

УДК 519.852

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ РАЗВИТИЯ ОТРАСЛИ

Гаврилова М.О., Новоселова Ю.В., Севодин М.А.

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»,
Пермь, e-mail: m.sevodin@mail.ru

В настоящей статье исследуется задача размещения предприятий при планировании развития отрасли. Рассматриваются ситуации, в которых целевой функцией является кусочно-линейная функция, а ограничения представляют собой линейные равенства. При этом от целевой функции в силу характера задачи требуется выпуклость. Для таких задач в работе модифицируются известные методы решения: перебор параллелепипедов линейности целевой функции, метод линейной аппроксимации. Для использования названных методов целевая функция непрерывно продолжается с параллелепипеда на неотрицательный ортант, и вычисляется субдифференциал полученной функции. По сути дела, речь идет о разбиении области определения функции на ряд конусов и использовании метода линейной аппроксимации в каждом из этих конусов. Формулируется и доказывается также условие, гарантирующее выпуклость кусочно-линейной функции. Условие заключается в сравнении углов наклона градиентов линейных функций в точках стыка параллелепипедов линейности целевой функции к самим параллелепипедам.

Ключевые слова: кусочно-линейное программирование, выпуклость, субдифференциал, аппроксимация

ABOUT ONE MODIFICATION OF THE PROBLEM OF PLACEMENT OF THE ENTERPRISES WHEN PLANNING DEVELOPMENT OF BRANCH

Gavrilova M.O., Novoselova Y.V., Sevodin M.A.

The Perm National Research Polytechnical University, Perm, e-mail: m.sevodin@mail.ru

In this article we study the problem of placement of the enterprises when planning development of branch. We consider the situation in which the objective function is a piecewise linear function and restrictions are linear equality. Of the objective function because of the nature of the problem is needed the convexity. For such tasks are modified known methods of solution in this work: Brute-force search of parallelepipeds of linearity of the objective function approximation method. For use of the called methods the objective function extends continuously from of the parallelepiped on a non-negative orthant, and the subderivative of resulting function is calculated. In fact it is a partition of the domain of the function into a series of cones and the use of the a method linear approximation in each of these cones. Next, we formulate and prove the condition that guarantees the convexity piecewise-linear function. The condition consists of comparing the angles of gradients of linear functions in points of joint parallelepipeds of linearity of the objective function to the actual parallelepipeds.

Keywords: piecewise-linear programming, convex, subderivative, approximation

Известно [5], что в задаче размещения предприятий при планировании развития отрасли имеется m пунктов (пункты производства), в которых расположены или могут быть размещены предприятия одной отрасли. Потребности в товаре, произведенном на этих предприятиях, известны в n пунктах (пункты потребления). Затраты по производству и транспортировке единицы продукта считаются также известными. Задача состоит в определении мест расположения новых предприятий, объемов производства и перевозок так, чтобы суммарные издержки были минимальны.

Многие задачи планирования сводятся к следующей задаче математического программирования (см., например, [8]). Требуется определить вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, обращающий в минимум функцию

$$F(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь целевая функция $F(x)$ характеризует суммарные затраты производства, а условия являются балансными соотношениями между продукцией разных предприятий. Благодаря балансным соотношениям гарантируется требуемый объем производства предприятий и устанавливаются ограничения на объемы продукции каждого предприятия, порождаемые учитываемыми потребностями.

Особенностью описываемой задачи оказывается то, что целевая функция является кусочно-линейной функцией [8]. Более того, $f_j(x_j)$ – выпуклые функции, а значит [6], они полиэдральные функции.

Помимо специфики задачи, приводящей к кусочно-линейному характеру оптимизируемого показателя качества, отметим также наличие и других причин, приводящих к подобному эффекту. Укажем здесь в качестве примеров [2] и переменную технологию производства, и экономию на масштабах производства, и некоторые особенности в технологии производств.

Таким образом, видно, что задачи размещения предприятий приводят к задачам кусочно-линейного программирования (КЛП). Основные положения КЛП можно найти в работах [8, 7, 3]. Отметим, что в упомянутых работах ограничения при оптимизации целевой функции рассматривались в виде неравенств. В данной статье речь идет о задаче планирования производства. Ограничения, которые возникают в таких задачах, как уже отмечалось, имеют вид балансных соотношений.

Цель данной работы – изучение задач КЛП с ограничениями-равенствами, адаптация метода линейной аппроксимации [4] к задаче КЛП с ограничениями отмеченного типа.

Постановка задачи. Решение в общем виде

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. Минимизировать функцию

$$z(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)x_j \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)x_j = b_i(x), \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2)$$

$$(j = \overline{1, n}), \quad (3)$$

где $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c_j(x)$ – некоторые кусочно-постоянные функции вектора x , принимающие для определенных значений переменной x разные значения.

Будем считать, что функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c_j(x)$ определены на одном и том же множестве $G = \{x \in G \subset R^n\}$, и существует такое конечное разбиение $G = \bigcup G_k$, $k = \overline{1, l}$, что в каждом подмножестве G_k эти функции постоянны, причем G_k и G_m , $k \neq m$, могут пересекаться только по своим границам.

В введении статьи приводилась задача, в которой коэффициенты зависели лишь только от одной компоненты вектора x и носили кусочно-линейный характер. Такая ситуация возникает [8] и в других случаях. Этот факт говорит о том, что в качестве областей G_k имеет смысл брать области типа параллелепипедов (очевидно, что это еще и упрощает описание поиска решения задачи). Поэтому потребуем следующих дополнительных условий на области G и G_k . Будем считать, что G – параллелепипед:

$$G = \Pi = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n].$$

Таким образом, условие (3) можно не рассматривать. Пусть также каждое G_k является параллелепипедом, грани которого параллельны координатным гиперплоскостям. Более того, будем считать, что выполнено следующее требование: существует конечное разбиение параллелепипеда Π , например

$$\Pi = \bigcup_{k_a} \Pi_{k_a}^a \quad (k_a = \overline{1, s_a}),$$

где $\{\Pi_{k_a}^a\}$ – набор параллелепипедов, на каждом из которых функции $a_{ij}(x)$ являются постоянными. Аналогично можно представить

$$\Pi = \bigcup_{k_b} \Pi_{k_b}^b$$

или

$$\Pi = \bigcup_{k_c} \Pi_{k_c}^c \quad (k_b = \overline{1, s_b}, k_c = \overline{1, s_c}),$$

где $\{\Pi_{k_b}^b\}$ и $\{\Pi_{k_c}^c\}$ – конечные наборы параллелепипедов с постоянными $b_i(x)$ и $c_j(x)$ соответственно. Из этого следует, что существует конечное разбиение множества $G = \Pi$ на параллелепипеды

$$G_k = \Pi_k^{abc},$$

такое, что

$$\Pi = \bigcup_k \Pi_k^{abc},$$

$$\{\Pi_k^{abc}\} = \{\Pi_{k_a}^a\} \cap \{\Pi_{k_b}^b\} \cap \{\Pi_{k_c}^c\},$$

а функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c_j(x)$ постоянны для каждого Π_k^{abc} . При этом соседние параллелепипеды Π_k^{abc} и Π_{k+1}^{abc} пересекаются только по границе.

Наконец, потребуем, чтобы в задаче (1)–(3) целевая функция $z(x)$ и функции ограничений

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)x_j - b_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

были выпуклыми функциями. Заметим, что такое ограничение обеспечивает непрерывность функций в Π . Это следует из вида функций и непрерывности выпуклой функции во внутренности Π [1].

Приведем условие, гарантирующее выпуклость функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k(x)x_j - b^k(x)$$

в $\Pi = \bigcup_k \Pi_k$ с $a_j^k(x)$, $b^k(x)$, постоянными в каждом из Π_k . В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 1

Пусть непрерывная функция $f(x)$ в любой точке $x \in \Pi$ удовлетворяет условию

$$\langle a^q(x), x - x_0 \rangle \leq \langle a^k(x), x - x_0 \rangle, q,$$

$$k \in S(x), x_0 \in \Pi_q.$$

Тогда функция $f(x)$ – выпуклая функция.

Здесь $a^k(x) = (a_1^k(x), \dots, a_n^k(x))$, $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение векторов a и b ; $S(x)$ – множество индексов таких, что из $k \in S(x)$ следует $x \in \Pi_k$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, в силу характера рассматриваемой функции, выполнение свойства выпуклости достаточно доказать локально. Другими словами, если для каждой точки Π существует некоторая окрестность, в которой рассматриваемая функция $f(x)$ выпукла, то $f(x)$ выпукла и в Π .

Убедимся в том, что функция $f(x)$ локально выпукла. Это свойство, в силу кусочно-линейности функции $f(x)$, надо проверять только для точек, являющихся точками пересечения Π_k . Пусть x – одна из таких точек, а x^1, x^2 лежат в достаточно малой окрестности x . Будем считать, что

$$x^1 \in \Pi_{k_1},$$

$$x^2 \in \Pi_{k_2},$$

$$x \in \Pi_{k_1} \cap \Pi_{k_2}.$$

Пусть $\alpha \in [0; 1]$ и, для определенности,

$$\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \in \Pi_{k_1}.$$

Тогда

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) = \sum_{j=1}^n a_j^{k_1}(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2)(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) - b^{k_1}(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) = \langle a^{k_1}(x), \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \rangle - b^{k_1}(x).$$

Из непрерывности функции $f(x)$ в точке x следует равенство

$$\langle a^{k_1}(x), x \rangle - b^{k_1}(x) = \langle a^{k_2}(x), x \rangle - b^{k_2}(x).$$

Используя это соотношение, получим

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) = \alpha \langle a^{k_1}(x), x^1 \rangle - \alpha b^{k_1}(x) + (1 - \alpha) \langle a^{k_1}(x), x^2 \rangle - (1 - \alpha) (\langle a^{k_1}(x), x \rangle - \langle a^{k_2}(x), x \rangle + b^{k_2}(x)) = \alpha f(x^1) + (1 - \alpha) f(x^2) + (1 - \alpha) (\langle a^{k_2}(x), x - x^2 \rangle - \langle a^{k_1}(x), x - x^2 \rangle) \leq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha) f(x^2).$$

Теорема 1 доказана.

Можно выделить несколько методов решения задачи (1)–(3) в такой постановке.

Самым очевидным из них [2] является простой перебор всех параллелепипедов Π_k^{abc} , так как в каждом из Π_k^{abc} мы будем иметь дело с обычной задачей линейного программирования с линейной целевой функцией и выпуклой областью допустимых решений. Для каждого Π_k^{abc} находится оптимальный план x^k , а решением задачи (1)–(3) является x^* , для которого целевая функция минимальна:

$$z^*(x^*) = \min_k \{ z(x^k) \}.$$

Метод линейной аппроксимации

Для задачи (1)–(3) представляется возможным несколько сократить предложенную схему решения.

Возьмем более простую постановку задачи. Требуется минимизировать выпуклую функцию

$$z(x) = \langle c(x), x \rangle \quad (1')$$

при линейных ограничениях

$$Ax^T = b, x \in R_+^n, \quad (2')$$

где $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x))$, $c_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) кусочно-постоянные функции в R_+^n , R_+^n –

$$\begin{aligned} \bar{z}(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) &= \\ &= z\left(\alpha_k \frac{\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2}{x_k}\right) + \lambda((\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2)_k - \alpha_k) = \\ &= z(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) + \lambda((\alpha x^1)_k + ((1-\alpha)x^2)_k - \alpha_k) \leq \\ &\leq \alpha z(\bar{x}^1) + (1-\alpha)z(\bar{x}^2) + \lambda((x^1)_k - \alpha_k) + \\ &+ (1-\alpha)((x^2)_k - \alpha_k) = \alpha \bar{z}(x^1) + (1-\alpha)\bar{z}(x^2). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\bar{z}(x)$ является непрерывным продолжением с Π на R_+^n/Π функции $z(x)$, выпуклым в конусах типа K .

Определим теперь субдифференциал функции

$$z(x) = \begin{cases} z(x), & x \in \Pi; \\ \bar{z}(x), & x \in R_+^n/\Pi \end{cases}.$$

Имеет место

Теорема 2

Субдифференциал $\partial z(x)$ функции $z(x)$ имеет вид

$$\partial z(x) = \begin{cases} \text{conv}(a^i(x), i \in S(x)), & x \in K_k \cap \overset{0}{\Pi}, \\ \text{conv}\left(\frac{1}{x_k} a^i\left(\frac{\alpha_k x}{x_k}\right) - \delta e_k, i \in S\left(\frac{\alpha_k x}{x_k}\right)\right), & x \in K_k/\Pi, \\ \text{conv}\left(a^i(x), i \in S(x), \frac{1}{x_k} a^i\left(\frac{\alpha_k x}{x_k}\right) - \delta e_k, i \in S\left(\frac{\alpha_k x}{x_k}\right)\right), & \text{остальные } x \in K_k, \end{cases}$$

неотрицательный ортант R^n ; A – матрица размера $m \times n$; b – m -мерный вектор.

Условие (2') берется здесь вместо (2) и (3) для упрощения изложения. То же, что замена параллелепипеда Π на R_+^n не уменьшает общности, объясняется существованием у функции $z(x)$ непрерывного продолжения с Π на R_+^n . В самом деле, пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n$ и $x \notin \Pi$. Пусть $x = \alpha_k$ уравнение той грани параллелепипеда Π , которую пересекает отрезок с концами в точках 0 и x (в дальнейшем такие отрезки будем отображать $[0, x]$). Очевидно, что точкой пересечения отрезка $[0, x]$ с гранью является точка $\alpha_k x/x_k$. Положим

$$\bar{z}(x) = z(\alpha_k x/x_k) + \lambda(x_k - \alpha_k),$$

где λ есть произвольное положительное число.

Покажем, что функция $\bar{z}(x)$ является выпуклой функцией в конусе K , образованном лучами, проведенными из нуля и пересекающими одну и ту же грань с уравнением $x = \alpha_k$. Возьмем две точки $x^1, x^2 \in K/\Pi$. Обозначим через \bar{x}^1, \bar{x}^2 точки пересечения грани $x = \alpha_k$ с отрезками $[0, x^1]$ и $[0, x^2]$ соответственно. В силу выпуклости функции $z(x)$ на Π имеем с $\alpha, \alpha \in [0, 1]$,

где $convG$ – выпуклая оболочка множества G ; $\delta = \frac{1}{x_k} \left\langle a^i \left(\frac{\alpha_k x}{x_k} \right), x \right\rangle - \lambda$; e_k – вектор, k -я координата которого равна единице, а все остальные равны 0; Π^0 – внутренность Π .

Доказательство первой части теоремы можно найти в [7]. Соотношения же для множеств K_k / Π^0 получатся непосредственно с помощью формул из [1].

Опишем теперь алгоритм метода линейной аппроксимации.

Рассмотрим конус K_k . Множество точек этого конуса можно рассматривать как образ R_+^n при отображении линейным оператором с матрицей Q_k , т.е. $K_k = Q_k R_+^n$. Таким образом, чтобы найти минимум функции $z(x)$ в конусе K_k , нужно найти минимум функции $z(Q_k y^T)$ в R_+^n . Отметим также, что при этом формулы для субдифференциалов отображений $z(x)$ и $z(Q_k y^T)$ связаны соотношением $\partial z(Q_k y) = Q_k^T \partial z(x)$.

Опишем теперь алгоритм метода линейной аппроксимации. Здесь, как уже показано, можно считать, что задача задана соотношениями (1'), (2'). Идея метода [1] заключается в том, что в любой допустимой точке x^k функция $z(x)$ аппроксимируется функцией $z_L(x)$, где $z_L(x) = z(x^k) + g(x^k)(y - x^k)$, где $g(x^k)$ соответствующим образом выбранный вектор из множества $\partial z(x^k)$.

Отметим, что минимизация такой функции эквивалентна в смысле решения минимизации функции $g(x^k)y^T$ при $Ay^T = b$, $y \geq 0$. Обозначим решение y^k .

Направление $g(x^k)$ естественно взять направлением наискорейшего спуска функции $z(x)$ в точке x^k . Оно задается вектором $g(x^k) \in -\partial z(x^k)$, лежащем на кратчайшем расстоянии от начала координат.

Далее с помощью направления $d^k = y^k - x^k$ получим точку x^{k+1} как решение задачи минимизации $z(x^k + \tau(y^k - x^k))$, $\tau \in [0, 1]$. Все точки вида $x^k + \tau(y^k - x^k)$, $\tau \in [0, 1]$ допустимы в силу выпуклости допустимого множества.

Пусть решение этой задачи есть x^{k+1} . Если окажется, что $g(x^{k+1})(y^{k+1} - x^{k+1})^T > 0$, то процесс продолжается дальше. Если же выполняется обратное неравенство, то в точке x^{k+1} выполняется условие Куна – Таккера и алгоритм завершает свою работу.

Выводы

Описана модификация задачи размещения предприятий при планировании разви-

тия отрасли в виде задачи кусочно-линейного программирования.

Для решения описанной задачи к ее условиям адаптирован метод линейной аппроксимации.

Список литературы

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 550 с.
2. Гаврилова М.О. К задаче о наилучшем использовании ресурсов с переменной матрицей технологических коэффициентов // М.О. Гаврилова, В.П. Первадчук, М.А. Севодин // Современные проблемы теории и практики управления предприятием: сб. науч. тр. шестая Междунар. науч.-приклад. конф. / Техн. ун-т Варна, Болгария, Перм. гос. техн. ун-т и др. – Варна, 2006. – С. 203–205.
3. Еремин И.И. Некоторые вопросы кусочно-линейного программирования // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 12. – С. 49–61.
4. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Советское радио, 1973. – 312 с.
5. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. – М.: Знание, 1968. – 96 с.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
7. Филимонов А.Б. Метод полиэдрального программирования в дискретных задачах идентификации состояния системы и внешней среды / А.Б. Филимонов, Н.Б. Филимонов // Вестник РУДН. Серия Кибнетика. – 1999. – № 1. – С. 23–30.
8. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Об одном методе количественного анализа упрощенных экономических моделей / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн // Применение математики в экономических исследованиях: сб. статей. Соцэкгиз. – 1962. – Т. 2. – С. 136–199.

References

1. Vasilev F.P. Chislennyye metody resheniya jekstremalnyh zadach. M.: Nauka, 1988. 550 p.
2. Gavrilova M.O. K zadache o nailuchshem ispolzovanii resursov s peremennoj matricей tehnologicheskikh koefficientov (Gavrilova M.O., Pervadchuk V.P., Sevodin M.A.) // Sovremennye problemy teorii i praktiki upravlenija predpriatiem: sb. nauch. tr. shestaja Mezhdunar. nauch.-priklad. konf. / Tehn. un-t Varna, Bolgarija, Perm. gos. tehn. un-t [i dr.]. Varna, 2006. pp. 203–205.
3. Eremin I.I. Nekotorye voprosy kusochno-linejnogo programmirovanija / Eremin I.I. // Izv. vuzov. Matem., 1997. no. 12. pp. 49–61.
4. Zangvill U. Nelinejnoe programmirovanie. Edinyj podhod. M.: Sovetskoe radio, 1973. 312 p.
5. Kantorovich L.V., Gorstko A.B. Matematicheskoe optimalnoe programmirovanie v jekonomike. M.: Znanie, 1968. 96 p.
6. Rokafellar R. Vypuklyj analiz. M: Mir, 1973. 471 p.
7. Filimonov A.B. Metod polijedralnogo programmirovanija v diskretnyh zadachah identifikacii sostojanija sistemy i vneshnej sredy / A.B. Filimonov, N.B. Filimonov // Vestnik RUDN. Serija Kibernetika, 1999. no. 1. pp. 23–30.
8. Judin D.B., Golshtejn E.G. Ob odnom metode kolichestvennogo analiza uproshhennyh jekonomicheskikh modelej. Sb.statej «Primenenie matematiki v jekonomicheskikh issledovanijah». Socjkgiz, 1962. T. 2. pp. 136–199.