

УДК 539.3:539.374

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ПРИ МНОГОЦИКЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Сибгатуллин Э.С., Исламов К.Ф.

Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Набережные Челны, e-mail: cibes@mail.ru

Предлагаемая в работе методика расчётов базируется на использовании соответствующих кривых усталости, виртуальной диаграммы связи между обобщёнными силами и обобщёнными перемещениями, уравнения равновесия в форме Лагранжа, кинематического метода теории предельного равновесия. Дискретизация в расчётной схеме объекта осуществляется с использованием абсолютно жёстких конечных элементов, между которыми допускается образование обобщённых шарниров разрушения. Рассматриваются симметричные циклы внешних нагрузок. С использованием принципа максимума Мизеса, задача определения минимального значения амплитуды кинематически возможного параметра внешней нагрузки сведена к задаче линейного программирования. Составлена программа для ЭВМ, позволяющая рассчитывать пластины и оболочки, имеющие произвольные в плане формы и различные условия опирания, при действии внешних нагрузок, имеющих различную конфигурацию. В качестве примера приведено решение задачи для прямоугольной стальной пластины, жёстко защемлённой по контуру, при действии на неё циклических сосредоточенных сил.

Ключевые слова: оболочки и пластины, многоцикловое нагружение, предельная несущая способность по прочности

ESTIMATING THE BEARING CAPABILITY OF HOMOGENEOUS STEEL PLATES UNDER MULTICYCLIC LOAD

Sibgatullin E.S., Islamov K.F.

Kazan Federal University, Naberezhnye Chelny Institute, Naberezhnye Chelny, e-mail: cibes@mail.ru

Offered in the work methodology of calculations is based on the use of the appropriate curves of fatigue, a virtual connection diagram between generalized forces and generalized displacements, the equilibrium equations in Lagrange form, the Kinematic method, and the Limit equilibrium theory. Sampling in the design scheme of the object is implemented by using a completely rigid finite element, between which the appearing of generalized destruction joints is allowed. We consider symmetric cycles of external loads. While using the principles of maximum von Mises, the problem of determining the minimum value of the kinematically possible amplitude parameter of external load is reduced to a linear programming. A computer program that allows calculation of the plates and shells with any shapes and different support conditions, under the action of differently configured external loads, is developed for a PC. An example is given for the estimating the bearing capacity of a rectangular steel plate, rigidly clamped along the contour, loaded by cyclic concentrated forces.

Keywords: plates and shells, cyclic load, ultimate bearing capacity by strength

Решения некоторых задач определения выносливости оболочек и пластин приведены в работах [1, 2, 3], где рассмотрены статически определимые элементы конструкций. В данной работе приведена методика решения аналогичных задач для статически неопределимых элементов конструкций. Подобная методика описана в [4], где рассмотрен случай действия на элемент конструкции кратковременной статической нагрузки.

Для определения предельного равновесия статически неопределимых конструкций часто используют так называемые кинематический и статический методы теории предельного равновесия, которые базируются на соответствующих теоремах, в общем виде сформулированных и доказанных А.А. Гвоздевым [5]. При этом применяют понятия о виртуальных полях перемещений и напряжений. Классическая теория предельного равновесия разработана для тех случаев, когда полностью в пластическое состояние

одновременно переходят столько сечений конструкции, что она в итоге превращается в механизм хотя бы с одной степенью свободы. Для упрощения расчётной модели часто используют диаграмму деформирования «жёсткопластического» тела [6].

При разрушении от многоциклового нагружения не наблюдаются, как правило, заметные пластические деформации. Это разрушение внешне выглядит как хрупкое. Однако микропластические деформации имеют при этом место, о чём свидетельствует, в частности, повышение температуры испытываемых на многоцикловое нагружение образцов.

Чтобы обосновать использование теории предельного равновесия на случай многоциклового нагружения, нами было введено понятие о виртуальных диаграммах деформирования [3]. При многоцикловом нагружении процесс разрушения материала конструкций начинается задолго до потери

ими несущей способности. В результате действия нагрузок идёт процесс накопления повреждений. В момент, непосредственно предшествующий потере несущей способности конструкции, материал в зоне разрушения приобретает совсем другие свойства, чем они были до приложения нагрузок.

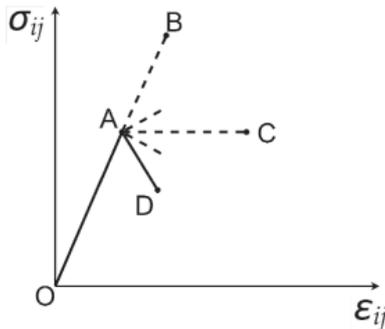


Рис. 1. Диаграммы связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij}

На рис. 1 изображена условная диаграмма связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} ($i, j = 1, 2, z$). Участок OA соответствует устойчивому состоянию, а участок AD – неустойчивому состоянию материала. Допустим, что переход от устойчивого состояния в неустойчивое происходит непрерывным образом, за время Δt . Тогда материал за этот промежуток времени испытывает целый спектр состояний, виртуальные диаграммы $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$, соответствующие этим состояниям, располагаются в пределах угла BAD (рис. 1, штриховые линии).

Виртуальной диаграммой $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ будем называть такую, которая имела бы место, если бы удалось стабилизировать свойство материала, которые он имеет в рассматриваемый момент времени внутри промежутка Δt . Среди виртуальных диаграмм есть и такая, которая параллельна оси ε_{ij} (линия AC на рис. 1). Состояние материала, соответствующее виртуальной диаграмме AC , примем за предельное. Если в предельном состоянии упругие деформации малы, и ими можно пренебречь, то в итоге приходим к жёсткопластической модели деформируемого твёрдого тела.

Полагаем, что до мгновения катастрофического разрушения конструкции напряжения в ней претерпевают целое число циклов. Допустим, что предельная поверхность прочности в пространстве амплитудных значений напряжений $\sigma_{ij,a}$ может быть описана следующим уравнением:

$$a_1(n)\sigma_{11,a}^2 + 2b_1(n)\sigma_{11,a}\sigma_{22,a} + c_1(n)\sigma_{22,a}^2 + e_1(n)\sigma_{12,a}^2 + m_1(n)\sigma_{1z,a}^2 + n_1(n)\sigma_{2z,a}^2 = 1. \quad (1)$$

Здесь n – число циклов до разрушения; коэффициенты $a_1(n), \dots, n_1(n)$ подлежат экспериментальному определению. Правая система декартовых координат связана с поверхностью приведения S_0 оболочки или пластины, ось z ортогональна поверхности S_0 , оси α_1 и α_2 являются касательными к соответствующим линиям главных кривизн оболочки. При записи (1) принято допущение, что $\sigma_{zz,a} \approx 0$.

Используя ассоциированный с (1) закон деформирования [6], гипотезы кинематического характера и следуя работе [1], можно получить следующие параметрические уравнения предельной поверхности прочности в пространстве амплитудных значений внутренних сил и моментов:

$$T_a^i = \frac{0,5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^a (I_1 \dot{e}_k^a + I_2 \dot{\alpha}_k^a)}{\Delta_a};$$

$$M_a^i = \frac{0,5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^a (I_2 \dot{e}_k^a + I_3 \dot{\alpha}_k^a)}{\Delta_a}, \quad i = \overline{1,3}; \quad (2)$$

$$Q_a^k = 0,25 \left(\frac{I_1}{\theta_a} \right) \sum_{i=1}^2 \rho_{ki}^a \dot{\gamma}_i^a, \quad k = \overline{1,2}.$$

Здесь $T_a^1 \equiv T_a^{11}$; $T_a^2 \equiv T_a^{22}$; $T_a^3 \equiv T_a^{12}$; $M_a^1 \equiv M_a^{11}$; $M_a^2 \equiv M_a^{22}$; $M_a^3 \equiv M_a^{12}$; $Q_a^1 \equiv Q_a^{z1}$; $Q_a^2 \equiv Q_a^{z2}$ – обобщённые силы; $\dot{e}_1^a, \dot{e}_2^a, \dot{e}_3^a, \dot{\alpha}_1^a, \dot{\alpha}_2^a, \dot{\alpha}_3^a, \dot{\gamma}_1^a, \dot{\gamma}_2^a$ – соответствующие обобщённые перемещения; $\delta_{ik}^a, \Delta_a, \theta_a$ – определители, элементами которых являются коэффициенты уравнения (1); интегралы I_j определяются формулой

$$I_j = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{z^{j-1}}{\lambda} \right) dz, \quad j = \overline{1,3}; \quad (3)$$

$\dot{\lambda}(\dot{e}_1^a, \dot{e}_2^a, \dot{e}_3^a, \dot{\alpha}_1^a, \dot{\alpha}_2^a, \dot{\alpha}_3^a, \dot{\gamma}_1^a, \dot{\gamma}_2^a) \geq 0$ – скалярная функция; h – толщина оболочки или пластины.

Предлагаемая нами методика решения рассматриваемых здесь задач ориентирована на использование численных методов и ЭВМ. Дискретизация объекта расчёта осуществляется с использованием абсолютно жёстких конечных элементов, каждый из которых в трёхмерном пространстве имеет шесть степеней свободы (опорные абсолютно жёсткие конечные элементы неподвижны, или их перемещения заданы). Диссипация энергии деформации учитывается только вдоль обобщённых шарниров разрушения, расположенных между соседними

абсолютно жёсткими конечными элементами. Используется вариант кинематического метода теории предельного равновесия, который формально совпадает с тем, что описано в работе [4]. Аппроксимируя предельную поверхность (2) вписанным многогранником и используя принцип максимума Мизеса [6], задачу сводим к задаче линейного программирования, решение которой позволяет определить $\min \mu^+$, где μ^+ – монотонно возрастающий кинематически возможный параметр внешней нагрузки.

Уравнение баланса мощностей имеет следующий вид [6]:

$$\sum_{k=1}^m \int_{l_k} N dl = \mu \int_S p_i^0 v_i dS + \int_S p_i^1 v_i dS. \quad (4)$$

Здесь l_k – длина k -й линии разрушения; m – число линий разрушения; S – площадь поверхности приведения сил; N – мощность внутренних обобщенных сил, приходящаяся на единицу длины линии разрушения; v_i – компоненты вектора скорости движения точки оболочки, где приложена сила p_i ; μ – параметр, пропорционально которому растут внешние нагрузки. По повторяющемуся индексу i ($i = 1, 2, 3$) производится суммирование.

Предельную поверхность аппроксимируем выпуклым многогранником, i -я вершина которого определяется вектором $\{\bar{R}_i^*, \bar{M}_i^*\}^T$, $i = \overline{1, k}$, k – число вершин аппроксимирующего многогранника. Здесь R_i, M_i – погонные силы и моменты, приложенные к сечению поверхности S_0 .

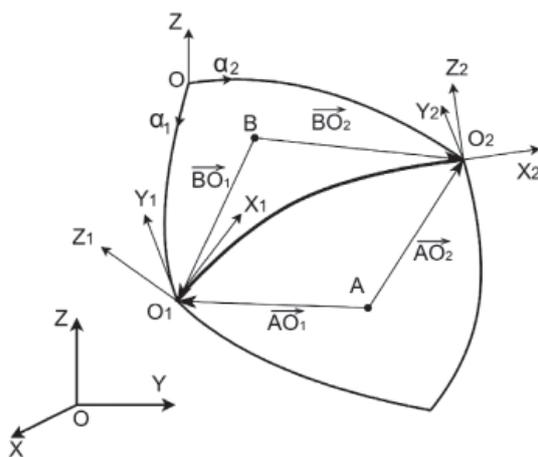


Рис. 2. Схема расположения линии разрушения O_1O_2 на границе абсолютно жёстких конечных элементов

На рис. 2 линия O_1O_2 является обобщённым шарниром разрушения между двумя абсолютно жёсткими конечными элементами. Точка A является полюсом одного конечного элемента, точка B – другого. На мощности погонных внутренних сил и моментов на концах линий разрушения O_1O_2 (рис. 2), развиваемые ими на разрывах скоростей соответствующих перемещений и поворотов, согласно постулату Друккера [6], можно наложить следующие ограничения [7]:

$$N_1 \geq \bar{R}_1^* \Delta \vec{v}_1 + \bar{M}_1^* \Delta \vec{\omega}, \quad i = \overline{1, k_1};$$

$$N_2 \geq \bar{R}_2^* \Delta \vec{v}_2 + \bar{M}_2^* \Delta \vec{\omega}, \quad i = \overline{1, k_2}. \quad (5)$$

Здесь k_1, k_2 – количество вершин предельных многогранников, соответствующих точкам O_1 и O_2 соответственно.

Вдоль линий разрушения используем линейную аппроксимацию функции N . В итоге получаем следующую задачу линейного программирования: найти $\min \mu^+$, где

$$\begin{aligned} \mu^+ = 0,5 \sum_{k=1}^m (N_{1k} + N_{2k}) l_k - \\ - \sum_{j=1}^{n_2} (\bar{F}_j^1 \vec{v}_j + \bar{M}_j^1 \vec{\omega}_j), \end{aligned} \quad (6)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n_1} (\bar{F}_j^0 \vec{v}_j + \bar{M}_j^0 \vec{\omega}_j) = 1 \quad (7)$$

и при соблюдении ограничений вида (5). Здесь j – номер жесткого элемента; n_1 – число жестких элементов, на которые действуют нагрузки, зависящие от параметра μ ; n_2 – число жестких элементов, на которые действуют нагрузки, не зависящие от параметра μ . Здесь внешние силы, действующие в пределах отдельного жесткого диска, приведены к его полюсу. Результатом этого являются сосредоточенные силы \bar{F}_j и сосредоточенные моменты \bar{M}_j , приложенные к соответствующим полюсам.

В качестве примера рассмотрим расчёт прямоугольной стальной плиты, жёстко заделанной по контуру, на которую действуют две сосредоточенные вертикальные силы в точках A и B , изменяющиеся по гармоническому закону синхронно и синфазно (рис. 3). Размеры плиты $6 \times 3 \times 0,01$ (м). Предел выносливости для материала плиты принят $\sigma_{-1} = \sigma_1/2 = 120$ МПа. Уравнение (1) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\sigma_{11,a}^2 - \sigma_{11,a} \sigma_{22,a} + \sigma_{22,a}^2 + 3(\sigma_{12,a}^2 + \sigma_{1z,a}^2 + \sigma_{2z,a}^2) = \sigma_{-1}^2. \quad (8)$$

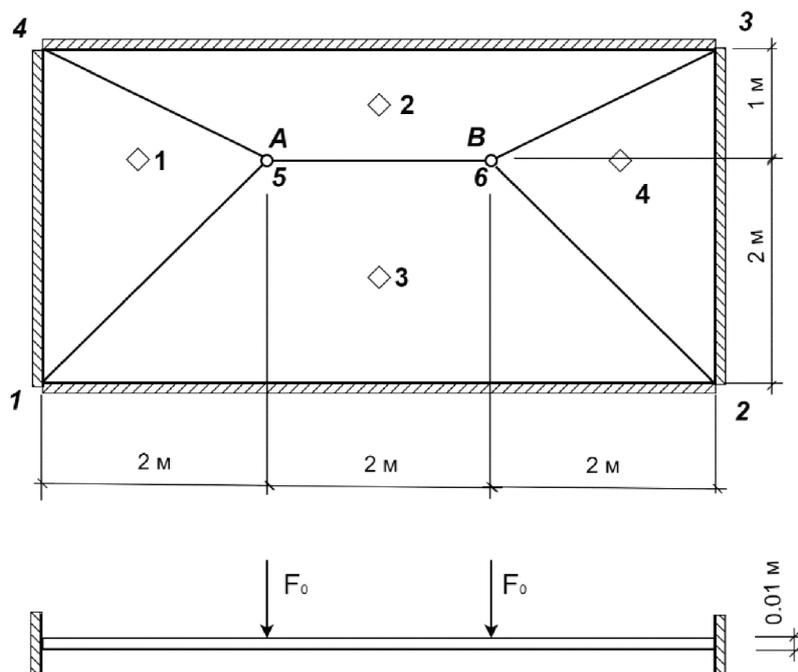


Рис. 3. Схема абсолютно жёстких конечных элементов и многоцикловой нагрузки для прямоугольной стальной плиты

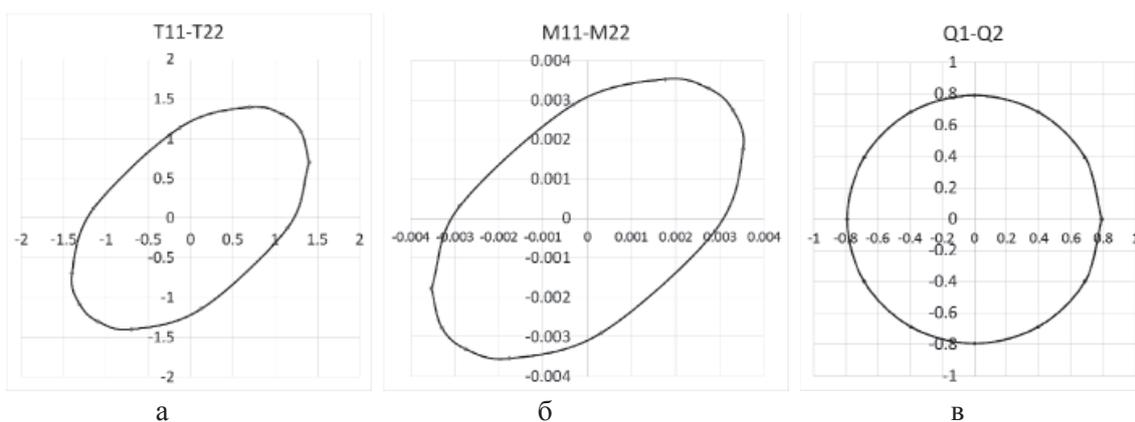


Рис. 4. Сечения предельной гиперповерхности плоскостями а – $T_{11}-T_{22}$ (МН/м); б – $M_{11}-M_{22}$ (МН·м/м); в – Q_1-Q_2 (МН/м)

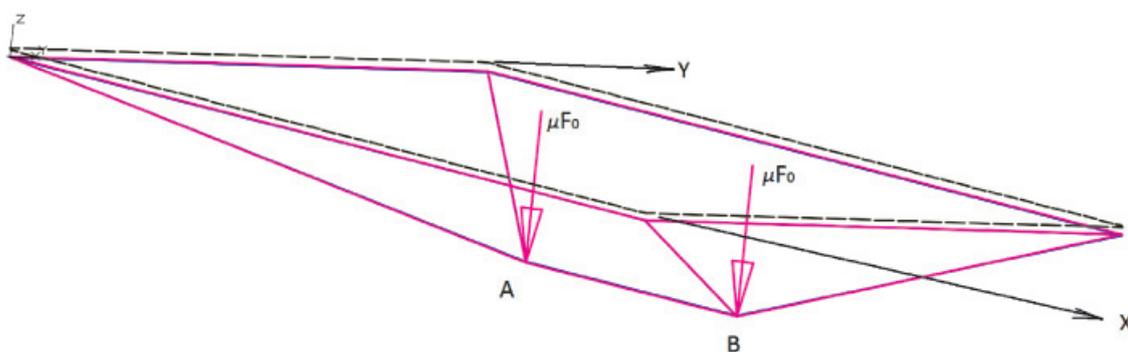


Рис. 5. Схема разрушения плиты, смоделированная по вычисленным скоростям перемещений абсолютно жёстких конечных элементов

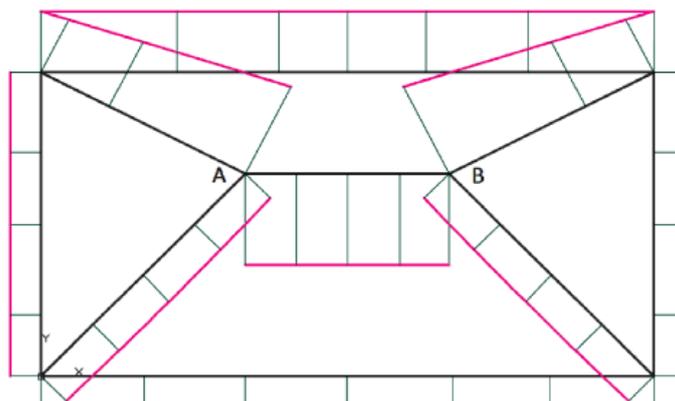


Рис. 6. Эпюры скоростей диссипации

Скорости перемещений полюсов абсолютно жёстких конечных элементов и поворотов вокруг полюсов

Номер диска	v_x	v_y	v_z	ω_x	ω_y	ω_z
1	0,000628114	0,000382195	-0,249864047	0	0,248752446	0
2	0,002215713	-0,001171394	-0,249449905	0,494492644	-5,91971E-08	2,46157E-05
3	-0,000312883	0,000626765	-0,250554607	-0,249445393	0	0
4	7,76925E-05	-0,000613673	-0,249744786	-0,000245912	-0,248869753	2,42546E-05

Здесь напряжения в МПа, нагрузки – в МН. На рис. 4 приведены некоторые сечения предельной поверхности, построенные с использованием уравнений (4), (2).

На рис. 5 приведена схема разрушения рассматриваемой плиты, определённая из условия достижения $\min \mu^+$; на рис. 6 приведена соответствующая эпюра скоростей диссипации энергии деформации N . В таблице приведены скорости перемещений полюсов абсолютно жёстких конечных элементов, указанных на рис. 3 ромбиками, и повороты жёстких элементов вокруг этих полюсов. Соответствующее значение $\min \mu^+ = 0,04$. Здесь XYZ – глобальная система координат, неподвижно связанная с пластиной до деформации.

В заключение отметим, что полный переход в пространства виртуальных величин позволил нам использовать теорию предельного равновесия для определения предельной несущей способности конструкций в случае их многоциклового нагружения. Изложенная выше методика позволяет определять минимальную верхнюю оценку амплитуды разрушающей нагрузки $F_{\text{разр}} = \min \mu^+ \cdot F_0$.

Список литературы

1. Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С. Метод расчёта на усталость слоистых композитных оболочек и пластин // Механика композитных материалов. – 1990. – № 5. – С. 871–876.
2. Сибгатуллин Э.С., Терегулов И.Г. Определение несущей способности слоистых композитных оболочек, работающих в условиях циклического нагружения // Журнал ПМТФ. – 1991. – № 1. – С. 126–130.

3. Сибгатуллин Э.С., Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. Предельное состояние слоистых композитных оболочек при совместном действии статических и циклических нагрузок // Известия РАН. МТТ. – 1994. – № 4. – С. 155–161.
4. Сибгатуллин Э.С., Исламов К.Ф. Определение несущей способности металлокерамической сферической оболочки // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9. – С. 512–515.
5. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
7. Сибгатуллин Э.С. Математическое моделирование прочности и несущей способности анизотропных и композитных элементов конструкций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Наб. Челны, 2001. – 405 с.

References

1. Teregulov I.G., Sibgatullin E.S. Metod raschota na ustalost sloistykh kompozitnykh obolochek i plastin // Mekhanika kompozitnykh materialov. 1990. no. 5. pp. 871–876.
2. Sibgatullin E.S., Teregulov I.G. Opredeleniye nesushchey sposobnosti sloistykh kompozitnykh obolochek, rabotayushchikh v usloviyakh tsiklicheskogo nagruzheniya // Zhurnal PMTF. 1991. no. 1. pp. 126–130.
3. Sibgatullin E.S., Teregulov I.G., Timergaliyev S.N. Predelnoye sostoyaniye sloistykh kompozitnykh obolochek pri sovmestnom deystvii staticheskikh i tsiklicheskikh nagruzok // Izvestiya RAN. MTT. 1994. no. 4. pp. 155–161.
4. Sibgatullin E.S., Islamov K.F. Opredeleniye nesushchey sposobnosti metallokeramicheskoy sfericheskoy obolochki // Fundamentalnyye issledovaniya. 2015. no. 9. pp. 512–515.
5. Gvozdev A.A. Raschet nesushchey sposobnosti konstruksiy po metodu predelnogo ravnovesiya. M.: Stroyizdat, 1949. 280 p.
6. Rabotnov YU.N. Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1979. 744 p.
7. Sibgatullin E.S. Matematicheskoye modelirovaniye prochnosti i nesushchey sposobnosti anizotropnykh i kompozitnykh elementov konstruksiy: diss. doktora fiz.-mat. nauk. G. Nab. Chelny, 2001. 405 p.