокна являются одинаковыми. Торцы волокон в такой модели не передают напряжений. Другую модель предложил Аутуотер. Он показал, что окружающая дискретное волокно матрица при затвердении сжимается, что приводит к появлению на поверхности раздела матрицы и волокна сжимающих напряжений. При действии нагрузки в на-

правлении волокна на поверхности раздела возникают силы трения, которые обуславливают появление в волокне напряжения σ_f . Если использовать коэффициент трения μ и предел текучести матрицы σ_{my} , то можно определить σ_f . Модель Кокса впоследствии была модифицирована Дау и Розеном.

Перечисленные модели обладают общими недостатками: они описывают поведение композитов, армированных дискретными волокнами, которые ориентированы перпендикулярно плоскости нормального сечения элемента. Более того, данные модели становятся неприменимы при описании работы композитов, армированных волокнами сложной геометрии, отличной от прямой и цилиндрической, – стальные фибры с единичными и множественными отгибами по обоим концам, волнистые фибры. Поведение таких композитов описывается более сложными уравнениями. Последние экспериментальные и теоретические исследования [8, 6] позволили на основе кусочно-линейных характеристических кривых получить более приемлемые зависимости, определяющие значения σ_{fbi} :

– при $\varepsilon_{fbi} = 0$: $\sigma_{fbi} = 0$;

– при

$$0 < \varepsilon_{fbi} < 0,24 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)} (1 + 8V_f) \cdot 10^{-3} :$$

$$\sigma_{fbi} = \frac{\varepsilon_{fbi} (E_b A_b + E_f A_f)}{A_b + A_f};$$

– при

$$\varepsilon_{fbt} = 0,24 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} :$$

$$\sigma_{fbt} = \frac{\varepsilon_{fbt}(E_b A_b + E_f A_f)}{A_b + A_f} \cdot \left(1 - \frac{7 \cdot 10^{-4}}{\mu_{fv}}\right);$$

– при

$$0,24 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{fbt} \leq 2,4 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} :$$

$$\sigma_{fbt} = \frac{0,24 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot (E_b A_b + E_f A_f)}{A_b + A_f} +$$

$$+ \varepsilon_{fbt} \left(\frac{\left(\sum_{j=1}^N P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}} \right) - 0,24 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot (E_b A_b + E_f A_f)}{(A_f + A_b) \left(2,16 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \right)} \right);$$

– при

$$2,4 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{fbt} \leq 7,2 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot W_H :$$

$$\sigma_{fbt} = \frac{\sum_{j=1}^N P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}}}{A_b + A_f} - \varepsilon_{fbt} \left(\frac{\sum_{j=1}^N 0,3 P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}}}{(A_f + A_b) \left(4,8 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \right)} \right);$$

– при

$$7,2 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot W_H < \varepsilon_{fbt} \leq 14,4 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot W_H :$$

$$\sigma_{fbt} = \frac{\sum_{j=1}^N 0,7 P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}}}{A_b + A_f} - \varepsilon_{fbt} \left(\frac{\sum_{j=1}^N 0,1 P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}}}{(A_f + A_b) \left(7,2 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \right)} \right);$$

– при

$$14,4 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot W_H < \varepsilon_{fbt} \leq 19,2 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot W_H :$$

$$\sigma_{fbt} = \frac{\sum_{j=1}^N 0,6 P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}}}{A_b + A_f} - \varepsilon_{fbt} \left(\frac{\sum_{j=1}^N 0,2 P_{H,j}(k_A)^{\frac{3n}{r_{cp}}}}{(A_f + A_b) \left(4,8 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \right)} \right);$$

– при

$$19,2 \cdot \sqrt[3]{R_{bt}(t)}(1+8V_f) \cdot 10^{-3} \cdot W_H < \varepsilon_{fbt} :$$

$$\sigma_{fbt} = 0.$$

Здесь

$$W_H = 1 - 0,02 \bar{\sigma}_b; \quad P_H = (355 + 11 \bar{\sigma}_b)(0,55 + 0,015 l_{f,an}); \quad (19)$$

W_H, P_H – соответственно абсцисса и ордината первой характеристической точки кусочно-линейной диаграммы «нагрузка-смещение», описывающей работу дискретного волокна

при смещении из матрицы [6]; l_{fan} – длина заделки дискретного волокна (мм); N – количество дискретных волокон в композите; n – количество дискретных волокон, расположенных в радиусе 10 мм и влияющих на работу единичного центрального волокна; r_{cp} – среднее расстояние до фибр, расположенных в радиусе 10 мм; k_A – коэффициент, учитывающий работу центральной фибры в результате влияния на неё соседних фибр [3].

Список литературы

1. Карпенко Н.И., Радайкин О.В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 3. – С. 10–16.
2. Карпенко, Н. И. Общие модели механики железобетона // Стройиздат. – М., 1996. – 419 с.
3. Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В., Шипулин И.А. Математическое моделирование процесса взаимодействия стальных фибр в сечении изгибаемого элемента из staleфиброшлакобетона // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 4–3. – С. 506–511.
4. Панфилов Д.А., Пишулев А.А., Гимадетдинов К.И. Обзор существующих диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных нормативных документах // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – № 3. – С. 80–84.
5. Расторгучев Б.С. Расчет прочности нормальных сечений железобетонных элементов с учетом предельных деформаций материалов // Методы расчета и конструирования железобетонных конструкций: сборник научных трудов МГСУ. – 1996.
6. Черноусов Н.Н., Черноусов Р.Н., Суханов А.В. Исследование анкеровки стальной фибры в мелкозернистом

шлакобетоне // Вестник ТГАСУ. – Томск, 2015. – № 5. – С. 117–127.

7. Atlas of stress-strain curves. Second edition // Materials Park. USA. – 2002. – P. 816.

8. Laranjeira F. Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers / F. Laranjeira, C. Molins, A. Aguado // Cement and concrete research. – 2010. – Vol. 40. – P. 1471–1487.

References

1. Karpenko N.I., Radajkin O.V. K sovershenstvovaniyu diagramm deformirovaniya betona dlja opredelenija momenta treshtinoobrazovaniya i razrushajushhego momenta v izgibaemykh zhelezobetonnykh jelementah // Stroitelstvo i rekonstrukcija. 2012. no. 3.
2. Karpenko, N. I. Obshhie modeli mehaniki zhelezobetona // Strojizdat. Moskva, 1996, 419 p.
3. Korneev A.M., Buzina O.P., Sukhanov A.V., Shipulin I.A. Matematicheskoe modelirovanie processa vzaimovlijaniya stalnykh fibr v sechenii izgibaemogo jelementa iz stalefibroshlakobetona // Fundamentalnye issledovaniya. 2016. no. 4–3, pp. 506–511.
4. Panfilov D.A., Pishulev A.A., Gimadetdinov K.I. Obzor sushhestvujushhih diagramm deformirovaniya betona pri szhatii v otechestvennyh i zarubezhnyh normativnyh dokumentah // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo. 2014. no. 3.
5. Rastorguev, B.S. Raschet prochnosti normalnyh sechenij zhelezobetonnyh jelementov s uchetom predelnyh deformacij materialov // Metody rascheta i konstruirovaniya zhelezobetonnyh konstrukcij: Sbornik nauchnyh trudov MGSU. 1996.
6. Chernousov N.N., Chernousov R.N., Suhanov A.V. Issledovanie ankerovki stalnoj fibry v melkozernistom shlakobtone // Vestnik TGASU. Tomsk, 2015. no. 5.
7. Atlas of stress-strain curves. Second edition // Materials Park. USA. 2002, pp. 816.
8. Laranjeira F. Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers / F. Laranjeira, C. Molins, A. Aguado // Cement and concrete research. 2010. Vol. 40. pp. 1471–1487.