

УДК 007:004.02

## АЛГОРИТМЫ АГРЕГИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ

Клеванский Н.Н., Красников А.А.

ФГБОУ ВО «Саратовский государственный аграрный университет  
имени Н.И. Вавилова», Саратов, e-mail: nklevansky@yandex.ru

Представлены методы решения задач агрегирования проектов – первой задачи мультипроектного планирования. Двухэтапный вычислительный процесс реализован в среде СУБД и включает формирование начальной агрегации на первом этапе и ее последующую оптимизацию на втором этапе. Каждый этап циклический, так как содержит две «жадные» эвристики. В каждом шаге цикла результат работы первой эвристики используется второй эвристикой. Каждая эвристика осуществляет выбор наиболее приемлемого критерия загруженности или равномерности с принятием некоторых решений. В операциях выбора использованы различные методы ранжирования теории принятия решений. В агрегировании проектов использованы «жадные» алгоритмы и концепции равномерности и загруженности. Осуществлены формализация и постановка задач обоих этапов. Представлены алгоритмы решения задач обоих этапов. Рассмотрен численный пример агрегации проекта.

**Ключевые слова:** мультипроектное планирование, агрегация проекта, заявка, действие, «жадный» алгоритм, многовекторное ранжирование

## AGGREGATE PROJECT ALGORITHMS

Klevanskiy N.N., Krasnikov A.A.

Saratov State Agrarian University named after N.I. Vavilov, Saratov, e-mail: nklevansky@yandex.ru

This paper is demonstrate how multi-project scheduling problems can be solved efficiently by two procedures. The first, in the multi-project scheduling problem, multiple projects, each having a number of activities, must be aggregated. A set of local and global resources are available for carrying out the activities of the projects. The basic criteria for choice operations are demanded – criterion of activity workload and criterion of resource equability. The aggregate project procedure use of two-stage algorithm developed in database system. The solutions obtained by the first stage algorithm with the best resource allocation rule are used as a baseline to compare those obtained by the latter. Each stage consists of two heuristic solution-finding procedures based on greedy ideology. The greedy algorithms use multi-criteria and multi-vectorial ranking of decision support theory. The algorithm introduces the concept of an adjustable resource allocation factor which can be used to produce schedules. A numerical example of aggregate project is given.

**Keywords:** multi-project scheduling, aggregate project, demand, activity, greedy algorithm, multi-vectorial ranking

Мультипроектное планирование решает взаимосвязанные проблемы – формирование календарного графика [2] и распределение ресурсов [8]. Один из подходов к решению этих проблем использует агрегированные представления проектов [1, 2].

Календарные графики мультипроектного планирования относятся к расписаниям иерархических или сетевых структур действий [3]. Формирование расписания – это определение времен начала выполнения всех действий или их совокупностей в интервале расписания [5]. Для мультипроектного планирования необходимо решение двух задач:

1) агрегирование заявок проекта – определение относительных начальных времен выполнения каждой работы в пределах интервала расписания проекта (длительности критического пути графа проекта или задаваемой/переопределяемой длительности);

2) формирование календарного графика мультипроектного планирования – определение относительных начальных времен выполнения агрегаций заявок проектов в пределах задаваемого или определяемого интервала расписания.

Статья посвящена решению первой задачи, а ее целью является представление подходов к программному формированию агрегаций проектов – оптимизированных календарных графиков проектов для произвольного количества заявок.

### Общие подходы

Агрегирование является задачей управления одним проектом, но в отличие от [4] необходимы допущения. На данном этапе исследования интервал расписания агрегации принят равным критическому пути графа проекта. В получаемых решениях разрешено превышение потребляемых ресурсов на отдельных тактах планирования по сравнению с уровнями выделяемых проекту ресурсов. В последующем мультипроектном планировании эти превышения будут удовлетворяться совместно используемыми выделяемыми ресурсами. Интервалы, в пределах которых могут «мигрировать» работы, не находящиеся на критическом пути, позволяют осуществить варьирование агрегаций.

Алгоритмизация и разработка программного обеспечения агрегирования проектов использовали следующие концепции [3]: программное решение задачи в рамках СУБД; двухэтапный процесс решения; идеология жадного алгоритма; концепции загруженности и равномерности; использование методов ранжирования теории принятия решений.

Два этапа решения включают формирование начальной агрегации и ее последующую оптимизацию. Методы этапов цикличны и завершаются после включения всех заявок проекта в начальную агрегацию или при невозможности дальнейшего улучшения агрегации.

Формирование начальной агрегации решается последовательным выбором очередной заявки проекта и последующим ее включением в календарный график в определяемое время начала выполнения работы. Выбор заявки проекта базируется на концепции загруженности. Выбор времени включения этой заявки использует концепцию равномерности. В каждом цикле присутствуют две операции выбора с принятием некоторых решений.

Задача оптимизации начальной агрегации решается последовательным выбором наиболее неравномерной работы проекта и последующей ее перестановкой в графике в выбираемое время начала выполнения работы. Перестановка работы в календарном графике агрегации также базируется на концепции равномерности. В каждом цикле также присутствуют две операции выбора. Такой подход характерен для жадных алгоритмов [4, 8], предполагающих цикличность обоих этапов задачи формирования агрегации проекта [4].

Операции выбора в представляемых алгоритмах являются многокритериальными [6], и для их реализации привлечен аппарат методов ранжирования. В представляемых алгоритмах использованы методы, в основе которых лежит метод «жесткого» ранжирования [7]. В дальнейшем под термином многокритериальное ранжирование будет пониматься «жесткое» ранжирование. Будут различаться прямое (по «возрастанию») и обратное (по «убыванию») многокритериальное ранжирование.

### Постановка и формализация задачи

Введем необходимые в дальнейшем обозначения.

**Исходные данные задачи:**

$I$  – количество проектов мультипроектного планирования;

$P = \{ p_i, i = \overline{1, I} \}$  – множество проектов мультипроекта;

$ne_i$  – количество работ проекта  $p_i$ ;

$E_i = \{ e_{j,i}, j = \overline{1, ne_i}, i = \overline{1, I} \}$  – множество работ проекта  $p_i$  ( $j = 1$  – источник,  $j = ne_i$  – сток);

индекс работы  $j = \overline{1, ne_i}$  имеет различный характер в зависимости от решаемой задачи: идентификатор работы в соответствующей таблице БД; идентификатор работы в множестве работ проекта; идентификатор работы в множестве работ пути графа проекта; порядковый номер работы при ее включении в начальную агрегацию; порядковый номер работы при оптимизации начальной агрегации;

$ep_{j,i}$  – количество непосредственных предшественников работы  $e_{j,i}$ ;

$EP_{j,i}$  – множество непосредственных предшественников работы  $e_{j,i}$ ,  $EP_{j,i} \in E_i$ ;

$ef_{j,i}$  – количество непосредственных последователей работы  $e_{j,i}$ ;

$EF_{j,i}$  – множество непосредственных последователей работы  $e_{j,i}$ ,  $EF_{j,i} \in E_i$ ;

$u$  – количество типов возобновляемых ресурсов;

$K = \{ k_m, m = \overline{1, u} \}$  – множество типов возобновляемых ресурсов;

$R_{m,i}$ ,  $m = \overline{1, u}, i = \overline{1, I}$  – объем ресурса типа  $k_m$ , выделяемый проекту  $p_i$  во время его выполнения на каждом такте планирования;

$r_{m,j,i}$ ,  $m = \overline{1, u}, j = \overline{1, ne_i}, i = \overline{1, I}$  – объем ресурса типа  $k_m$ , требуемый работе  $e_{j,i}$  проекта  $p_i$  во время ее выполнения на каждом такте планирования;

$d_{j,i}$ ,  $j = \overline{1, ne_i}, i = \overline{1, I}$  – длительность (трудоемкость) выполнения работы  $e_{j,i}$  проекта  $p_i$  такты планирования.

**Исходные расчетные данные задачи:**

$Cp_i$ ,  $i = \overline{1, I}$  – критический путь проекта  $p_i$  такты планирования;

$D_i$  – трудоемкость проекта  $p_i$ . В предлагаемом решении  $D_i = Cp_i = Int, i = \overline{1, I}$ .

**Переменные задачи:**

$ni$ ,  $ni = \overline{1, ne_i}$  – количество: включенных в начальную агрегацию работ проекта  $p_i$ ; переставленных работ проекта  $p_i$  в календарном графике агрегации;

$nr$ ,  $nr = \overline{1, ne_i}$  – количество: не включенных в начальную агрегацию заявок проекта  $p_i$ ; не оптимизированных работ проекта  $p_i$  в календарном графике агрегации;

на любом шаге формирования и оптимизации начальной агрегации  $ni + nr \equiv ne_i$ ;

$ti_{j,i}$  – минимально возможный такт включения работы  $e_{j,i}$  в агрегацию проекта  $p_i$ ;

$tf_{j,i}$  – максимально возможный такт включения работы  $e_{j,i}$  в агрегацию проекта  $p_i$ ;

$t_{j,i}$  – начальный такт выполнения работы  $e_{j,i}$  проекта  $p_i$  в календарном графике агрегации;

$R\max_m$ ,  $m = \overline{1,u}$  – максимальный тактовый объем потребляемого ресурса типа  $k_m$  в календарном графике агрегации;

$$RM_m = \frac{\sum_{j=1}^{ne_i} r_{m,j,i} \cdot d_{j,i}}{Cp_i}, \quad m = \overline{1,u}, \quad i = \overline{1,I} -$$

средний объем ресурса типа  $k_m$ , потребляемый работами проекта  $p_i$  в интервале расписания;

$RS_{m,j}$ ,  $m = \overline{1,u}$ ,  $j = \overline{0,Int-1}$  – объем ресурса типа  $k_m$ , потребляемый календарным графиком агрегации на  $j$ -м такте интервала расписания;

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{Int} \sum_{j=0}^{Int-1} (RM_m - RS_{m,j})^2}, \quad m = \overline{1,u} -$$

среднеквадратичное отклонение потребления ресурса типа  $k_m$  на всех тактах интервала расписания от среднего значения потребления этого ресурса в расписании.

**Задача формирования начальной агрегации проекта  $p_i$**  состоит в циклическом выборе очередной, не находящейся на критическом пути, заявки проекта и формировании расписания  $S = \{t_{j,i}, j = \overline{1, ne_i}\}$ , которое минимизирует вектор максимальных тактовых объемов потребляемых ресурсов внутри критического пути (интервала расписания)

$$\min(R\max_1, R\max_2, \dots, R\max_u), \quad (1)$$

при обязательных ограничениях

$$t_{j,i} + d_{j,i} \leq t_{k,i}, \quad e_{k,i} \in EF_{j,i};$$

$$t_{j,i} \geq t_{k,i} + d_{k,i}, \quad e_{k,i} \in EP_{j,i}; \quad (2)$$

$$\forall j t_{j,i} \geq 0, \quad j = \overline{1, ne_i};$$

$$\forall j (t_{j,i} + d_{j,i}) \leq Cp_i, \quad j = \overline{1, ne_i}. \quad (3)$$

Целевая функция (1) минимизирует верхнее отклонение потребляемых ресурсов, что достаточно для формирования начальной агрегации проекта при включении очередной работы заявки в календарный график. Целевая функция связана с необходимостью многокритериального ранжирования векторов (1). Неравенства ограничений (2) отражают отношения следования и предшествования работ проекта. Нера-

венства ограничений (3) отражают безусловность нахождения работ проекта внутри интервала расписания.

Интервалы включения заявок  $e_{j,i}$  в календарный график агрегации определяются следующими выражениями:

$$ti_{j,i} = \max((ti_{k,i} + d_{k,i}), e_{k,i} \in EP_{j,i}); \quad (4)$$

$$tf_{j,i} = \min((tf_{k,i} - d_{j,i}), e_{k,i} \in EF_{j,i}). \quad (5)$$

Минимально возможные такты включения (4) определяются для всех заявок от источника до стока, для непосредственных последователей источника  $ti_{k,i} = 0$ . Максимально возможные такты включения (5) определяются в обратном порядке – от стока до источника. Для непосредственных предшественников стока  $tf_{k,i} = Cp_i$ .

Оценки загруженности  $c_{j,m,i}$  заявки  $e_{j,i}$  проекта  $p_i$  на очередном шаге формирования начальной агрегации определяется объемом требуемого ресурса

$$c_{j,m,i} = r_{j,m,i} \cdot d_{j,i}, \quad j = \overline{1, ne_i}, \\ m = \overline{1,u}, \quad i = \overline{1, nr}. \quad (6)$$

Оценки загруженности (6) формируют множество векторов (критериев загруженности) заявок на очередном шаге формирования календарного графика начальной агрегации:

$$\{(c_{j,m,i}, j = \overline{1, ne_i}, m = \overline{1,u}, i = \overline{1, nr})\} \quad (7)$$

Обратное многокритериальное ранжирование векторов (7) порождает множество рангов заявок

$$\{rank1_{j,i}, j = \overline{1, ne_i}, i = \overline{1, nr}\}. \quad (8)$$

Старшая по рангу заявка проекта становится очередным кандидатом на включение в начальную агрегацию проекта  $p_i$ .

Для определения времени включения  $t_{ni+1,i}$  работа  $e_{ni+1,i}$  последовательно, по одному такту перемещается с учетом ограничений (2), (3) внутри интервала  $[ti_{ni+1,i}, tf_{ni+1,i}]$ , формируя множество векторов:

$$\{(R\max_{1,j}, R\max_{2,j}, \dots, R\max_{u,j}), \quad (9)$$

$$j = \overline{ti_{ni+1,i}, tf_{ni+1,i}}\}.$$

Прямое многокритериальное ранжирование векторов (9) определяет доминирующий вектор, индекс  $j$  которого определяет искомое начальное время включения работы  $e_{ni+1,i}$  в календарный график начальной агрегации  $t_{ni+1,i} = j$ .

Очередной шаг формирования начальной агрегации завершается переопределением  $tf_{j,i}$

для работ, предшествующих от источника. Для работ, непосредственно предшествующих  $e_{ni+1,i}$  в выражениях (5) применяется  $t_{ni+1,i}$ . Также осуществляется переопределение  $ti_{j,i}$  для работ, следующих от  $e_{ni+1,i}$  до стока. Для работ, непосредственно следующих от  $e_{ni+1,i}$  в выражениях (4) применяются  $ti_{k,i} = t_{ni+1,i}$  и  $d_{k,i} = d_{ni+1,i}$ . Если  $nr > 0$ , то переход к следующему шагу формирования начальной агрегации.

**Задача оптимизации начальной агрегации проекта**  $p_i$  состоит в изменении начальной агрегации для формирования расписания  $S = \{t_{j,i}, j = \overline{1, ne_i}\}$ , которое минимизирует вектор среднеквадратичных отклонений потребления ресурсов  $(\sigma_m, m = \overline{1, u})$  на всех тактах интервала расписания от средних значений потребления ресурсов расписания

$$\min(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_u) \quad (10)$$

при обязательных ограничениях (2), (3).

Целевая функция (10), являясь интегральной оценкой календарного графика, минимизирует все отклонения. Целевая функция связана с необходимостью многокритериального ранжирования получаемых на ее основе векторов (10).

Оценка равномерности  $n$ -го такта работы  $e_{j,i}$  проекта  $p_i$  по ресурсу  $k_m$  на очередном шаге оптимизации начального календарного графика агрегации определяется следующим выражением:

$$RP_{m,j,i,n} = \frac{r_{m,j,i} \cdot rP_{m,n,i}}{rm_m \cdot rm_m}; \quad m = \overline{1, u},$$

$$n = \overline{t_{j,i}, t_{j,i} + d_{j,i} - 1}, \quad j = \overline{1, ne_i}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (11)$$

Значения тактовых оценок равномерности находятся в интервале  $[0, 1]$ . Чем больше величина оценки (11), тем неравномернее соответствующая работа проекта на данном такте интервала расписания по данному ресурсу. Оценки равномерности проектов (11) формируют и множество векторов (критериев равномерности) работ проекта по каждому ресурсу.

$$PR_m = \left\{ \left( RP_{m,j,i,n}, \quad j = \overline{1, ne_i}, \right. \right. \\ \left. \left. n = \overline{t_{j,i}, t_{j,i} + d_{j,i} - 1} \right), \quad i = \overline{1, I} \right\}, \\ m = \overline{1, u}. \quad (12)$$

Прямое многокритериальное ранжирование векторов (12) проектов расписания

порождает множества рангов векторов работ проекта по каждому ресурсу

$$Rank3_m = \{rank3_{m,i}, \quad i = \overline{1, I}\}, \quad m = \overline{1, u}. \quad (13)$$

Ранги векторов (13) формируют множество векторов (критериев равномерности) неоптимизированных работ проекта

$$\{RP_i = (rank3_{i,1}, rank3_{i,2}, \dots, rank3_{i,u}), \\ i = \overline{1, nr}\}. \quad (14)$$

Старшая по рангу работа проекта, полученная прямым многокритериальным ранжированием векторов (14), является самой неравномерной среди неоптимизированных при принятых оценках и критериях равномерности. Она становится очередным кандидатом  $e_{ni+1,i}$  на перестановку в календарном графике агрегации.

Для определения начального времени  $TI_{ni+1}$  перестановки работа  $e_{ni+1,i}$  проекта  $p_i$  последовательно, по одному такту перемещается с учетом ограничений (2), (3) внутри интервала расписания, формируя множество векторов:

$$\{(\sigma_{1,j}, \sigma_{2,j}, \dots, \sigma_{u,j}), \quad j = \overline{ti_{ni+1,i}, tf_{ni+1,i}}\}. \quad (15)$$

Прямое многокритериальное ранжирование векторов (15) определяет доминирующий вектор, индекс  $j$  которого определяет искомое начальное время для перестановки работы  $e_{ni+1,i}$  проекта  $p_i$  в календарном графике  $t_{ni+1,i} = j$ . Очередной шаг оптимизации завершается переопределением  $tf_{j,i}$  и  $ti_{j,i}$ , и если  $nr > 0$ , то переход к следующему шагу.

### Реализация и численные результаты

Для численных экспериментов использовались случайно выбранные из библиотеки тестовых задач PSPLib проекты. Проекты включают по 30 работ и для своего выполнения им необходимо 4 типа ресурсов.

На рис. 1 представлена начальная агрегация одного из проектов. В левой части представлена диаграмма Ганта работ выбранного проекта. Работы критического пути выделены красным цветом. Оставшиеся работы проекта размещены внутри интервалов их возможного перемещения.

В правой части представлены агрегации проекта по каждому из четырех ресурсов. Для каждого ресурса красной линией с цифровым обозначением показаны уровни выделяемых проекту объемов каждого такта. В каждой из агрегаций представлена величина среднеквадратичного отклонения в %.

На рис. 2 представлена оптимизированная агрегация этого же проекта.

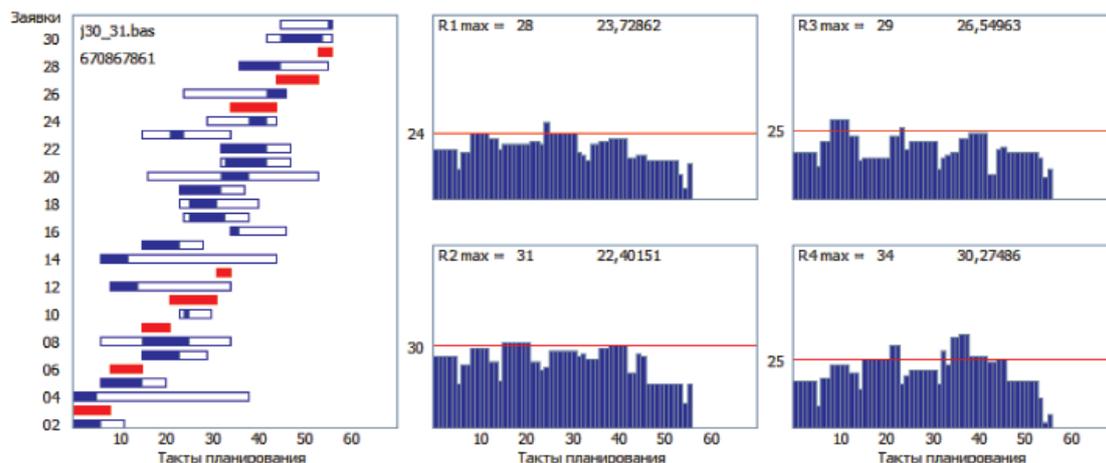


Рис. 1. Начальная агрегация проекта

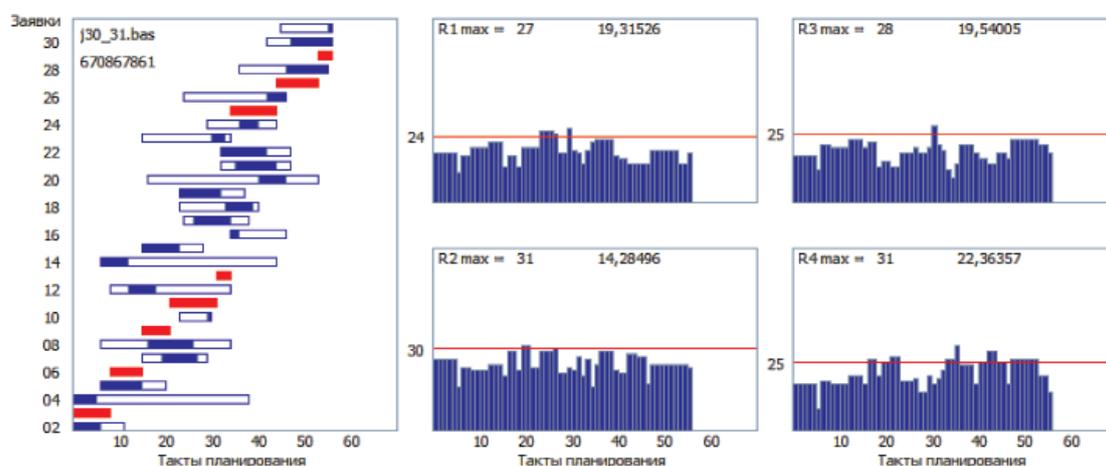


Рис. 2. Оптимизированная агрегация проекта

### Заключение

Авторы считают, что новыми являются следующие положения и результаты:

- осуществлена формализация задач формирования и оптимизации календарного графика агрегации проекта;
- представлены общие подходы и алгоритмы решения задач формирования календарных графиков агрегаций с использованием методов ранжирования теории принятия решений.

### Список литературы

1. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Гилязов Н.М. Методы агрегирования в управлении проектами. – М.: (Препринт / ИПУ РАН), 1999. – 55 с.
2. Бурков В.Н., Квон О.Ф., Цитович Л.А. Модели и методы мультипроектного управления. – М.: (Препринт / ИПУ РАН), 1997. – 62 с.
3. Клеванский Н.Н. Основные концепции реализации задач формирования расписаний // Образовательные ресурсы и технологии. – М., 2014. – № 2 (5). – С. 9–21.
4. Кочетов Ю.А., Столjar А.А. Новые жадные эвристики для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск, 2005. – Серия 2. том 12, № 1. – С. 12–36.
5. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. – М.: Физический факультет МГУ, 2011. – 222 с.
6. Подиновский В.В. Анализ задач многокритериального выбора методами теории важности критериев при помощи ком-

пьютерных систем поддержки принятия решений // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 2. – С. 64–68.

7. Сафронов В.В., Ведерников Ю.В. Характеристика метода «жесткого» ранжирования // Информационные технологии. – 2007. – № S11. – С. 17–21.

8. Kane H., Tissier A. A resource allocation model for multi-project management // Proc. of MOSIM'12 9e conference internationale de modelisation, optimisation et simulation. – Bordeaux, France, 2012. 8 p.

### References

1. Barkalov S.A., Burkov V.N., Giljazov N.M. Metody agregirovaniya v upravlenii proektami. M.: (Priprint / IPU RAN), 1999 55 p.
2. Burkov V.N., Kvon O.F., Citovitch L.A. Modeli i metody multiproektного upravleniya. M.: (Priprint / IPU RAN), 1997. 62 p.
3. Klevansky N.N. Osnovnyye koncepcii realizacii zadach formirovaniya raspisaniy // Obrazovatelnuje resursy i tehnologii, M., 2014. no. 2 (5). pp. 9 21.
4. Kochetov J.A., Stoljar A.A. Novyye zhadnyje evristiki dlja zadachi kalendarnogo planirovaniya s ogranichennymi resursami // Diskretnyj analiz i issledovanie operacij. Novosibirsk. 2005. Serija 2. tom 12, no. 1. pp. 12–36.
5. Lazarev A.A., Gafarov E.R. Teorija raspisaniy. Zadachi i algoritmy. M., Fizicheskij facultet MGU, 2011. 222 p.
6. Podinovskij V.V. Analiz zadach mnogokriteralnogo vybora metodami teorii vazhnosti kriteriev pri pomoshchi kompjuternych system podderzhki prinjatija reshenij // Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravleniya. 2008. no. 2. pp. 64–68.
7. Safronov V.V., Vedernikov J.V. Charakteristika metoda «zhestkogo» ranzhirovaniya // Informacionnyje tehnologii. 2007. no. S11. pp. 17–21.
8. Kane H., Tissier A. A resource allocation model for multi-project management // Proc. of MOSIM12 9e conference internationale de modelisation, optimisation et simulation. Bordeaux, France, 2012. 8 p.