УДК 330.44

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

[1]Иванюк В.А., [3]Андропов К.Н., [2]Егорова Н.Е.

[1]Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, e-mail: ivaver6@gmail.com;
[2]Центральный экономико-математический институт РАН, Москва;
[3]ООО «Валком-ПМ», Волжский, e-mail: ivenera08@mail.ru

Для решения задач оптимизации инвестиционного портфеля предлагается использовать методы, позволяющие более быстро и точно продвигаться к оптимуму с заданной хорошей начальной точкой. К таким методам оптимизации инвестиционного портфеля относятся: детерминистический контроль, алгоритм Нелдера – Мида, алгоритм Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS). В статье анализируются три подхода: параметрический, непараметрический и полупараметрический. Описывается параметрический подход на основе оценки вариационно-ковариационной матрицы в расчёте VaR. Приводится описание многомерной обобщенной авторегрессионной модели гетероскедастичности (MGARCH). Принимая во внимание результаты работы модели, можно определить будущие результаты, а адекватность модели может быть представлена в количественном отношении на основании результатов проверок с использованием исторических данных. Предлагается также использовать и непараметрический подход, который основывается на исторических данных. Такой подход устанавливает меньше строгих условий, однако присутствует риск чрезмерно близкой подгонки при извлечении данных. К данному подходу относятся историческое моделирование методом Монте-Карло, а также подходы нейронных сетей и регрессионного анализа.

Ключевые слова: моделирование, методы оптимизации, эффективность инвестиционной стратегии

EVALUATION METHODS OF EFFICIENCY AND OPTIMIZATION OF INVESTMENT PORTFOLIO

[1]Ivanyuk V.A., [3]Andropov K.N., [2]Egorova N.E.

[1]Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, e-mail: ivaver6@gmail.com;
[2]Central Economics and Mathematics Institute, RAS, Moscow;
[3]OOO «Valcom-PM», Volzhsky, e-mail: ivenera08@mail.ru

To solve the problems of optimization of the investment portfolio is proposed to use methods to more quickly and accurately move to the optimum to set a good starting point. These methods optimize the investment portfolio include: deterministic control algorithm of Nelder-Mead algorithm Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). The article is analyzed three approaches: parametric, non-parametric and semi-parametric. Describes the parametric approach is based on evaluation of variational-covariance matrix in the calculation of VaR. The description of multivariate generalized autoregressive heteroscedasticity model (MGARCH). Taking into account the results of the model, we can determine future performance, and the adequacy of the model can be represented in quantitative terms on the basis of the results of tests using historical data. It is proposed to also use a non-parametric approach, which is based on historical data. This approach sets a less stringent conditions, but there is a risk too close fitting when retrieving data. By this approach include historical simulation Monte Carlo, as well as approaches of neural networks and regression analysis.

Keywords: modeling, methods of optimization, the efficiency of investment strategy

Для расчета процентного содержания активов в портфеле применяют различные методы оптимизации. Рассмотрим основные оптимизационные методы.

Детерминистический контроль

Рассмотрим квадратично-линейный метод отслеживания траектории, который имеет следующий вид: $(u_{kk})_{=0}^{N-1}$

Целью является минимизирование функционала стоимости:

$$J = \frac{1}{2}\left[x_N - \tilde{x}_N\right]' W_N \left[x_N - \tilde{x}_N\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\left[x_k - \tilde{x}_k\right]' W \left[x_k - \tilde{x}_k\right] + \left[u_k - \tilde{u}_k\right] \wedge \left[u_k - \tilde{u}_k\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\left[x_k - \tilde{x}_k\right]' W \left[x_k - \tilde{x}_k\right] + \left[u_k - \tilde{u}_k\right]' \wedge \left[u_k - \tilde{u}_k\right]\right\},$$

где x_k = вектор состояния – вектор n; $\tilde{x}_k$ = необходимый вектор состояния – вектор $\tilde{n}$.

Алгоритм Нелдера – Мида

Данный алгоритм прост, но не быстр и не надежен. При решении многих задач проблема оптимизации, являющаяся частью более крупной проблемы, должна неоднократно решаться с незначительным изменением параметров функции при каждой итерации. Для решения таких задач, общих для динамических моделей, обычно предпочитают использовать метод, позволяющий более быстро и точно продвигаться к оптимуму с заданной хорошей начальной точкой.

Рассмотрим применение алгоритма оптимизации Нелдера – Мида к множеству глобальных минимумов. Для произвольно взятой функции $h{:}D \to R$ при $D \subset R^m$ найдем точки

$$x^* \in D,\ x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_m^*\right),$$

при которых

$$x^* = \arg\min h(w),$$

$$x^* = \operatorname{argmin} h\left(w\right),\quad w \in D.$$

Таким образом,

$$h(x^*) = \min h(x),\ x \in D, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$.

Фактически $h(x^*)$ представляет собой глобальный минимум функции $h(x)$, $x \in D$. Для определения глобального минимума $h(x^*)$ часто применяются классические методы оптимизации с использованием производной, основанные на направлении градиента. Но на практике точное выражение функции градиента всегда чрезвычайно сложно определить. Поэтому выражение градиента часто аппроксимируется по конечным разностям.

В методах без использования производной непосредственно применяются только некоторые выбранные значения $h(x)$.

Метод NM ориентирован на решение проблемы непрерывной неограниченной оптимизации типа (1).

Гибкость алгоритма, построенного по принципу *NM*, задается его четырьмя параметрами α, β, γ, δ, которые направляют процесс на поиск глобального минимума функции.

Рассмотрим применение алгоритма NM. В итеративных процедурах оптимизации в целом используется только начальная точка $x_1 \in D$, которая определяется в соответствии со специальными правилами.

Алгоритм NM за начальную форму принимает $D \subset R^m$. Для любых двух точек $y \in R^m$ и $z \in R^m$ можно получить новую точку $w \in R^m$ путем использования λ-правила, что имеет следующий вид:

$$w = z + \lambda(y - z),\ \lambda \in R.$$

Таким образом, если $y = (y, y, y, \ldots, y_m)$, $z = (z, z_2, z, \ldots, z_m)$, $w = (w_1, w_2, w, \ldots, w_m)$, мы получаем

$$w_j = z_j + \lambda(y_j - z_j),\ 1 \le j \le m.$$

В данном варианте параметры λ имеют следующие значения:

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 0{,}5,\ \delta = 0{,}5.$$

Алгоритм Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS)

Рассмотрим алгоритм оптимизации на основе метода *BFGS*. Выберем начальное приближение x^0, начальное приближение гессиана $H^0 = 1$ и параметры остановки δ и ε >0.

Шаг 1. Решим $H^k s^k = -(\nabla f(x^k))^T$ для направления поиска s^k.

Шаг 2. Решим $\lambda^k = \arg\min_{\lambda} f(x^k + \lambda s^k)$.

Шаг 3. $x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k$.

Шаг 4. Обновим H_k:

$$z_k = x^{k+1} - x^k;$$

$$y_k = \left(\nabla f(\left(x^{k+1}\right)\right)^T - \left(\nabla f(\left(x^k\right)\right)^T;$$

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k z_k z_k^T H_k}{z_k^T H_k z_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T z_k}. \qquad (2)$$

Шаг 5. Если $\left\|x^k - x^{k+1}\right\| < \varepsilon\left(1 + \left\|x^k\right\|\right)$, перейти к шагу 6; иначе перейти к шагу 1.

Шаг 6. Если $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| < \delta\left(1 + \left|f\left(x^k\right)\right|\right)$, остановиться и доложить о выполнении; иначе остановиться и доложить о схождении к неоптимальной точке.

Эта последовательность H_k является положительно определенной и симметричной настолько, насколько симметрично H_0. Общим выбором для H_0 является матрица тождественности. В этом случае первый шаг такой же, как и шаг наискорейшего спуска. Если система не слишком большая, H_0 может быть задан равной гессиану в x^0, при этом первый шаг должен быть таким же, как и в методе Ньютона с линейным поиском. Так как все H_k являются положительно определенными, для выполнения решения в шаге 1 для направления поиска можно использовать разложение Холецкого.

Уравнение (2) представляет собой усовершенствование метода BFGS, а именно метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла (DFP), при котором уравнение (2) заменяется на (3):

Оптимизация:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k z_k) y_k^T + y_k (y_k - H_k z_k)^T}{y_k^T z_k} - \frac{z_k^T (y_k - H_k z_k) y_k y_k^T}{(y_k^T z_k)^2}. \quad (3)$$

Как показывает общая практика, метод BFGS работает чаще, чем метод DFP, однако при этом последний в некоторых случаях является более эффективным.

В алгоритмах гессиан-обновления последовательность H_k при решении не обязательно сходится к истинному гессиану. Таким образом, в случае необходимости гессиан должен вычисляться в конце. Одним из таких случаев является вычисление формулы оценки с использованием метода максимального правдоподобия, когда гессиан используется для составления выводов. Так как конечный гессиан в любом случае должен вычисляться в подобном эконометрическом контексте, то когда процедура оптимизации очевидно сходится в одной точке, необходимо переходить на метод Ньютона. Это несложно: если проблема сходится в одной точке, будет достаточно одной итерации по методу Ньютона; если требуется больше, это свидетельствует о том, что поиск следует продолжать. Таким образом, были рассмотрены основные методы оптимизации инвестиционного портфеля.

Эффективность портфеля ценных бумаг в теории риска

Рассмотрим один из методов определения эффективности инвестиционного портфеля, основанный на теории риска. Введем основополагающий критерий VAR, описывающий статистическую меру риска. Данный критерий снижает риск падения курса от выбранных факторов риска, с заданным уровнем доверительной вероятности и устойчивым инвестиционным горизонтом. Портфель со стоимостью X, состоящий из n активов, каждый из которых имеет прибыльность r_t, $(t = 1, 2, ..., n)$, и весом портфеля ω_t, r_t $(t = 1, 2, ..., n)$, уровнем доверительной вероятности d и периодом владения h, значение рисковой стоимости портфеля VaR со значением $VaRd$, h на уровне доверительной вероятности d и инвестиционным промежутком времени h, определяется следующей формулой:

$$P(\omega_t' r_t < VaRd, h) = 1 - d,$$

где $P(.)$ – плотность распределения вероятности.

В течение многих лет в экономике упоминались три основных подхода, а именно: параметрический, непараметрический и полупараметрический. Параметрический подход основан на дифференцировании аналитической формы при ограниченных условиях и обладает свойством разрешимости в модельной конструкции. Эталоны сравнения – многомерное экспоненциально-взвешенное скользящее среднее (MEWMA) и многомерная обобщенная авторегрессионная модель гетероскедастичности (MGARCH) – принадлежат к данной категории и используются для оценки вариационно-ковариационной матрицы в расчёте VaR. В исследованиях, посвященных VaR, MGARCH является наиболее устойчивым и широко используемым эталоном.

MEWMA рекурсивно определяется как

$$\sum_{t+1} = (1-\lambda)(r_t - \mu)(r_t - \mu) + \lambda \sum_t,$$

где r_t – $n\times1$ вектор доходов; μ – вектор ожидаемых доходов; $\lambda \in (0, 1)$;

$$\sum_t = \sum_{t=1} \left[(r_t - \mu)(r_t - \mu) \right].$$

В течение последних десятилетий проводились активные исследования моделей MGARCH с целью моделирования временных рядов [9]. Однако только недавно были предприняты попытки исследовать показатели, основанные на VaR MGARCH. Среди исследователей можно отметить Ромбаутса и Вербека [11]; Ку и Вонга [10]; Хуанга и соавт. [9]. Модель DCC-MGARCH определяется как

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_t + \mu_t + \varepsilon_{t+1},$$

где r_t относится к возврату со временем t; $r_t \sim N(0, D_{t+1} RD_{t+1})$; μ_t – N – бесконечномерный вектор условного среднего значения; D_t^2 может быть определен как любая одномерная GARCH модель, т.к.

$$D_t^2 = diag\{\omega_i\} + diag\{k_i\} r_{t-1} r_{t-1}' + diag\{\lambda_i\} D_{t-1}^2, \ \varepsilon_t = D_t^{-1} r_t .$$

Матрица динамической условной корреляции R_t от ε_t при времени t определяется следующим образом:

$$R_t = diag(Q_t)^{-1} Q_t \, diag(Q_t)^{-1},$$

где Q_t является $N \times N$ симметричной положительно определенной безотносительной матрицей корреляций ε_t, как в уравнении

$$Q_t = S \circ (\mu - A - B) + A \circ \varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + B \circ Q_{t-1},$$

где ○ – произведение Адамара двух идентичных по размерам матриц.

Непараметрический подход основывается на исторических данных для выведения устойчивой схемы. Такой подход устанавливает меньше строгих условий, однако присутствует риск чрезмерно близкой подгонки при извлечении данных. К данной категории относятся историческое моделирование методом Монте-Карло, а также подходы нейронных сетей и регрессионного анализа.

Принимая во внимание результаты работы моделей, можно определить будущие результаты, а адекватность модели может быть представлена в количественном отношении на основании результатов проверок с использованием исторических данных.

Если модель применима, число маловероятных потерь x должно следовать двумерному нормальному распределению. Таким образом, при данном общем числе наблюдений n при уровне доверительной вероятности p вероятность рассчитывается следующим образом:

$$LR_{UC} = -2\ln\left[(1-p)^{n-x}p^x\right] + $$
$$+ 2\ln\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\right].$$

Статистика результатов проверок отношения правдоподобия Купьец согласовывается с распределением χ^2.

Список литературы

1. Андропов К.Н. Модель «Кризисного процесса» / К.Н. Андропов, Д.Л. Качалов, В.А. Иванюк, Н.В. Соболев // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2015: материалы Восьмой международной конференции: В 2 томах. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук; под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 229–231.

2. Егорова Н.Е. Основные направления и концепции анализа фондовых рынков / Н.Е. Егорова, К.А. Торжевский // Аудит и финансовый анализ. – 2008. – № 6. – С. 1–6.

3. Иванюк В.А. Основные этапы формирования инвестиционного портфеля / В.А. Иванюк, А.С. Демидова, Т.С. Кузнецова // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2015: материалы Восьмой международной конференции: В 2 томах. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук; под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 256–258.

4. Иванюк В.А., Веденеев Д.А., Шувалов К.И. Расчет ожидаемой доходности финансовых активов // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2015: материалы Восьмой международной конференции: В 2 томах. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук; под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 311–313.

5. Иванюк В.А. Разработка методологии долгосрочного прогнозирования на основе мультитрендового прогноза / В.А. Иванюк, К.Н. Андропов, А.Д. Цвиркун // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12 (часть 5). – С. 1032–1036.

6. Иванюк, В.А. Анализ состояния рынка и построение модели кризиса / В.А. Иванюк, К.Н. Андропов, А.Д. Цвиркун // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6.

7. Иванюк В.А. Методология совокупного прогнозирования доходов активов и их рисков / В.А. Иванюк, К.Н. Андропов, А.Д. Цвиркун // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12 (часть 5). – С. 1028–10322.

8. Hannan E.J. The Asymptotic Theory of Linear Time Series Models // Journal of Applied Probability. – 1971. – № 10. – P. 130–145.

9. Huang J.T. Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method / J.T. Huang, K.J. Lee, H. Liang, W.F. Lin // Insurance: Mathematics and Economics. – 2009. – P. 315.

10. Ku Y.H. Estimating portfolio value-at-risk via dynamic conditional correlation mgarch model – an empirical study on foreign exchange rates / Y.H.H. Ku, J.J. Wang // Applied Economics Letters. – 2008. – № 15 (7). – P. 533–538.

11. Rombouts J.V.K. Evaluating portfolio value-at-risk using semi-parametric GARCH models / J..V.K. Rombouts, M. Verbeek // Quantitative Finance. – 2009. – № 9 (6). – P. 737–745.

References

1. Andropov K.N. Model «Krizisnogo processa» / K.N. Andropov, D.L. Kachalov, V.A. Ivanjuk, N.V. Sobolev / v knige: Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem MLSD2015 Materialy Vosmoj mezhdunarodnoj konferencii: V 2 tomah. Institut problem upravlenija im. V. A. Trapeznikova Rossijskoj akademii nauk; Pod obshhej redakciej S.N. Vasileva, A.D. Cvirkuna. Moskva IPU RAN, 2015. pp. 229–231.

2. Egorova N.E. Osnovnye napravlenija i koncepcii analiza fondovyh rynkov / N.E. Egorova, K.A. Torzhevskij // Audit i finansovyj analiz. 2008. no. 6. pp. 1–6.

3. Ivanjuk V.A. Osnovnye jetapy formirovanija investicionnogo portfelja/ V.A. Ivanjuk, A.S. Demidova, T.S. Kuznecova / v knige: Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem MLSD2015 Materialy Vosmoj mezhdunarodnoj konferencii: V 2 tomah. Institut problem upravlenija im. V. A. Trapeznikova Rossijskoj akademii nauk; Pod obshhej redakciej S.N. Vasileva, A.D. Cvirkuna. Moskva IPU RAN, 2015. pp. 256–258.

4. Ivanjuk V.A. Raschet ozhidaemoj dohodnosti finansovyh aktivov / Ivanjuk V.A., Vedeneev D.A., Shuvalov K.I./ V knige: Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem MLSD2015 Materialy Vosmoj mezhdunarodnoj konferencii: V 2 tomah. Institut problem upravlenija im. V. A. Trapeznikova Rossijskoj akademii nauk; Pod obshhej redakciej S.N. Vasileva, A.D. Cvirkuna. Moskva IPU RAN, 2015. pp. 311–313.

5. Ivanjuk, V.A. Razrabotka metodologii dolgosrochnogo prognozirovanija na osnove multitrendovogo prognoza / V.A. Ivanjuk, K.N. Andropov, A.D. Cvirkun // Fundamentalnye issledovanija. 2014. no. 12 (chast 5). pp. 1032–1036.

6. Ivanjuk V.A. Analiz sostojanija rynka i postroenie modeli krizisa / V.A. Ivanjuk, K.N. Andropov, A.D. Cvirkun // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2014. no. 6.

7. Ivanjuk V.A. Metodologija sovokupnogo prognozirovanija dohodov aktivov i ih riskov / V.A. Ivanjuk, K.N. Andropov, A.D. Cvirkun //Fundamentalnye issledovanija. 2014. no. 12 (chast 5). pp. 1028–1032.

8. Hannan E.J. The Asymptotic Theory of Linear Time Series Models / E.J. Hannan // Journal of Applied Probability, no. 10. 1971. pp. 130–145.

9. Huang J.T. Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method / J.T. Huang, K.J. Lee, H. Liang, W.F. Lin // Insurance: Mathematics and Economics. 2009. pp. 315.

10. Ku Y.H. Estimating portfolio value-at-risk via dynamic conditional correlation mgarch model–an empirical study on foreign exchange rates / Y.H.H. Ku, J.J. Wang // Applied Economics Letters, no. 15 (7). 2008. pp. 533–538.

11. Rombouts, J.V.K. Evaluating portfolio value-at-risk using semi-parametric GARCH models / J.V.K. Rombouts, M. Verbeek // Quantitative Finance, no. 9 (6). 2009. pp. 737–745.