УДК 621.390; 519.722

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ В СТРУКТУРЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ МИНИМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

Дулесов А.С., Карандеев Д.Ю., Кондрат Н.Н.

ФГБОУ ВПО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова», Абакан, e-mail: khsukhsu@mail.ru

Представлен метод, с помощью которого определяется количество информации, содержащееся в структуре технической системы. В качестве показателей структуры берутся вероятности состояний элементов системы, которые разделены по качественному признаку на два противоположных состояния. Построены математические выражения и представлен порядок расчетов определения информационной энтропии. В основу метода положен способ построения параллельно-последовательных структур методом минимальных сечений. Дан пример, на котором показана работа данного метода. Полученные результаты значений энтропии сравнивались с аналогичными значениями, рассчитанными по методу полного перебора состояний элементов системы, и определены погрешности расчетов. Предлагаемый метод позволяет на основе сопоставления значений энтропии противоположных состояний выбрать систему с более высоким уровнем эффективности или структурной надежности.

Ключевые слова: информационная энтропия, мера информации, метод минимальных сечений, структура технической системы

DEFINITION OF AMOUNT OF INFORMATION ENTROPY IN STRUCTURE OF THE TECHNICAL SYSTEM BY METHOD OF THE MINIMUM SECTIONS

Dulesov A.S., Karandeev D.Y., Kondrat N.N.

Katanov Khakass State University, Abakan, e-mail: khsukhsu@mail.ru

The method by means of which the amount of information containing in structure of technical system is defined is presented. Probabilities of conditions of system's elements which are shared on a qualitative character on the two opposite states, are taken as indicators of structure. Mathematical expressions are constructed, and the procedure of calculation of determination of information entropy is presented. The way of construction of seriesparallel structures by method of the minimum sections is the basis for a method. The example on which work of this method is shown is given. The received results of the entropy values were compared to the similar values calculated on a method of search of state of system's elements and errors of calculations are defined. The offered method allows on the basis of comparing the values of entropy opposite states to choose system with higher level of efficiency or structural reliability.

Keywords: information entropy, information measure, method of the minimum sections, structure of technical system

Технические системы являются сложными, наделены множествами свойств, функций и требуют постоянного контроля над их состоянием. Эти обстоятельства обуславливают присутствие неопределенности информации по причине вероятностного протекания процессов. Применение теории информации не исключает возможностей оценивать состояние технической системы через меру неопределенности информации, включающую в себя информационную энтропию. Из-за многообразия состояний системы невозможно применить скольконибудь известные методы определения количества энтропии. Однако решение можно найти, пусть даже и с некоторыми допущениями, если рассматривать структуру системы. В этой сфере деятельности для оценки состояния системы через её структуру можно применить ряд математических инструментов определения количества информации. С количественным содержанием

информации в технической системе можно ознакомиться в работах [1, 2, 9].

Если рассматривать структуру, то её элементы связаны между собой определенным образом и находятся в тот или иной момент времени в разнообразных вероятностных состояниях. При этом изменению подлежит и энтропия. Если принимать во внимание необходимость в определении количества информации, то в ряде задач целесообразно разделить информацию по качественному признаку на составляющие для целей последующего анализа. Например, когда рассматривают структурную надежность системы, разделяют состояния элементов на работоспособное и неработоспособное. Если решать подобную задачу с позиции меры неопределенности информации, то целесообразно информационную энтропию системы разделить по качественному признаку [6] с разграничением уровня надежности через показатель [3].

Прежде чем приступить к определению количества энтропии, следует построить модель выявления совместной и условной энтропий при рассмотрении событий, возникающих в системе, например отказ и работа элемента и системы. Такие модели предложены в [4, 5], реализация которых требует разработки методов. Одним из таких методов является метод перебора состояний (предложенный в [7]) и метод эквивалентирования последовательных и параллельных структур (представленный в [8]). Однако такие методы не применимы для сложнозамкнутых и многоэлементных структур. Поэтому востребован метод, который базировался бы на способе построения минимальных сечений структуры.

Рассмотрим далее математический метод минимальных сечений, позволяющий рассчитывать количество энтропии, присущей противоположным (непересекающимся) вероятностным состояниям элементов системы.

Определение энтропии методом минимальных сечений предполагает наличие показателей статистического ансамбля: время, в течение которого элемент находился в том или ином состоянии; частота появления тех или иных событий и др. Эти показатели позволяют рассчитать вероятности p_i и $q_i = 1 - p_i$ нахождения элемента і в двух противоположных состояниях. Если рассматривать состояние технической системы с позиции её структурной надежности, то p_i и q_i соответственно, вероятность работоспособного и неработоспособного состояний элемента і. Поскольку учитываются только два состояния, то можно определить информационную (статистическую) энтропию по Шеннону для одного элемента i по выражению

$$H_i = -(p_i \log_2 p_i + q_i \log_2 q_i),$$
 (1)

при условии $p_i+q_i=1$. Здесь логарифм определения величины H_i в битах имеет основание, равное 2, что свидетельствует о рассмотрении двух противоположных состояний.

Для всей системы в целом, в предположении о независимом функционировании элементов системы, можно получить суммарную энтропию:

$$H_{\Sigma} = -\sum_{i=1}^{N} [H(p_i) + H(q_i)] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} (p_i \log_2 p_i + q_i \log_2 q_i),$$
(2)

где N — число элементов в структуре системы. При всех p_i = q_i = 0,5, по (2) получим энтропию: H_Σ = N.

Выражение (2) потребуется для проверки правильности выполненных расчетов энтропии противоположных состояний. Её количество следует рассчитать с учетом рассмотрения совместных событий в системе. Поэтому востребован метод, позволяющий рассчитывать качественные составляющие суммарной энтропии. Для определения её составляющих следует учесть не только число элементов N (состояния которых рассматриваются как независимые), но и топологию структуры системы. Если структура имеет замкнутый вид, то её следует преобразовать классическим методом минимальных сечений к виду «параллельно-последовательная структура».

Сформированные сечения, отраженные в виде параллельно-последовательной структуры, позволяют применить предлагаемый метод, который базируется на эквивалентных преобразованиях [8]. При реализации данного метода следует соблюсти условие: количество информации в исходной структуре должно быть равно количеству информации в сформированной параллельно-последовательной структуре. Дело в том, что количество элементов из-за их повторяемости в сформированной структуре будет больше чем в исходной структуре. Соблюдение данного условия выполняется следующим образом: количество энтропии каждого элемента k (во вновь созданной структуре) уменьшается на число его повторений.

Далее предложим порядок и применяемые математические выражения для расчета энтропии.

- 1. Рассчитывается энтропия по каждому из N элементов согласно (1):
- для работоспособного состояния элемента i

$$H(p_i) = -p_i \log_2 p_i; \tag{3}$$

- для неработоспособного состояния элемента i -

$$H(q_i) = -q_i \log_2 q_i. \tag{4}$$

2. Рассчитывается энтропия по каждому из k элементов последовательно-параллельной структуры согласно:

для работоспособного состояния

$$H(p_k) = -\frac{1}{l} p_i \log_2 p_i;$$
 (5)

- для неработоспособного состояния

$$H(q_k) = -\frac{1}{l}q_i \log_2 q_i,$$
 (6)

где l – количество повторений элемента i во вновь построенной структуре.

- 3. Для каждого сечения определяются вероятности:
- неработоспособного состояния элементов сечения j -

$$Q_j = \prod_{k=1}^{n_j} q_k, \tag{7}$$

где q_k — вероятность неработоспособного состояния элемента k, сечения j; n_j — количество элементов, входящее в сечение;

- работоспособного состояния элементов сечения j -

$$P_{j} = 1 - Q_{j}. \tag{8}$$

- 4. По каждому из сечений определяются составляющие энтропии:
- неработоспособного состояния элементов сечения j -

$$H(Q_j) = \sum_{i=1}^{n_j} \left[\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n_j} q_k \right) H(q_i) \right]; \tag{9}$$

- работоспособного состояния элементов сечения j -

$$H(P_j) = \sum_{k=1}^{n_j} [H(p_k) + H(q_k)] - H(Q_j). (10)$$

5. Определение энтропии системы: – неработоспособного состояния –

$$H(Q) = \sum_{j=1}^{m} \left[H(Q_j) + \left(1 - \prod_{\substack{k=1\\k \neq j}}^{m} P_j \right) H(P_j) \right], \quad (11)$$

где m — количество сечений;

работоспособного состояния —

$$H(P) = H_{\Sigma} - H(Q). \tag{12}$$

Пример. Следует определить методом минимальных сечений количество энтропии работоспособного и неработоспособного состояний мостиковой структуры, представленной на рис. 1.

Согласно рис. 1 множество всех состояний элементов $5^2 = 32$. Неработоспособных состояний или сечений – 16. Из них минимальными являются сечения: $\{12\}$, $\{34\}$, $\{235\}$, $\{145\}$, количество которых – m = 4. Параллельно-последовательная структура из минимальных сечений представлена на рис. 2.

Примем значения $\hat{p_i} = 0.9$; $q_i = 1 - p_i = 0.1$, чтобы сопоставить конечные результаты энтропии со значениями, представленными в [8]. Представленные в процессе расчетов формулы отразим без перенумерации элементов сечений.

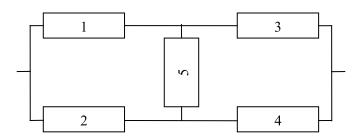


Рис. 1. Мостиковая структура (схема)

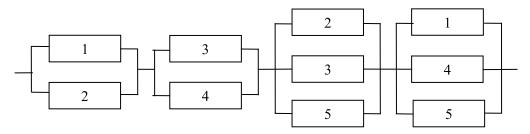


Рис. 2. Параллельно-последовательная структура (схема)

1. Определим по (3) и (4) энтропию элементов исходной схемы с N=5 (рис. 1): — для работоспособного состояния —

$$H(p_i) = -p_i \log_2 p_i = -0.9 \cdot \log_2 0.9 = 0.136.$$

для неработоспособного состояния —

$$H(q_i) = -q_i \log_2 q_i = -0.1 \cdot \log_2 0.1 = 0.332.$$

- 2. По выражениям (5) и (6) определим энтропии элементов параллельно-последовательной структуры, в которой каждый элемент i повторяется дважды:
 - для работоспособного состояния –

$$H(p_k) = -\frac{1}{2}p_i \log_2 p_i = -\frac{1}{2} \cdot 0.9 \cdot \log_2 0.9 = 0.068;$$

для неработоспособного состояния –

$$H(q_k) = -\frac{1}{2}q_i \log_2 q_i = -\frac{1}{2}0, 1 \cdot \log_2 0, 1 = 0,166.$$

3. По выражениям (7) и (8) определяем для каждого из сечений вероятности: – неработоспособного состояния:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 q_2 = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01; & Q_2 &= q_3 q_4 = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01; \\ Q_3 &= q_2 q_3 q_5 = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001; & Q_4 &= q_1 q_4 q_5 = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001; \end{aligned}$$

– работоспособного состояния:

$$P_1 = 1 - Q_1 = 0.99;$$
 $P_2 = 0.99;$ $P_3 = 0.999;$ $P_4 = 0.999.$

- 1. Согласно (9) и (10) определим составляющие энтропии каждого сечения:
- неработоспособного состояния:

$$\begin{split} H(Q_1) &= q_1 H(q_2) + q_2 H(q_1) = 0.1 \cdot 0.166 + 0.1 \cdot 0.166 = 0.033; \\ H(Q_2) &= q_3 H(q_4) + q_4 H(q_3) = 0.1 \cdot 0.166 + 0.1 \cdot 0.166 = 0.033; \\ H(Q_3) &= q_2 q_3 H(q_5) + q_2 q_5 H(q_3) + q_3 q_5 H(q_2) = \\ &= 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.166 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.166 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.166 = 0.005; \\ H(Q_4) &= q_1 q_4 H(q_5) + q_1 q_5 H(q_4) + q_4 q_5 H(q_1) = \\ &= 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.166 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.166 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.166 = 0.005; \end{split}$$

– работоспособного состояния:

$$H(P_1) = H(p_1) + H(q_1) + H(p_2) + H(q_2) - H(Q_1) =$$

$$= 0,068 + 0,166 + 0,068 + 0,166 - 0,033 = 0,436;$$

$$H(P_2) = H(p_3) + H(q_3) + H(p_4) + H(q_4) - H(Q_2) =$$

$$= 0,068 + 0,166 + 0,068 + 0,166 - 0,033 = 0,436;$$

$$H(P_3) = H(p_2) + H(q_2) + H(p_3) + H(q_3) + H(p_5) + H(q_5) - H(Q_3) =$$

$$= 0,068 + 0,166 + 0,068 + 0,166 + 0,068 + 0,166 - 0,005 = 0,699;$$

$$H(P_4) = H(p_1) + H(q_1) + H(p_4) + H(q_4) + H(p_5) + H(q_5) - H(Q_4) =$$

$$= 0,068 + 0,166 + 0,068 + 0,166 + 0,068 + 0,166 - 0,005 = 0,699.$$

- 2. Определение по выражениям (11) и (12) энтропии системы:
- неработоспособного состояния:

$$H(Q) = H(Q_1) + H(Q_2) + H(Q_3) + H(Q_4) +$$

$$+ (1 - P_2 P_3 P_4) H(P_1) + (1 - P_1 P_3 P_4) H(P_2) + (1 - P_1 P_2 P_4) H(P_3) + (1 - P_1 P_2 P_3) H(P_4) =$$

$$= 0,033 + 0,033 + 0,005 + 0,005 + (1 - 0,99 \cdot 0,999 \cdot 0,999) \cdot 0,436 + (1 - 0,99 \cdot 0,999 \cdot 0,999) \cdot 0,436 +$$

$$+ (1 - 0,99 \cdot 0,999 \cdot 0,999) \cdot 0,699 + (1 - 0,99 \cdot 0,999) \cdot 0,699 = 0,116;$$

- работоспособного состояния:

$$H(P) = H(p_1) + H(q_1) + H(p_2) + H(q_2) + H(p_3) + H(q_3) + H(q_4) + H(q_4) + H(p_5) + H(q_5) - H(Q) = 0,136 + 0,332 + 0,136 + 0,332 + 0,136 + 0,332 + 0,136 + 0,332 - 0,116 = 2,229.$$

Из расчетов видно, что энтропия работоспособного состояния преобладает над энтропией противоположного состояния, поскольку вероятность работоспособного состояния выше, чем неработоспособного.

Сравним аналогичные результаты с представленными в работе [8]: $H(P) = 2,169; \ H(Q) = 0,176; \$ суммарная энтропия $-H_{\rm S} = H(P) + H(Q) = 2,345.$

Поскольку оба сравниваемых метода построены на предположении о независимости событий (возникающих в системе), то полученные по ним суммарные энтропии совпали, подтверждая тем самым справедливость предлагаемого метода. Однако между энтропиями состояний существует разница (между H(P) - 2,7%, между H(Q) - 34%). Ошибка обусловлена способом построения минимальных сечений, без учета множества других сечений.

Заключение

Представленный в работе метод служит для определения количества энтропии двух противоположных состояний. В качестве исходной структуры берется замкнутая, которая должна быть преобразована по способу выделения минимальных сечений в параллельно-последовательную структуру. Полученное количество энтропии отражает качественное и количественное содержание информации. Интеграция данного метода в среду оценки состояния системы (например, её структурной надежности) через меру неопределенности информации позволит выполнить сопоставительные оценки между противоположными состояниями системы.

Рассматривая различные варианты структур системы, используя предлагаемый метод, можно выбрать более надежную или эффективную структуру с позиции наличия в ней определенного количества информационной энтропии.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-08-01473а.

Список литературы

- 1. Дулесов А.С., Агеева П.А. Мера информации в задаче оценки бесперебойной работы технической системы // Журнал «Фундаментальные исследования». 2011. № 12, (часть 1). С. 102—107.
- 2. Дулесов А.С., Карпушева Т.В., Хрусталев В.И. Информационные взаимосвязи в технических системах и оценка качества информации // В мире научных открытий. 2010.

- 3. Дулесов А.С., Кондрат Н.Н., Карандеев Д.Ю. Показатель разграничения уровня надежности технической системы по качественному признаку: энтропийный подход // Журнал «Фундаментальные исследования». 2016. № 2, (часть 3). С. 477–481.
- 4. Дулесов А.С., Кондрат Н.Н. Количество информации при наложении и пересечении элементарных событий // Научное обозрение. -2014. -№ 12. -C. 146–150.
- 5. Дулесов А.С., Кондрат Н.Н. Мера неопределенности информации и её свойства применительно к оценке случайного поведения технического объекта // Научное обозрение. -2014. № 7. С. 258—264.
- 6. Дулесов А.С., Кондрат Н.Н. Определение для простейшей структуры технической системы количества информационной энтропии посредством её нормировки // Фундаментальные исследования. 2015. № 2, (часть 20). С. 4408–4412.
- 7. Дулесов А.С., Кондрат Н.Н. Определение количества информационной энтропии в структуре технической системы методом перебора состояний // Фундаментальные исследования. -2015. -№ 7, (часть 4). C. 745-748.
- 8. Дулесов А.С., Кондрат Н.Н. Эквивалентирование количества информационной энтропии в структуре технической системы // Фундаментальные исследования. -2015. -№ 6, (часть 1). C. 14-19.
- 9. Дулесов А.С., Семенова М.Ю., Хрусталев В.И. Свойства энтропии технической системы // Фундаментальные исследования. -2011. -№ 8 (часть 3). -C. 631–636.

References

- 1. Dulesov A.S., Ageeva P. A. Mera informatsii v zadache otsenki bespereboynoy raboty tekhnicheskoy sistemy // Fundamentalnye issledovaniya. 2011. no. 12, (chast 1). pp. 102–107.
- 2. Dulesov A.S., Karpusheva T.V., Khrustalev V. I. Informatsionnye vzaimosvyazi v tekhnicheskikh sistemakh i otsenka kachestva informatsii // V mire nauchnykh otkrytiy. 2010. no. 6 (12). pp. 56–61.
- 3. Dulesov A.S., Kondrat N.N., Karandeev D.Yu. Pokazatel razgranicheniya urovnya nadezhnosti tekhnicheskoj sistemy po kachestvennomu priznaku: ehntropijnyj podhod // Fundamentalnye issledovaniya. 2016. no. 2, (chast 3). pp. 477–481.
- 4. Dulesov A.S., Kondrat N.N. Kolichestvo informatsii pri nalozhenii i peresechenii elementarnykh sobytiy// Nauchnoe obozrenie. 2014. no. 12. pp. 146–150.
- 5. Dulesov A.S., Kondrat N.N. Mera neopredelennosti informatsii i ee svoystva primenitelno k otsenke sluchaynogo povedeniya tekhnicheskogo obekta // Nauchnoe obozrenie. 2014. no. 7. pp. 258–264.
- 6. Dulesov A.S., Kondrat N.N. Opredelenie dlya prosteyshey struktury tekhnicheskoy sistemy kolichestva informatsionnoy entropii posredstvom ee normirovki // Fundamentalnye issledovaniya. 2015. no. 2, (chast 20). pp. 4408–4412.
- 7. Dulesov A.S., Kondrat N.N. Opredelenie kolichestva informatsionnoy entropii v strukture tekhnicheskoy sistemy metodom perebora sostoyaniy // Fundamentalnye issledovaniya. 2015. no. 7, (chast 4). pp. 745–748.
- 8. Dulesov A.S., Kondrat N.N. Ekvivalentirovanie kolichestva informatsionnoy entropii v strukture tekhnicheskoy sistemy // Fundamentalnye issledovaniya. 2015. no. 6, (chast 1). pp. 14–19.
- 9. Dulesov A.S., Semenova M.Yu., Khrustalev V.I. Svoystva entropii tekhnicheskoy sistemy // Fundamentalnye issledovaniya. 2011. no. 8 (chast 3). pp. 631–636.