

УДК 624.078.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Филиппова Т.С., Ахмедиев С.К., Орынтаева Г.Ж.

РГП на ПХВ «Карагандинский государственный технический университет»,  
Караганда, e-mail: confucius\_kstu@mail.ru

В работе проведено исследование плоских статически определимых и статически неопределимых ферм. Для определения перемещений узлов и усилий в стержнях применен метод конечных элементов (МКЭ). Приведены все разрешающие матрицы отдельного конечного элемента в местной и глобальной системах координат. Матрица жесткости системы для двухнапольной фермы с параллельными поясами для различных размеров и осевых жесткостей. Приведены результаты расчета при различных схемах загрузки и разнообразных условиях опирания. В частности, выполнено исследование влияния геометрических размеров фермы на значения узловых перемещений и осевых усилий в стержнях фермы. Полученные теоретические положения и численные результаты могут найти широкое применение как в научных исследованиях, так и в практике проектирования строительных и машиностроительных ферм.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, плоские формы, узловые перемещения, конечный элемент стержневой системы, матрица преобразований, матрица жесткости системы, вектор узловых сил, продольные силы, матрица опорных связей, статически определимые и статически неопределимые фермы

## THE STUDY OF STRESS-STRAIN STATE OF PLANE FARM

Filippova T.S., Akhmediev S.K., Oryntaeva G.Zh.

Karaganda State Technical University, Karaganda, e-mail: confucius\_kstu@mail.ru

There is a study of plane, statically determinate and statically indeterminate farms in this paper. To determine the movements of units and forces in the rods used the finite element method (FEM). Solved the entire matrix allowing a single finite element in the local and global coordinate systems. The system stiffness matrix for the two-floor farms with parallel chords for different sizes and axial stiffness. The calculation results for various schemes of loading and different support conditions. In particular, to study the effect on the geometric dimensions of the farm value of nodal displacements and axial forces in the rods of the farm. The theoretical position and numerical results can be widely used both in research and in the practice of designing and building engineering farms.

**Keywords:** stress-strain state, plane farms, nodal displacements, the final element of the core system transformation matrix, stiffness matrix of the system, the vector of nodal forces, longitudinal forces, support matrix connections, statically determinate and statically indeterminate farms

В строительстве, машиностроении, горном деле, а также в других отраслях материального производства зачастую применяются стержневые ажурные конструкции – фермы.

Они различаются большим многообразием геометрических размеров и схем, в том числе и по очертанию поясов, и по структуре стержневой решетки (взаимное расположение стоек и раскосов).

В процессе проектирования подобных конструкций имеется необходимость в изучении их напряженно-деформированного состояния – вычисление перемещений узлов и значений осевых усилий в стержнях.

В данной работе для решения таких задач использован метод конечных элементов для стержневых систем [1–8].

### Экспериментальная часть

В качестве базового конечного элемента принят стержневой элемент фермы,

произвольно ориентированный на плоскости (рис. 1).

Связь между величинами  $u_i, z_i$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_i &= z_2 \cos \alpha - z_3 \sin \alpha; \\ v_j &= z_3 \cos \alpha - z_4 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

или в матричной форме

$$\bar{V} = c \cdot \bar{z}, \quad (2)$$

где  $\bar{v}^T = \{u_i; v_j\}$ ;  $\bar{z}^T = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ; («T» –

индекс трансформирования);

$$C = \begin{vmatrix} \cos \alpha; & -\sin \alpha; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & \cos \alpha; & -\sin \alpha \end{vmatrix} \quad (3)$$

– матрицы преобразований.

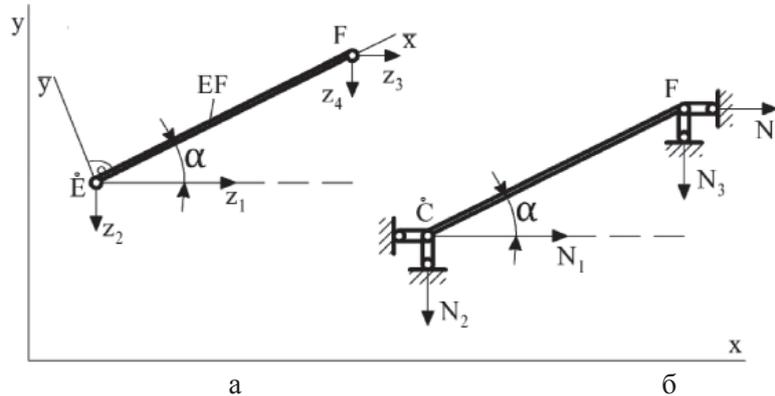


Рис. 1. Конечный элемент стержневой системы:

$z_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – узловые перемещения в глобальной системе координат  $xy$ ;  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – узловые силы;  $u_i, v_j$  ( $i = 1, 2; j = 3, 4$ ) – узловые перемещения в локальной системе координат  $\bar{x}, \bar{y}$ .

На основе известных процедур метода конечных элементов (МКЭ) имеем

$$\bar{R} = S \cdot \bar{z}, \quad (4)$$

где

$$\bar{R} = C^T \cdot \bar{F} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha; & 0 \\ -\sin \alpha; & 0 \\ 0; & \cos \alpha \\ 0; & -\sin \alpha \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \cos \alpha \\ -N_i \sin \alpha \\ N_j \cos \alpha \\ -N_j \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_i \\ \bar{R}_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

– вектор узловых реакций в глобальной системе координат;

$$S = c^T b^T \frac{EF}{l} b \cdot c = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha; & -\cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha; & \sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha; & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha; & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos^2 \alpha; & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha; & -\sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha; & -\cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha; & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

– матрица жесткости стержневого конечного элемента в глобальной системе координат;  $b = \begin{bmatrix} -1; & 1 \end{bmatrix}$  – матрица деформации конечного элемента; «Т» – индекс трансформирования соответствующих матриц.

Представим выражение (5) в блочном виде

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_i \\ \bar{R}_j \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} S_{ii}; & S_{ij} \\ S_{ji}; & S_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{z}_j \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Здесь: первый индекс элементов блока указывает на узел, в котором возникает соответствующая узловая реакция, второй индекс – номер узла, единичное смещение которого вызывает эти реакции.

По вектору  $\bar{z}$  продольная (осевая) сила в стержнях фермы определяется так:

$$N = \left( \frac{EF}{l} \right) (-\cos \alpha; \sin \alpha; \cos \alpha; -\sin \alpha) \cdot \bar{z}. \quad (8)$$

Разрешающая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) метода конечных элементов имеет стандартную форму

$$S \bar{z} + \bar{Q} = 0, \quad (9)$$

где  $S_{aa}$  – матрица реакций элементов, вызванных единичными перемещениями (матрица жесткости системы);  $\bar{z}^T = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  – вектор неизвестных узловых перемещений заданной фермы;  $\bar{Q} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – вектор

узловых реакций, вызванных заданными внешними силами, при в узлах фермы (как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении).

Учет опорных устройств (закреплений) заданной системы производится добавлением к диагональным элементам матрицы «S» значений жесткостных коэффициентов опор (их значения находятся в пределах 0–∞), т.е.

$$S_{ii}^* = S_{ii} + C_{ii}^o, \quad (10)$$

где

$$C_{ii}^o = \begin{vmatrix} C'_x & 0 \\ 0 & C'_y \end{vmatrix} \quad (11)$$

– матрица коэффициентов жесткостей. При наличии жестких опор ( $C'_x = C'_y = \infty$ ) при их отсутствии ( $C'_x = C'_y = 0$ ).

В качестве примера, иллюстрирующего предложенную выше методику расчета «МКЭ», рассмотрена плоская двухпанельная ферма с параллельными поясами (рис. 2) с шарнирными соединениями стержней в узлах фермы.

Решение СЛАУ (9) дает значения искомым узловых перемещений  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ )

$$\bar{z} = -S^{-1}\bar{Q}, \quad (13)$$

где  $S^{-1}$  – обратная матрица.

Далее приведены результаты расчета фермы (рис. 2) при следующих конкретных значениях:  $a = b = c = 3,0$  м;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $c_\alpha = S_\alpha = c_\beta = S_\beta = 0,71$ ;  $k = f = 4,24$ .

В таблице даны значения узловых перемещений для ферм с различными схемами нагружения.

Для фермы № 4 (таблица) проведено исследование изменения величин узловых прогибов  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). При  $P_a = 10$  кН в зависимости от следующих факторов:

Рис. 3: при ( $a = b = 3$  м = const);  $c = 2, 4, 6, 8, 10$  м.

Рис. 4: при ( $c = 3$  м = const);  $a = b = 2, 3, 4, 5$  м (переменно).

Рис. 5: при ( $a = b = 3$  м = const);  $p = 2, 4, 6, 8, 10$  кН (переменно).

### Заключение

1. В данной работе доказана эффективность расчета стержневых конструкций методом конечных элементов. В качестве

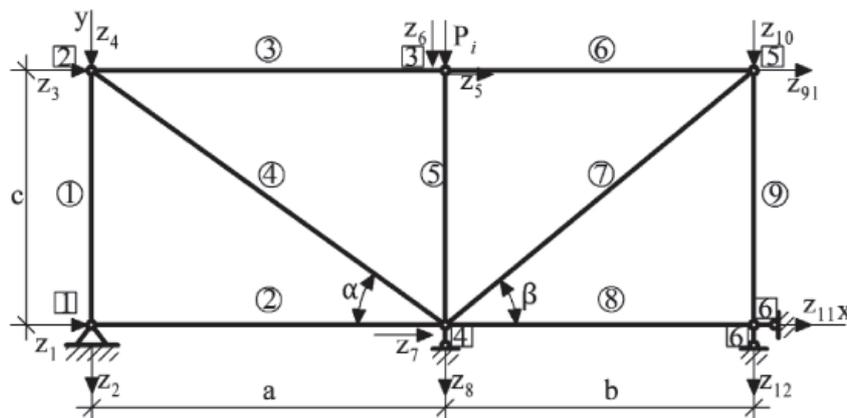


Рис. 2. Расчетная схема МКЭ:

$z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) – неизвестные узловые перемещения;  
 $N_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 9$ ) – осевые усилия в стержнях фермы

Далее приняты обозначения (рис. 2):

$$c_\beta = \cos \beta; \quad c_\alpha = \cos \alpha; \quad s_\beta = \sin \beta; \quad s_\alpha = \sin \alpha;$$

$$c_\beta \cdot s_\beta = \cos \beta \cdot \sin \beta; \quad c_\alpha \cdot s_\alpha = \cos \alpha \cdot \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b};$$

$$k = \sqrt{a^2 + c^2}; \quad f = \sqrt{b^2 + c^2}. \quad (12)$$

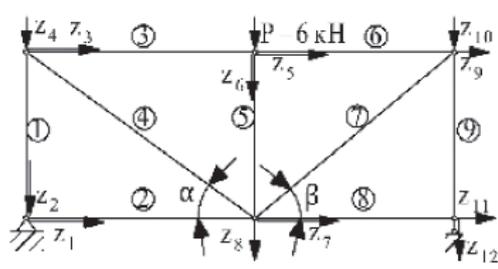
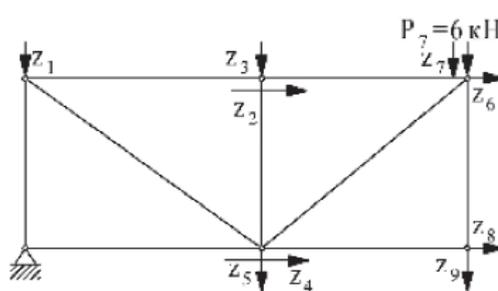
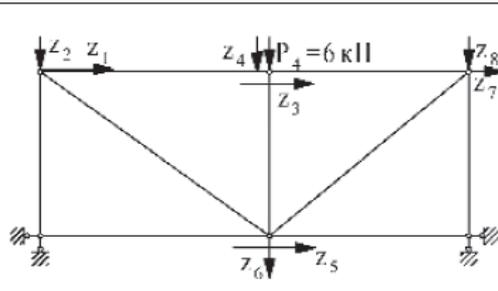
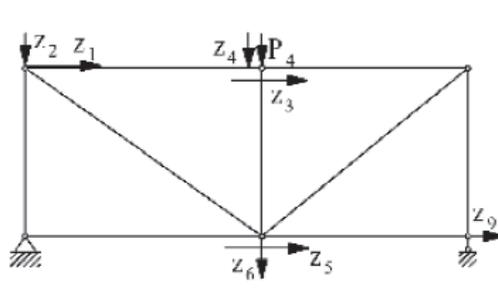
Для рассматриваемой фермы (рис. 2) на основе уравнения (9) получена матрица жесткости системы.

иллюстрационного примера рассмотрена плоская ферма с узловым нагружением.

2. Выполнено сравнение результатов численного расчета с классическим методом аналитического расчета ферм (определение усилий способом моментной точки, способом проекций, способом вырезания узлов). При этом установлено, что эти результаты совпадают без каких-либо погрешностей, т.е. решения будут точными.

3. Установлено, что разрешающие уравнения, представляющие собой матрицы различного порядка, эффективно реализуются на ЭВМ.

## Результаты расчета различных ферм «МКЭ»

|                                | № п/п | Схема фермы с нагружением узлов  | Расчетные величины                       |
|--------------------------------|-------|--|--|
| Статически определимая ферма   | 1     |    | $EFz_i$<br>$N_p, \text{кН}$              |
|                                | 2     |    |  |
| Статически неопределимая ферма | 3     |   | $EFz_p (P_4 = 6\text{кН})$               |
| Статически определимая ферма   | 4     |  | Результаты исследований даны на рис. 3–5 |

## Окончание таблицы

| Номера расчетных величин (узлов или стержней) |  |       |       |        |       |        |        |        |        |       |    |    |
|---|--|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|----|----|
|   | 1  | 2     | 3     | 4      | 5     | 6      | 7      | 8      | 9      | 10    | 11 | 12 |
| 1   | 0  | 0     | 9,091 | 9,091  | 0     | 61,364 | 0      | 43,182 | -9,091 | 9,091 | 0  | 0  |
|   | -3,03                                    | 0     | -3,03 | 4,19   | -6,06 | -3,03  | 4,23   | 0      | -3,03  | -     | -  | -  |
| 2   | 1,914                                    | 1,914 | 7,177 | 0      | 7,177 | 3,828  | 16,268 | 3,828  | 3,828  | -     | -  | -  |
| 3   | 4,396                                    | 2,198 | 2,198 | 17,417 | 0,382 | 12,257 | -0,765 | 2,963  | -      | -     | -  | -  |
| 4   | Результаты исследований даны на рис. 3–5 |       |       |        |       |        |        |        |        |       |    |    |

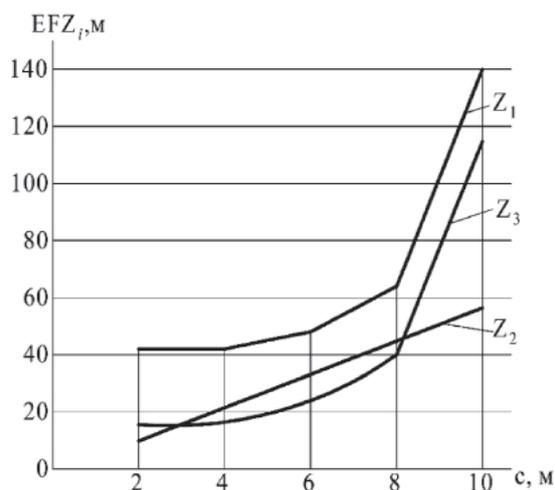


Рис. 3

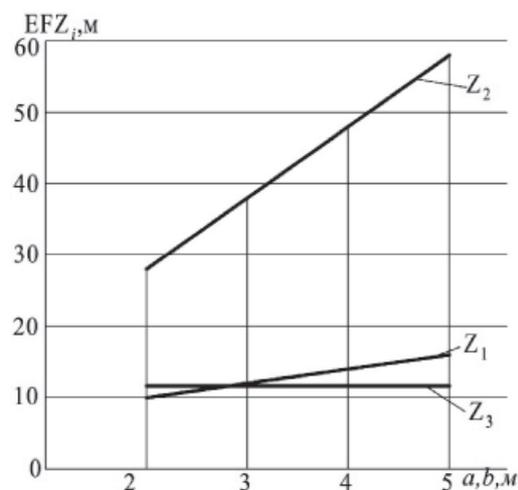


Рис. 4

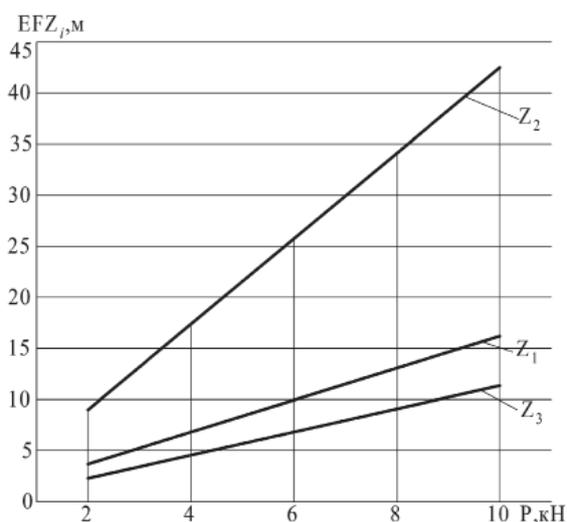


Рис. 5

4. Изменение размеров панелей  $a, b$  при постоянной высоте фермы «с» приводит к незначительному изменению значений перемещений  $z_1, z_3$  (рис. 4).

5. Возрастание узловой нагрузки  $P_4$  приводит к линейному изменению перемещений узла фермы (рис. 5).

6. Изменение высоты фермы «с» при ( $a, b = \text{const}$ ) линейно увеличивает значения  $z_2$ , и нелинейно –  $z_1, z_3$  (рис. 4).

#### Список литературы

1. Бакиров Ж.Б., Жадрасинов Н.Т., Ахмедиев С.К. Вычислительная механика. – Караганда, КарГТУ, 2004. – 102 с.

2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов (пер. с англ.) / под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

3. Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С., Пискунов В.Г. Метод конечных элементов / под ред. П.М. Варвака. – Киев: Будівельник, 1981. – 176 с.

4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Наука, 1975. – 271 с.

5. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. – М.: Стройиздат, 1981. – 435 с.

6. Постнов В.А., Хархурин Н.Я. Метод конечных элементов. – Л.: Судостр., 1974. – 344 с.

7. Справочник по теории упругости / под ред. П.М. Варвака, Ф.Ф. Рябова. – Киев: Будівельник, 1971. – 418 с.

8. Турсунов К.А. Метод конечных элементов в строительной механике стержневых систем: уч. пособие. – Караганда: КарПТИ, 1984. – 60 с.

#### References

1. Bakirov Zh.B., Zhadrasinov N.T., Ahmediev S.K. Vychislitel'naja mehanika. Kara-ganda, KarGTU, 2004. 102 p.

2. Bate K., Vilson E. Chislennyye metody analiza i metod konechnyh jelementov (per. s angl.). Pod red. Smirnova A.F. M.: Strojizdat, 1982. 448 p.

3. Varvak P.M., Buzun I.M., Gorodeckij A.S., Piskunov V.G. Metod konechnyh jelemen-tov / pod. Red. Varvaka P.M. Kiev: Budivelnik, 1981. 176 p.

4. Zenkevich O. Metod konechnyh jelementov v tehnikе M.: Nauka, 1975. 271 p.

5. Karamanskij T.D. Chislennyye metody stroitelnoj mehaniki. M.: Strojizdat, 1981. 435 p.

6. Postnov V.A., Harhurin N.Ja. Metod konechnyh jelementov. L.: Sudostr., 1974. 344 p.

7. Spravochnik po teorii uprugosti / pod red. P.M. Varvaka, F.F. Rjabova. Kiev: Budivelnik, 1971. 418 p.

8. Tursunov K.A. Metod konechnyh jelementov v stroitelnoj mehanike stержnevyyh sistem: uch. posobie. Karaganda: KarPTI, 1984. 60 p.