УДК 519.86

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМАХ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ОЦЕНКА ЕГО ПАРАМЕТРОВ ПРИ НЕЧЕТКОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Козловская Я.И., Петров А.Д., Севодин М.А.

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, e-mail: black_empire@list.ru

Настоящая работа посвящена изучению экономических моделей леонтьевского типа. Исследуемая проблема состоит в том, что в процессе производства возникают ограничения на объемы выпуска продукции. Кроме того, начальные данные для расчета продуктивности модели могут быть неточны. Цель данной работы – обобщить модель Леонтьева на случай ограничений на интенсивности производства и нечеткости исходных данных. В работе рассматривается такой случай ограничения интенсивностей отраслей, когда вектор интенсивностей лежит в выпуклом конусе. Приводится доказательство существования равновесия при ограничении такого вида. Затем осуществляется переход к задачам оптимизации. Описывается модель Леонтьева с интервальной производственной матрицей. На основе оптимизационных задач дается оценка положения равновесия для моделей с производственными матрицами, описанными с помощью интервальных чисел.

Ключевые слова: выпуклый конус, интервальная неопределенность, положение равновесия, производственное множество

EXISTENCE OF EQUILIBRIUM POSITION IN LEONTIEF TYPE MODELS IN CASE OF LIMITATIONS AND ITS ESTIMATE WITH INITIAL DATA INTERVAL UNCERTAINTY

Kozlovskaya Y.I., Petrov A.D., Sevodin M.A.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, e-mail: black_empire@list.ru

The paper is about researching Leontief's type economic models. The problem of enterprises is that output limitations occur in the production process. Besides, initial data for calculation the model efficiency might be imprecise. The purpose of the paper is OBOBWIT Leontief model in the case of production intensity limitation and initial data uncertainty. The paper considers limitations of production sphere intensity when intensity vector is in a convex cone. The evidence of existence of the model equilibrium position with this kind of limitation is obtained. Also there is the model conversion to the optimization problem. Leontief model with interval production matrix is described. Estimate of equilibrium position for models with interval production matrixes is based on the optimization problem.

Keywords: convex cone, interval uncertainty, equilibrium position, production set

Процессы, протекающие в экономике, таковы, что постоянно изменяются различные показатели деятельности предприятий, спроса, предложения, качества жизни и т.п. В связи с этим возникает задача выбора между удовлетворением текущего потребительского спроса и обеспечением будущего спроса. Капитальные вложения в производство должны быть такими, чтобы объем производства увеличивался наиболее оптимально. Такое увеличение объема зависит от ограничений, возникающих вследствие технических особенностей процесса производства, от ценовой стабильности, полной занятости рабочей силы и прочих экономических характеристик. Таким образом, возникает необходимость выбора такого состояния экономики из возможных, которое обеспечит наиболее долгосрочную и устойчивую перспективу развития. Такая задача выбора называется задачей определения положения равновесия в экономике.

При описании задачи нахождения положения равновесия чаще всего [1–4, 6] главной задачей считается определение таких условий и параметров экономической системы, при которых это равновесное состояние достижимо. Одновременно с этим приходится учитывать ограничения на технологические множества, описывающие интенсивность производства [7, 8].

В данной работе продолжаются исследования, начатые в [7, 8]. Рассматривается технологическое множество, представленное в виде выпуклого конуса. Делается попытка изучить влияние ограничений интенсивностей производственных отраслей на векторы цен. В более ранних исследованиях [7, 8] этот момент не изучался. В данной работе ограничения на векторы цен устанавливаются в виде конуса, сопряженного к конусу, в котором лежат векторы интенсивностей производственных процессов.

Кроме того, в статье оценивается положение равновесия в случаях, когда матрица модели представляет собой интервальную матрицу [5]. Вполне логично, что при нечетких начальных данных параметры модели могут существенно изменяться. Для оценки положения равновесия модели в этом случае осуществляется переход к оптимизационным задачам.

Постановка задачи и решение

Будем рассматривать модель Леонтьева, определяемую технологической матрицей $A = (a_{ij})$ [2, 7]. Предположим, что число базисных процессов равно числу товаров, т.е. матрица A является квадратной матрицей размерности $n{\times}n$; более того, пусть $A \geq 0$ – неразложима и примитивна.

Обозначим через $z = (z_1, ..., z_n)$ – вектор интенсивностей базисных процессов, а через $p = (p_1, ..., p_n)$ – соответствующий вектор цен. Говорят [2], что модель Леонтьева находится в состоянии динамического равновесия, если выполнены условия

$$z(E - \gamma A) \geq 0; \quad (E - \gamma A)p^T \leq 0;$$

$$z(E - \gamma A)p^T = 0, \tag{1}$$

где E – единичная матрица, а γ – положительное число.

Предположим, что в связи с технологической реализуемостью в рассматриваемой экономике возникают ограничения на векторы интенсивности. Будем считать, что эти векторы z принадлежат не всему R_+^n, как обычно [6], а некоторому подмножеству R_+^n множеству T_z, которое является выпуклым многогранным конусом.

Пусть [4], $T_z = \left\{ z \in R_+^n \mid z = wQ, w \in R_+^n \right\}$ с некоторой квадратной матрицей $Q_{n \times n}$, причем $q_{ij} \geq 0$, и матрицы A и Q коммутативны. Пусть матрица Q имеет обратную матрицу Q^{-1}. Обозначим через T_p конус, определяемый соотношением $T_p = \left\{ p : Q^{-1}p^T \geq 0 \right\}$. Имеет место

Теорема 1

Пусть в неотрицательной матрице A нет нулевых строк. Тогда существует решение системы (1) $z \in T_z$, $p \in T_p$.

Доказательство. При доказательстве существования равновесия принципиальным является переход от неравенства $z(E - \gamma A) \geq 0$, $z \in T_z$ к неравенству $(E - \gamma A)p^T \leq 0$, $p \in T_p$ [2]. Опишем этот переход подробно.

Обозначим $\lambda = 1/\gamma$. Тогда неравенства

$$\begin{cases} (A - \lambda E)^T z^T \leq 0, \ z \in T_z, \\ (A - \lambda E) p^T \geq 0, \ p \in T_p, \end{cases} \tag{2}$$

при подстановке $z = wQ$ равносильны неравенствам

$$(A - \lambda E)^T Q^T w^T \leq 0, \ w \in R_+^n;$$

$$(A - \lambda E) p^T \geq 0, \ p \in T_p.$$

Тогда

$$(Q(A - \lambda E))^T w^T \leq 0, \ w \in R_+^n;$$

$$(A - \lambda E)QQ^{-1} p^T \geq 0, \ p \in T_p$$

или

$$(AQ - \lambda Q)^T w^T \leq 0, \ w \in R_+^n;$$

$$(AQ - \lambda Q) q^T \geq 0, \ q \in R_+^n.$$

Таким образом, неравенства (2) эквивалентны неравенствам

$$w(AQ - \lambda Q) \leq 0, \ w \in R_+^n;$$

$$(AQ - \lambda Q) q^T \geq 0, \ q \in R_+^n. \tag{3}$$

Система неравенств (3) соответствует модели Неймана (AQ, Q) и, значит [2], имеет решение. Так как эта система эквивалентна системе (2), то и система (2) имеет решение. Справедливость третьего соотношения в (1) устанавливается аналогично.

Теорема доказана.

Общим положением равновесия модели Леонтьева с производственной матрицей A и матрицей ограничений Q назовем решение (λ, z, p) системы (2), соответствующее решению системы (3).

Для исследования модели важны частные положения равновесия с соответствующими экстремальными значениями λ, которые можно найти, перейдя к следующим оптимизационным задачам [1]:

$$\lambda^* = \min\left\{ \lambda : z(A - \lambda \mathrm{E}) \leq 0, \ \left(z, e^n\right) = 1, \ z \in T_z \right\}; \tag{4}$$

$$\lambda_n = \max\left\{ \lambda : \ (A - \lambda \mathrm{E}) p^T \geq 0, \ \left(p, e^n\right) = 1, \ p \in T_p \right\}. \tag{5}$$

Числа λ_n и λ^* называются числами Неймана и Фробениуса и определяют максимальный и минимальный темп равновесного роста модели соответственно.

Примем во внимание два обстоятельства. Во-первых, все элементы матрицы Q неотрицательны $(q_{ij} \geq 0)$. Во-вторых, векторы w и q принадлежат симплексам, что является следствием однородности задачи. При введении в систему матрицы Q однородность сохраняется, поэтому по-прежнему можно считать, что $(z, e^n) = 1$, $z \in T_z$, и $(p, e^n) = 1$, $p \in T_p$. Здесь $e^n = (e_i)^T$, $e_i = 1$, $i = 1...n$ – единичный вектор размерности n. Тогда из (4) и (5) следует, что для нахождения параметров продуктивности модели и ее положения равновесия следует решить оптимизационную задачу вида [5]:

$$\left(\lambda^*,\ z^*,\ p^*\right)^T = \arg\max_{(\lambda,z,p)^T\in D(A,Q)} \lambda; \tag{6}$$

$$D(A,Q)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ z\\ p\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l} z(A-\lambda \mathrm{E})\le 0,\\ (A-\lambda \mathrm{E})p^T\ge 0,\\ (z,e^n)=1,\ (p,e^n)=1,\ z\in T_z,\ p\in T_p,\ \lambda\ge 0\end{array}\right.\right\}. \tag{7}$$

Интересно отметить, что в указанном случае возможны некоторые оценки положения равновесия для интервальных моделей леонтьевского типа.

Интервальные модели

Обозначим $\left(\lambda^*, z^*, p^*\right)(A,Q)$ – параметры равновесия модели Леонтьева, задаваемой матрицей A с матрицей ограничений Q, соответствующего системе (2).

Интервальной назовем модель Леонтьева (2) с матрицей затрат $A=\{a_{ij}\}=\{\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\}$, $i, j=(\overline{1...n})$; $midA=\left(\overline{A}+\underline{A}\right)/2$.

Здесь $midA$ – матрица центров интервалов матрицы A; $\overline{A}$, $\underline{A}$ – матрицы точных верхних и нижних граней соответственно [5].

Теорема 2

Пусть интервальная модель Леонтьева с матрицей затрат A и ограничением на вектор производства в виде выпуклого конуса с матрицей $Q_{n\times n}$ задана интервальной матрицей A. Пусть также для точечной матрицы $\tilde{A}$ выполнены условия: $\tilde{A}\in A$,

$$(\tilde{\lambda},\tilde{z},\tilde{p})=\left(\lambda^*,z^*,p^*\right)(\tilde{A},Q); \tag{8}$$

$$(\overline{\lambda},\overline{z},\overline{p})=\left(\lambda^*,z^*,p^*\right)(\overline{A},Q); \tag{9}$$

$$(\underline{\lambda},\underline{z},\underline{p})=\left(\lambda^*,z^*,p^*\right)(\underline{A},Q). \tag{10}$$

Тогда $\underline{\lambda}\le\tilde{\lambda}\le\overline{\lambda}$.

Доказательство. Точечная матрица представима в виде

$$\tilde{A}=\underline{A}+A'=\overline{A}-A'',$$

где $A'=\left(a'_{ij}\right)=\left(\tilde{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}\right)$; $A''=\left(a''_{ij}\right)=\left(\overline{a}_{ij}-\tilde{a}_{ij}\right)$, причем элементы матриц A' и A'' неотрицательны. Подставив $\tilde{A}=\overline{A}-A''$ в (8), получим

$$(\tilde{\lambda},\tilde{z},\tilde{p})^T=\arg\max_{(\lambda,z,p)^T\in D(\tilde{A},Q)}\lambda;$$

$$D(\tilde{A},Q)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ z\\ p\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l} z(\overline{A}-A''-\lambda \mathrm{E})\le 0,\\ (\overline{A}-A''-\lambda \mathrm{E})p^T\ge 0,\\ (z,e^n)=1,\ (p,e^n)=1,\ z\in T_z,\ p\in T_p,\ \lambda\ge 0\end{array}\right.\right\}.$$

Так как матрица A'' неотрицательна, $(\overline{A}-\lambda \mathrm{E})\,\tilde{p}^T\ge 0$. Таким образом, $\forall j=1,2,...\,n$ выполняется:

$$\tilde{\lambda}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ij}\tilde{p}_i}{\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ij}\overline{p}_i}{\sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i}. \tag{11}$$

Последнее неравенство следует из условия (9) теоремы, смысл которого

$$\overline{p}=\arg\max_{p\in T_P}\ \min_{j=1,2,...,n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ij}p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i};\quad \overline{\lambda}=\max_{p\in T_P}\ \min_{j=1,2,...,n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ij}p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}.$$

Отсюда $\tilde{\lambda}\le\overline{\lambda}$.

Неравенство $\tilde{\lambda}\ge\underline{\lambda}$ доказывается аналогично. Действительно, при подстановке $\tilde{A}=\underline{A}+A'$ в (8) получим

$$(\tilde{\lambda},\tilde{z},\tilde{p})^T=\arg\max_{(\lambda,z,p)^T\in D(\tilde{A},Q)}\lambda;$$

$$D(\tilde{A},Q)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ z\\ p\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l} z(\underline{A}+A'-\lambda \mathrm{E})\le 0,\\ (\underline{A}+A'-\lambda \mathrm{E})p^T\ge 0,\\ (z,e^n)=1,\ (p,e^n)=1,\ z\in T_z,\ p\in T_p,\ \lambda\ge 0\end{array}\right.\right\}.$$

Так как матрица A' неотрицательна, из первого неравенства следует $\tilde{z}(\underline{A}-\tilde{\lambda}E)\geq 0$, поэтому для $\forall i = 1, 2, ..., n$ выполняется:

$$\tilde{\lambda}\geq\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}\tilde{z}_j}{\sum_{j=1}^{n}\tilde{z}_j}\geq\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}\underline{z}_j}{\sum_{j=1}^{n}\underline{z}_j}. \qquad (12)$$

Последнее неравенство следует из условия (10) теоремы, смысл которого

$$\underline{z}=\arg\min_{z\in T_z}\max_{i=1,2,...,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}z_j}{\sum_{j=1}^{n}z_j};$$

$$\underline{\lambda}=\min_{z\in T_z}\max_{i=1,2,...,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}z_j}{\sum_{j=1}^{n}z_j}.$$

Отсюда $\tilde{\lambda}\geq\underline{\lambda}$. *Теорема доказана.*

Эта теорема показывает, что для модели Леонтьева с интервальной матрицей затрат A и матрицей ограничений $Q_{n\times n}$ число Фробениуса лежит в интервале $\Lambda=[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$, где $\underline{\lambda}$ – число Фробениуса для модели с матрицей $\underline{A}$, а $\overline{\lambda}$ – для модели с матрицей $\overline{A}$.

Теорема 3

Если в модели Леонтьева с интервальной матрицей затрат A и ограничением на вектор производства в виде выпуклого конуса с матрицей $Q_{n\times n}$ точечная матрица $\tilde{A}$ удовлетворяет условию $\tilde{A}=\beta_A\cdot midA\in A$, то $(\lambda^*,z^*,p^*)(midA,Q)=(\lambda^*\beta_A,z^*,p^*)(\tilde{A},Q)$.

Доказательство теоремы проводится аналогично [5].

Выводы

Модели экономики леонтьевского типа, описанные выше, являются естественным обобщением модели Леонтьева: обобщение заключается в том, что допускаются ограничения на интенсивности базовых производственных отраслей, причем множество ограничений описывается в виде выпуклого конуса. Описывается переход к оптимизационным задачам, позволяющим также получить некоторые оценки положения равновесия в интервальных моделях.

Список литературы

1. Альсевич В. В. Введение в математическую экономику. Конструктивная теория. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 256 с.

2. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. – М. ОНИКС, 2012. – 199 с.

3. Макаров В.Л. Математическая теория экономической динамики и равновесия / Макаров В.Л., Рубинов А.М. – М.: Наука, 1973. – 335 с.

4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 519 с.

5. Панюков А.В., Латипова А.Т. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных // Вестник УГАТУ. – 2008, – т.10, № 2(27). – С. 150–153.

6. Рубинов А.М. Экономическая динамика // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики». – М., 1982. – № 19. – С. 59–110.

7. Севодин М.А. Динамические системы леонтьевского типа с ограничениями на интенсивности технологических процессов // Наука и бизнес: пути развития. – 2013. – № 8. – С. 66–70.

8. Севодин М.А. Модель Неймана с ограничениями пропорций роста интенсивностей производственных процессов // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – Режим доступа: http://www.science-education.ru/pdf/2014/1/268.pdf.

References

1. Alsevich V.V. Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku. Konstruktivnaya teoria. Moscow: Editorial URSS, 2005. 256 p.

2. Ashmanov S.A. Matematicheskie modeli i metodi v economike. Moscow, ONIKS, 2012, 199 p.

3. Makarov V.L., Rubinov A.M. Matematicheskaya teoriya economicheskoy dinamiki i ravnovesiya. Moscow, Nauka, 1973, 335 p.

4. Nikaido H. Vipuklie strukturi i matematicheskaya economika. Moscow, Mir, 1972, 519 p.

5. Panyukov A.V., Latipova A.T. Otsenka polozhenia ravnovesia v modeli Neymana pri intervalnoi neopredelennosti ishodnih dannih // Vestnik UGATU. 2008, Issue 10, Vol. 2(27), pp. 150–153.

6. Rubinov A.M. Economicheskaya dinamika // Itogi nauki i tehniki. Seriya «Sovremennie problemi matematiki» Moscow, 1982. Vol. 19, pp. 59–110.

7. Sevodin M.A. Dinamicheskie sistemi leontyevskogo tipa s ogranicheniyami na intensivnosti tehnologicheskih processov // Nauka i bisnes: puti rasvitiya, 2013, Vol. 8, pp. 66–70.

8. Sevodin M.A. Model Neimana s ogranicheniyami proportsiy rosta intensivnostei proizvodstvennih processov // Sovremennye problem nauki I obrazovania, 2013, Vol 6, URL: http://www.science-education.ru/pdf/2014/1/268.pdf.