УДК 517.958

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЭРЕДИТАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Паровик Р.И.

ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга», Петропавловск-Камчатский, e-mail: romanparovik@gmail.com;

ФГБУН «Институт космофизических исследований и распространения радиоволн» ДВО РАН, Паратунка, e-mail: parovik@ikir.ru

Настоящая работа посвящена вопросам устойчивости нелинейных эредитарных колебательных систем, которые обладают свойствами памяти и записываются в терминах производных дробных порядков. Дробные порядки производных можно рассматривать как дополнительные управляющие параметры колебательной системы, которые приводят к ее более гибкому математическому моделированию. Можно отметить, что нелинейные эредитарные колебательные системы при определенных значениях дробных порядков производных переходят к классическим нелинейным колебательным системам. Поэтому нелинейные эредитарные колебательные системы должны обладать более широким набором свойств, чем классические нелинейные колебательные системы. В работе приведены основные определения и теоремы асимптотической устойчивости для соизмеримых и несоизмеримых нелинейных эредитарных колебательных систем. Приведены примеры исследования устойчивости точек покоя эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля. С помощью численных методов были построены фазовые траектории для эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля, далее были исследованы на устойчивость их предельные циклы.

Ключевые слова: устойчивость, предельные циклы, эредитарность, производные дробных порядков

STUDY ON STABILITY OF HEREDITARITY OSCILLATOR VAN DER POL

Parovik R.I.

Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, e-mail:romanparovik@gmail.com;

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Paratunka, e-mail: parovik@ikir.ru

This paper deals with issues of sustainability hereditarity nonlinear vibration systems, which have the properties of memory and written in terms of the derivatives of fractional order. The fractional orders of derivatives can be regarded as an additional control parameters of the oscillating system, which leads to its more flexible mathematical modeling. It may be noted that the non-linear oscillating systems hereditarity for certain values of fractional order derivatives are transferred to a classic non-linear oscillating systems. Therefore hereditarity nonlinear oscillatory systems must have a broader set of features than the classic non-linear oscillating systems. The paper presents the basic definitions and theorems of asymptotic stability for a commensurate and incommensurate hereditarity nonlinear vibration systems. Examples of studying the stability of equilibrium points hereditarity oscillator Van der Pol. With the help of numerical methods have been constructed for the phase trajectories hereditarity oscillator Van der Pol, were further tested for their resistance limit cycles.

Keywords: stability, limit cycles, hereditarity, derivatives of fractional order

Эредитарные процессы находят отражения в различных приложениях, например в книге В.В. Учайкина [9] эредитарным процессам посвящена целая глава. Понятие эредитарности или памяти было введено итальянским математиком Вито Вольтеррой для обобщения гармонического осциллятора заменой дифференциального уравнения на интегро-дифференциальное [3]. Далее в этой работе Вольтерра вывел обобщенный закон сохранения полной механической энергии для этой эредитарной колебательной системы. В отличие от закона сохранения энергии для гармонического осциллятора, обобщенный закон сохранения содержал дополнительное положительное слагаемое, которое отражает диссипацию энергии колебательной системы.

С точки зрения математического моделирования интегро-дифференциальные уравнения, которые описывают эредитарные колебательные процессы, удобно привести к дифференциальным уравнениям с производной дробного порядка [4]. Порядок дробной производной, в свою очередь, может зависеть от свойств среды [10].

В этой статье мы рассмотрим вопросы устойчивости нелинейного эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля [5].

Основные определения

Отметим, что устойчивость нелинейных осцилляторов отличается от устойчивости линейных осцилляторов, так как необходимо исследовать не только их стационарные состояния, но и предельные циклы [11].

Устойчивость колебательной системы приводит к периодическим режимам, а неустойчивость – к хаотическим режимам. Дадим следующее определение эредитарной колебательной нелинейной системы.

Определение 1. Эредитарная нелинейная колебательная система может быть записана с помощью оператора производной дробного порядка Герасимова – Капуто:

$$\partial_{0t}^{\alpha_i} x_i(\tau) = f_i(x_1(t),...,x_n(t),t),$$
$$x_i(0) = c_i,\ i = 1, ..., n, \qquad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha_i} x_i(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)}\int_0^t \frac{\dot{x}_i(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_i-1}}$ – производные дробных порядков Герасимова – Капуто порядка $0 < \alpha_i < 2$; c_i – известные константы.

Отметим, что в работе [12] определение эредитарной колебательной системы было записано в терминах производной дробного порядка Римана – Лиувилля.

Ключевым объектом исследования в теории устойчивости динамических систем являются их точки равновесия.

Определение 2. Точки равновесия $E^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ эредитарной системы (1) являются решениями следующей системы алгебраических уравнений:

$$f_i(x_1(t), ..., x_n(t), t) = 0. \qquad (2)$$

Эредитарная колебательная нелинейная система (1) может быть соизмеримой и несоизмеримой [12].

Определение 3. Эредитарная колебательная система (1) называется соизмеримой, если выполняется условие: $\alpha = ... = \alpha_n = \alpha$. Если выполняется условие: $\alpha \neq ... \neq \alpha_n$ – несоизмеримой.

Дадим определение устойчивости предельного цикла [1, 2].

Определение 4. Предельный цикл является устойчивым, если существует такая область фазового пространства, которая содержит этот предельный цикл, что все фазовые траектории, начинающиеся в этой области, при $t \to \infty$ асимптотически приближаются к предельному циклу. В противном случае предельный цикл называется неустойчивым.

Теоремы устойчивости эредитарных колебательных систем. В работе [12] были сформулированы и доказаны следующие две важные теоремы асимптотической устойчивости нелинейной эредитарной колебательной системы.

Теорема 1. Точки равновесия системы (1) называются асимптотически устойчивыми для соизмеримой системы, если собственные значения λ_i матрица Якоби $J = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, вычисленные согласно точкам равновесия E^*, удовлетворяют следующим условиям:

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (3)$$

Теорема 2. Точки равновесия системы (1) называются асимптотически устойчивыми для несоизмеримой системы, где $\alpha_i = \frac{\beta_i}{m}$, если выполняются следующие условия:

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\gamma\pi}{2}, \quad i = 1, 2, ..., n, \gamma = 1/m, \qquad (4)$$

а λ вычисляется согласно характеристическому уравнению

$$\det\left(\operatorname{diag}\left(\left[\lambda^{m\alpha_1},...,\lambda^{m\alpha_n}\right]\right) - J\right) = 0. \qquad (5)$$

Устойчивость эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля. Пусть система (1) описывает эредитарный осциллятор Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(\tau) = x_2(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(\tau) = -x_1(t) - \xi\left(x_1^2(t) - 1\right)x_2(t). \end{cases} \qquad (6)$$

Рассмотрим случай, когда система (6) соизмерима $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, т.е. случай классического осциллятора Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) - \xi\left(x_1^2(t) - 1\right)x_2(t). \end{cases} \qquad (7)$$

Матрица Якоби системы (7) записывается следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\xi x_1^* x_2^* & -\xi\left(x_1^{*2} - 1\right) \end{bmatrix} = 0, \qquad (8)$$

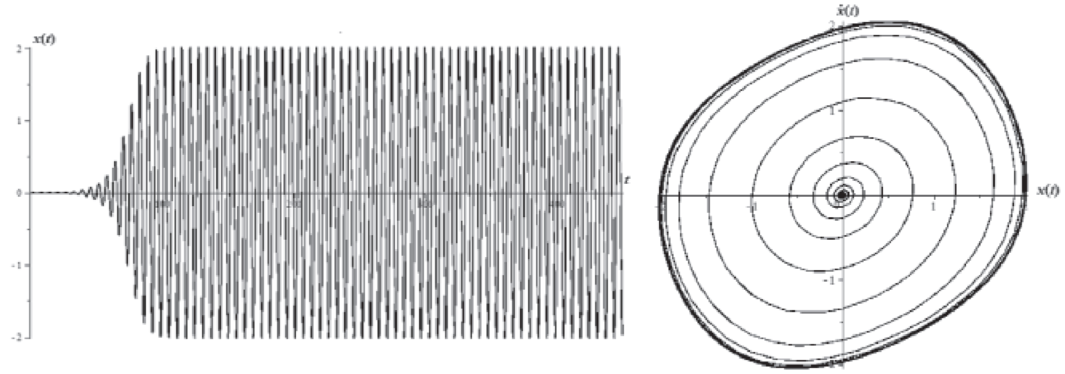
где точки $E^* = (x_1^*, x_2^*)$ – точки покоя системы (7). Из этой системы очевидно, что существует единственная точка покоя $E^* = (0, 0)$. Тогда характеристическое уравнение для системы (7) с учетом (8) имеет вид

$$\lambda^2 - \xi\lambda + 1 = 0. \qquad (9)$$

Можно убедиться, что корни характеристического уравнения (9) при $\xi > 0$ не удовлетворяют условиям теоремы 1. Действительно, в нашем случае имеет место неравенство:

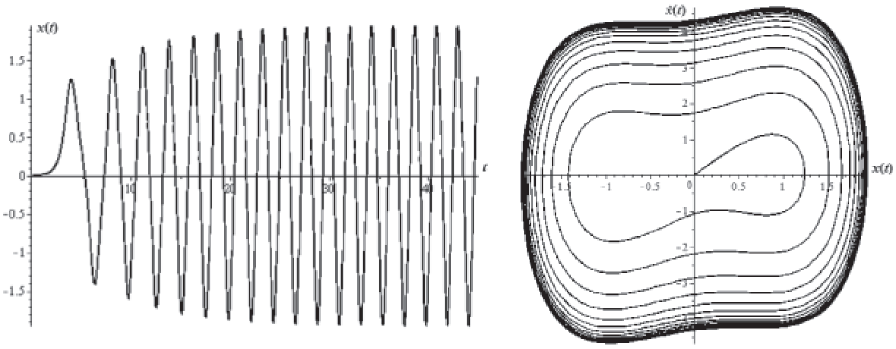
$$|\arg(\lambda_{1,2})| < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому точка равновесия системы $E^* = (0, 0)$ системы (7) будет неустойчивой, в частности, если $0 < \xi < 2$ – неустойчивый фокус (рис. 1).



а б

Рис. 1.
а – осциллограмма; б – фазовая траектория, полученные при $\xi = 0,2$ и $(x_0, y_0) = (0,0001; 0,0001)$ для системы Ван-дер-Поля (7)



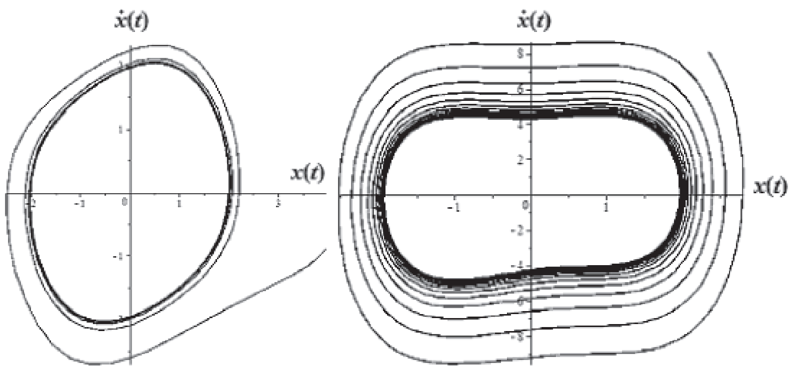
а б

Рис. 2.
а – осциллограмма; б – фазовая траектория, полученные при $\xi = 4$ и $(x_0, y_0) = (0,0001; 0,0001)$ для системы Ван-дер-Поля (7)

Осциллограмма и фазовая траектория на рис. 1 были получены с помощью явной конечно-разностной схемы, вопросы аппроксимации производных дробного порядка можно изучить в работах [6, 7].

Если $\xi > 2$, то точка покоя $E^* = (0, 0)$ системы (7) – неустойчивый узел (рис. 2).

Согласно определению 4 предельный цикл для системы Ван-дер-Поля (7) будет устойчивым, так как при $t \to \infty$ фазовые траектории рис. 1, б и 2, б стремятся к предельному циклу изнутри. Если взять точку вне предельного цикла, то фазовые траектории будут стремиться при $t \to \infty$ к нему извне (рис. 3).



а б

Рис. 3.
а – фазовая траектория с параметрами $\xi = 0,2$ и $(x_0, y_0) = (3,96323; –0,8901)$; б – фазовая траектория с параметрами $\xi = 4$ и $(x_0, y_0) = (2,35028; 8,075)$ для системы Ван-дер-Поля (7)

Рассмотрим случай эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля, характеризующийся несоизмеримой системой (6), в которой α = 0,5; β = 1 и γ = 1/10:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2(t), \\ \partial_{0t}^{0,5} x_2(\tau) = -x_1(t) - \xi\left(x_1^2(t) - 1\right)x_2(t). \end{cases} \qquad (10)$$

С учетом (8) характеристическое уравнение для системы (10) имеет вид

$$\lambda^{25} - \xi\lambda^{10} + 1 = 0. \qquad (11)$$

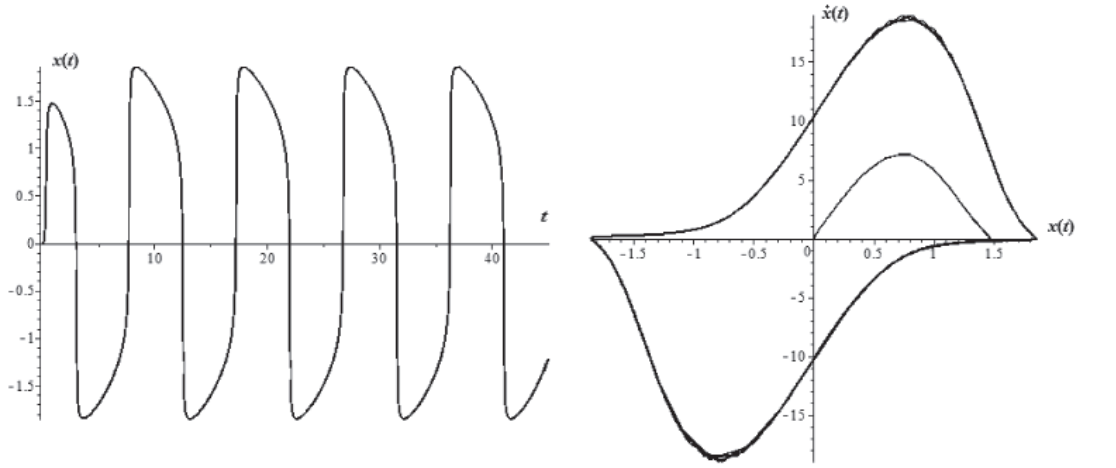
Пусть управляющий параметр $\xi = 4$, тогда два корня,

$$\lambda_1 = 1{,}315220259 + 1{,}345192828 \cdot 10^{-11} I$$

и $\lambda_{11} = 0{,}8832014783 - 2{,}992970998 \cdot 10^{-10} I$, характеристического уравнения (11) не удовлетворяют условиям теоремы 2, т.е. выполняется неравенство

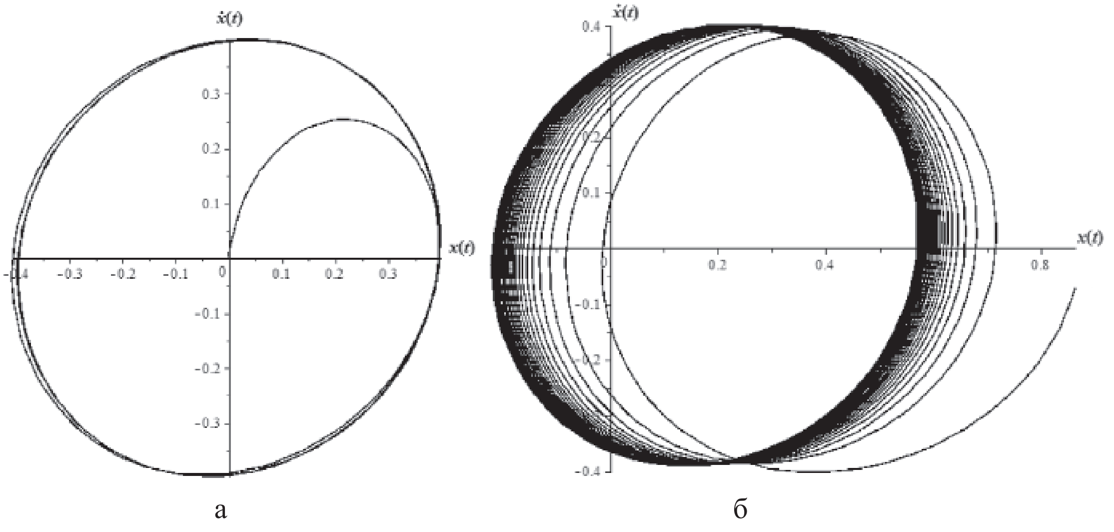
$$\left|\arg\left(\lambda_{1,11}\right)\right| < \frac{\pi}{20}.$$

Так как действительные части корней λ_1 и λ_{11} положительны, то точка состояния равновесии системы $E^* = (0, 0)$ является неустойчивым фокусом. Однако фазовая траектория стремится к предельному циклу (рис. 4).



а б

Рис. 4.
а – осциллограмма; б – фазовая траектория, полученные при $\xi = 4$ и $(x_0, y_0) = (0{,}0001; 0{,}0001)$ для системы Ван-дер-Поля (10)



а б

Рис. 5. Фазовая траектория (а) с начальной точкой внутри предельного цикла $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и фазовая траектория (б) с начальной точкой вне предельного цикла: $(x_0, y_0) = (0{,}862; -0{,}67)$

Рассмотрим случай, когда в соизмеримой системе (7) действует внешняя периодическая сила: $f(t) = \delta \sin(\omega t)$. Система записывается так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1(t) - \xi\left(x_1^2(t) - 1\right)x_2(t) + \delta\sin(\omega t). \end{cases} \quad (12)$$

В системе (12) положим следующие значения параметров: $\xi = 0{,}2$; $\delta = 0{,}4$; $\omega = t = 1$. Получим точку равновесия системы $E^* = (-0{,}336;\ 0)$, которая является неустойчивым фокусом. В случае несоизмеримой системы: $\alpha = 1{,}2$ и $\beta = 0{,}2$ мы получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^{24} - 0{,}4\lambda^2 + 1 = 0. \quad (13)$$

Все корни уравнения (13) удовлетворяют условию (4), поэтому точка равновесия E^* асимптотически устойчива. Необходимо заметить, что фазовая траектория выходит на устойчивый предельный цикл (рис. 5).

Заключение

В работе были рассмотрены вопросы устойчивости нелинейных эредитарных колебательных систем на примере эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля. С помощью теорем для соизмеримой и несоизмеримых систем были исследованы точки покоя осциллятора Ван-дер-Поля, а также показано, что фазовая траектория выходит на устойчивый предельный цикл.

В продолжении работы имеет определенный интерес исследование вопроса об устойчивости нелинейных эредитарных осцилляторов с переменными порядками дробных производных [8].

Список литературы

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.

2. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: ЛКИ, 2007. – 264 с.

3. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложения. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

5. Паровик Р.И. Математическое модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // Доклады АМАН. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 57–62.

6. Паровик Р.И. Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2014. – № 2(9). – С. 30–35.

7. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. – Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. – 178 с.

8. Паровик Р.И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2015. – № 2(11). – С. 88–95.

9. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.

10. Шогенов В.Х., Ахкубеков А.А., Ахкубеков Р.А. Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2004. – № 1. – С. 46–50.

11. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. – Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. – 218 p.

12. Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2008. – Vol. 237, № 20. – P. 2628–2637.

References

1. Anishhenko V.S., Vadivasova T.E. Lekcii po nelinejnoj dinamike. [Lectures on nonlinear dynamics]. Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics Publ., 2011. 516 p.

2. Grinchenko V.T., Macypura V.T., Snarskij A.A. Vvedenie v nelinejnuju dinamiku: Haos i fraktaly. [Introduction to nonlinear dynamics: Chaos and fractals]. Moscow: LKI, 2007. 264 p.

3. Volterra V. Teorija funkcionalov, integralnyh i integro-differencialnyh uravnenij. [Functional theory, integral and integro-differential equations] Moscow: Nauka, 1982. 304 p.

4. Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego prilozhenija. [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p.

5. Parovik R.I. Matematicheskoe model fraktalnogo oscilljatora Van-der-Polja. Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj Akademii Nauk [The mathematical model of fractal oscillator Van der Pol] – Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 2015. vol. 17, no. 2, pp. 57–62.

6. Parovik R.I. Numerical analysis some oscillation equations with fractional order derivatives. Bulletin KRASEC. Physical & Mathematical. Sciences, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 34–38.

7. Parovik R.I. Matematicheskoe modelirovanie linejnyh jereditarnyh oscilljatorov [Mathematical modeling of linear oscillators hereditarity]. Petropavlovsk-Kamchatskij: Vitus Bering Kamchatka State University Publ., 2015. 178 p.

8. Parovik R.I. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками [Finite difference schemes for the oscillator with variable fractal fractional order]. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki – Bulletin KRASEC. Physical & Mathematical. Sciences. 2015. vol. 11, no. 2, pp. 88–95.

9. Uchajkin V.V. Metoddrobnyhproizvodnyh. [The method of fractional derivatives] Uljanovsk, 2008. 512 p.

10. Shogenov V.H., Ahkubekov A.A., Ahkubekov R.A. Metod drobnogo differencirovanija v teorii brounovskogo dvizhenija. [Fractional differentiation method in the theory of Brownian motion]. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Serija: Estestvennye nauki – Scientific-educational and applied journal. University news North-Caucasian region. Natural sciences series, 2004, no. 1. pp. 46–50.

11. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.

12. Tavazoei M.S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. vol. 237, no. 20. pp. 2628–2637.