УДК 517.946

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Зайцева Н.В.

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для трехмерного эллиптического уравнения с частными производными второго порядка с оператором Бесселя. Решение уравнения ищется в области трехмерного пространства, представляющей собой параллелепипед, на верхней грани которого задается ненулевое граничное условие, на остальных пяти гранях – однородные граничные условия. Методом разделения переменных или методом Фурье найдено общее решение этой задачи в виде бесконечного ряда по ортогональным системам собственных функций оператора Бесселя и тригонометрических функций. В ходе решения краевой задачи рассматриваются возникающие две спектральные задачи относительно неизвестных функций – задачи Штурма – Лиувилля, собственные значения и собственные функции которых находятся с помощью программы Maple, встроенными командами. Далее исследуется общее решение уравнения Бесселя, с учетом граничных условий, частными решениями которого являются функция Бесселя мнимого аргумента первого рода и функция Макдональда. В работе демонстрируется пошагово программа всех математических вычислений при решении данной задачи математической физики, выполненная командным языком системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, оператор Бесселя, краевая задача, программа Maple

MATHEMATICAL MODELING BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR IN THE PROGRAM MAPLE

Zaytseva N.V.

Kazan (Volga Region) Federal University, Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, e-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

The boundary value problem for the three-dimensional elliptic partial differential equation of the second order with Bessel operator is considered. The solution of the equation is sought in the field of space, which is a parallelepiped. On the upper side of the box there is a non-zero boundary condition of this problem. On five sides of the box have are zero boundary conditions of this problem. By the method of separation of variables the common solving of this problem in the form of an infinite series in orthogonal systems of eigenfunctions of the Bessel functions and trigonometric functions is found. Spectral problems – the Sturm-Liouville problem are solved. Eigenvalues and the functions of these Sturm-Liouville problems by Maple program are considered. The general solution of Bessel's equation is found. Bessel function of imaginary argument of the first kind and Macdonald functions are particular solutions of the Bessel equation. The paper demonstrate program of mathematical calculations in solving this boundary value problem.

Keywords: elliptic equation, Bessel operator, boundary value problem, Maple program

В настоящее время во многих учебных заведениях мира среди преподавателей и студентов широкое распространение получила система компьютерной математики Maple, разработанная в 1980 году группой исследователей канадского университета Waterloo. С момента появления программа постоянно совершенствуется. Командный язык пакета Maple прост и понятен, следует отметить быстроту в работе и экономное использование памяти, а также пакет Maple работает с большинством операционных систем, чем и объясняется его коммерческий успех.

Работа посвящена исследованию краевой задачи для уравнения эллиптического типа с оператором Бесселя с помощью качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также с помощью системы компьютерной математики Maple, которая является незаменимым помощником для преподавателей и студентов физико-математического направления.

Краевые задачи для уравнений в частных производных с оператором Бесселя рассматриваются в работах многих авторов [2; 3; 5] и представляют научный интерес. Результаты настоящей работы являются продолжением исследований задач математической физики для уравнений с оператором Бесселя.

Пусть

$$D = \{(x, y, z) | 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$$

– область пространства $Oxyz$. Рассмотрим в области D эллиптическое уравнение вида

$$\square_B U \underset{Df}{=} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + B_z U = 0, \qquad (1)$$

где $B_z = z^{-k} \frac{\partial}{\partial z}\left(z^k \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{k}{z}\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Бесселя, $0 < k < 1$ – заданное действительное число.

Требуется найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x, y, z) \in C^2(D) \cap C(\bar{D}); \qquad (2)$$

$$\square_B U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D; \qquad (3)$$

$$U(0, y, z) = 0;\ U(a, y, z) = 0; \qquad (4)$$

$$U(x, 0, z) = 0;\ U(x, b, z) = 0; \qquad (5)$$

$$U_z(x, y, 0) = 0;\ U(x, y, c) = \varphi(x, y). \qquad (6)$$

Введем уравнение (1) в программе Maple под именем *eq*:

```
> restart;
>eq:=diff(u(x,y,z),x$2)+diff(u(x,y,z),y$2)+diff(u(x,y,z),z$2)+(k/z)*diff(u(x,y,z),z)=0.
```

На экране синим цветом появится уравнение в виде

$$eq := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y, z) + \frac{k\left(\frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z)\right)}{z} = 0.$$

Построим систему частных решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям (2), (4) и (5). Частное решение уравнения (1), согласно методу Фурье (метод разделения переменных), ищем в виде

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \qquad (7)$$

где X, Y и Z – пока неопределенные функции.

В программе команда разделения переменных и результат будут выглядеть так

```
>pdsolve(eq,HINT=X(x)*Y(y)*Z(z));
```

$$(u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z))\ \&\ where$$

$$\left[\left\{ \frac{d^2}{dx^2} X(x) = \_c_1 X(x), \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = \_c_2 Y(y), \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -Z(z)\_c_1 - Z(z)\_c_2 - \frac{k\left(\frac{d}{dz} Z(z)\right)}{z} \right\}\right].$$

Анализируя результат, согласно [4], и подставляя функцию (7) в граничные условия (4) и (5), относительно неизвестной функции *X(x)* получаем задачу

$$X''(x) + \lambda_1^2 X(x) = 0; \qquad (8)$$

$$X(0) = 0;\ X(a) = 0. \qquad (9)$$

Задача (8)–(9) – задача Штурма – Лиувилля, о нахождении нетривиальных решений уравнения (8), удовлетворяющих граничным условиям (9).

Относительно неизвестной функции $Y(y)$ получаем следующую спектральную задачу

$$Y''(y) + \lambda_2^2 Y(y) = 0; \qquad (10)$$

$$Y(0) = 0;\ Y(b) = 0. \qquad (11)$$

А относительно функции $Z(z)$ получили уравнение Бесселя:

$$Z''(z) + \frac{k}{z} Z'(z) - \lambda^2 Z(z) = 0, \qquad (12)$$

где переменные разделения в уравнениях (8), (10) и (12) связаны соотношением

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \qquad (13)$$

Найдем в Maple решение уравнения (8), удовлетворяющее первому условию в (9):

>eq1:=diff(X(x),x$2)+(lambda(1))^2*X(x)=0;

$$eq1 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \lambda(1)^2 X(x) = 0;$$

>dsolve({eq1,X(0)=0},X(x));

$$X(x) = \_C1 \sin(\lambda(1)x).$$

Так как собственные функции спектральной задачи определяются с точностью до постоянного множителя, примем значение константы C_1 равным единице:

>sol1:=%;

$$sol1 := X(x) = \_C1 \sin(\lambda(1)x);$$

>subs(_C1=1,sol1);

$$X(x) = \sin(\lambda(1)x);$$

>_EnvAllSolutions:=true:

Теперь нужно найти неизвестный коэффициент λ(1), учитывая второе условие в (9).

>solve(sin(lambda(1)*a)=0,lambda(1));

$$\frac{\pi\_Z1\approx}{a}.$$

Таким образом, каждому собственному значению ν:

>nu:=n -> pi*n/a;

$$\nu := n \to \frac{\pi n}{a},$$

соответствует собственная функция вида

>X:=(x,n) -> sin(x*nu(n));

$$X := (x,n) \to \sin(x\nu(n)).$$

Следует пояснить для дальнейшего решения краевой задачи некоторые шаги вычислений программы. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\lambda_1 x + C_2 \sin\lambda_1 x. \qquad (14)$$

Подставив функцию (14) в первое условие из (9), найдем, что $C_1 = 0$, а константу C_2, как уже пояснялось, положим равной единице.

С учетом второго граничного условия будем иметь

$$\sin\lambda_1 a = 0;$$

$$\lambda_1 a = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом, собственные значения задачи Штурма – Лиувилля (8)–(9) имеют вид

$$\lambda_{1n}^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \; n = 1, 2 \ldots \qquad (15)$$

А каждому собственному значению λ_{1n} соответствует собственная функция

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{a}, \; n = 1, 2 \ldots \qquad (16)$$

С помощью команд

>eq2:=diff(Y(y),y$2)+(lambda(2))^2*Y(y)=0;

$$eq2 := \frac{d^2}{dy^2} Y(y) + \lambda(2)^2 Y(y) = 0;$$

>dsolve({eq2,Y(0)=0},Y(y));

$$Y(y) = \_C1 \sin(\lambda(2)y).$$

Следует отметить, что программа опять выводит константу _C1, считая ее уже новой.

>sol2:=%;

$$sol2 := Y(y) = \_C1 \sin(\lambda(2)y);$$

>subs(_C1=1,sol2);

$$Y(y) = \sin(\lambda(2)y);$$

>_EnvAllSolutions:=true:

>solve(sin(lambda(2)*b=0,lambda(2));

$$\frac{\pi\_Z2\approx}{b};$$

>mu:=m -> pi*m/b;

$$\mu := m \to \frac{\pi m}{b};$$

>Y:=(y,m) -> sin(y*mu(m));

$$Y := (y,m) \to \sin(y\mu(m)).$$

Получаем, что собственным значениям задачи Штурма – Лиувилля (10)–(11)

$$\lambda_{2m}^2 = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \; m = 1, 2 \ldots \qquad (17)$$

соответствуют собственные функции вида

$$Y_m(y) = \sin\frac{\pi m y}{b}, \quad m = 1, 2 \ldots \qquad (18)$$

С учетом равенства (13) найдем

$$\lambda_{nm}^2 = \lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right). \quad (19)$$

Теперь найдем общее решение уравнения (12), подставляя в него $\lambda^2 = \lambda_{nm}^2$.

>eq3:=diff(Z(z),z$2)+(k/z)*diff(Z(z),z)-lambda^2*Z(z)=0;

$$eq3 := \frac{d^2}{dz^2}Z(z) + \frac{k\left(\frac{d}{dz}Z(z)\right)}{z} - \lambda^2 Z(z) = 0;$$

>dsolve(eq3,Z(z));

$$Z(z) = \_C1 z^{-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} BesselI\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}, \lambda z\right) + \_C2 z^{-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} BesselK\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}, \lambda z\right).$$

Таким образом, запишем общее решение уравнения (12) в виде

$$Z_{nm}(z) = A_{nm} z^{\frac{1-k}{2}} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z) + B_{nm} z^{\frac{1-k}{2}} K_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z), \quad (20)$$

где A_{nm} и B_{nm} – произвольные постоянные, $I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента 1-го рода, $K_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z)$ – функция Макдональда.

Теперь подставляя (16), (18) и (20) в (7), получим частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (4) и (5):

$$U_{nm}(x,y,z) = \left(A_{nm} z^{\frac{1-k}{2}} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z) + B_{nm} z^{\frac{1-k}{2}} K_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z)\right) \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi m y}{b}. \quad (21)$$

А общее решение будем искать в виде следующего ряда:

$$U(x,y,z) = z^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z) + B_{nm} K_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z)\right) \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi m y}{b}. \quad (22)$$

Ряд (22) будет являться решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (4) и (5), если он равномерно сходится и сходятся ряды, полученные из него дифференцированием по переменным x, y, z дважды.

Внесем рассуждения в программу Maple:

>u:=(x,y,z) -> Sum(Sum(Z(z)*X(x,n)*Y(y,m),n=1..infinity),m=1..infinity);

$$u := (x,y,z) \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Z(z) X(x,n) Y(y,m)\right).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_{nm} и B_{nm} подставим (22) в граничные условия (6). Сначала вычислим производную, запомнив ее под именем, скажем, «*uu*», и подставим в нее значение $z = 0$:

>uu:=(x,y,z) -> diff(u(x,y,z),z);

$$uu := (x,y,z) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} u(x,y,z);$$

>uu(x,y,0);

В результате программа выдает следующее сообщение об ошибке: «Error, (in BesselK) numeric exception: division by zero». Действительно [1], для выполнения первого условия из (6), нужно положить $B_{nm} = 0$. Очевидно, что при $B_{nm} = 0$ и $0 < k < 1$ условие $U_z(x, y, 0) = 0$ выполняется. Тогда ряд (22) принимает вид

$$U(x,y,z) = z^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}. \quad (23)$$

>subs(_C2=0,Z(z));

$$\_C1 z^{-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} BesselI\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}, \lambda z\right);$$

>ZZ:=z -> _C1*z^(-(1/2)*k+1/2)*BesselI((1/2)*k-1/2,lambda*z);

$$ZZ := z \to \_C1 z^{-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} BesselI\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}, \lambda z\right);$$

>u:=(x,y,z) -> Sum(Sum(ZZ(z)*X(x,n)*Y(y,m),n=1..infinity),m=1..infinity);

$$u := (x,y,z) \to \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} ZZ(z) X(x,n) Y(y,m)\right).$$

Подставим теперь ряд (23) во второе условие из (6):

$$c^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} c)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b} = \varphi(x,y).$$

Умножим обе части последнего равенства на выражение $\sin\frac{\pi\tilde{n}x}{a}\sin\frac{\pi\tilde{m}y}{b}$ и проинтегрируем его по переменной x на промежутке от 0 до a, по переменной у на отрезке от 0 до b. При этом будем учитывать равенства [4]:

$$\int_0^a\int_0^b \sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\sin\frac{\pi\tilde{n}x}{a}\sin\frac{\pi\tilde{m}y}{b}dxdy = \begin{cases} 0, \; n \neq \tilde{n}, \; m \neq \tilde{m}, \\ \frac{ab}{4}, n = \tilde{n}, \; m = \tilde{m}. \end{cases}$$

Тогда получим

$$c^{\frac{1-k}{2}} A_{nm} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} c)\frac{ab}{4} = \int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}dxdy,$$

откуда найдем неизвестные коэффициенты:

$$A_{nm} = \frac{4c^{\frac{k-1}{2}}}{abI_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} c)}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}dxdy. \quad (24)$$

Отметим эти рассуждения в программе и выведем результат.

```
>u(x,y,c)=phi(x,y):
>assume(n::posint,m::posint);
>subs(_C1=A[n,m],%);
>A[n,m]:=(4*c^((k-1)/2))/(a*b*BesselI((1/2)*k-1/2,lambda*c))*
int(int(phi(x,y)*sin(x*Pi*n/a)*sin(y*Pi*m/b),y=0..b),x=0..a):
>u(x,y,z);
```

В результате запишем окончательный вид решения краевой задачи (2)–(6):

$$U(x,y,z) = \frac{4}{ab}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{\pi nx}{a}\,\sin\frac{\pi my}{b}dxdy}{I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} c)} I_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_{nm} z)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, \quad (25)$$

где коэффициенты λ_{nm}^2 определяются по формуле (19).

Заключение

С помощью системы компьютерной математики Maple можно решать самые разнообразные задачи. В работе демонстрируется исследование краевой задачи для трехмерного эллиптического уравнения второго порядка с оператором Бесселя, так как программа позволяет использовать методы решения задач, связанных с уравнениями в частных производных, и избежать рутинных математических вычислений в исследовании задач математической физики.

Список литературы

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. – М.: И.Л., 1949. – 799 с.

2. Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М. Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя с интегральным условием второго рода // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – Вып.1. – Ч.1. – С. 14–21.

3. Денисова М.Ю., Киндер М.И. Краевые задачи для одного сингулярного дифференциального уравнения с оператором Бесселя // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11. – Ч. 7. – С. 1328–1332.

4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

5. Zaitseva N.V. Boundary value problem for a B-hyperbolic equation with an integral condition of the second kind // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – Pakistan, 31 August, 2015. – Vol. 78. – № 3. – P. 497–508.

References

1. Vatson G.N. Teorija besselevyh funkcij. Chast pervaja. M.: I.L., 1949. 799 p.

2. Garipov I.B., Mavljaviev R.M. Kraevaja zadacha dlja odnogo parabolicheskogo uravnenija s operatorom Besselja s integralnym usloviem vtorogo roda // Izvestija TulGU. Estestvennye nauki. 2014. Vyp.1. Ch.1. pp. 14–21.

3. Denisova M.Ju., Kinder M.I. Kraevye zadachi dlja odnogo singuljarnogo differencialnogo uravnenija s operatorom Besselja // Fundamentalnye issledovanija. 2013. no. 11. Ch. 7. pp. 1328–1332.

4. Koshljakov N.S., Gliner Je.B., Smirnov M.M. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh matematicheskoj fiziki: ucheb. posobie dlja meh.-mat. fak. un-tov. M.: Vysshaja shkola, 1970. 712 p.

5. Zaitseva N.V. Boundary value problem for a B-hyperbolic equation with an integral condition of the second kind // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. Pakistan, 31 August, 2015. Vol. 78. no. 3. pp. 497–508.