

УДК 519.6

УСТОЙЧИВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абрегов М.Х., Канчукоев В.З., Машуков И.К.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»,
Нальчик, e-mail: bsk@kbsu.ru

Работа посвящена построению устойчивого численного метода решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которая часто используется при исследовании прикладных задач физики, техники, биологии и других областей науки. Известно, что решение данной задачи может оказаться неустойчивым. В таком случае сложно получить ее решение численно, поскольку ошибки округления и усечения оказывают на результат такое же влияние, как и изменение начальных условий. Предложенный в работе метод основывается на редукции исходной задачи Коши к эквивалентной задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с нелокальным интегральным условием и последующем ее решении конечно-разностным методом. Конечно-разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную задачу с нелокальным условием со вторым порядком точности по шагу сетки, сводится к решению двух устойчивых конечно-разностных схем второго порядка с граничными условиями первого рода.

Ключевые слова: задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, устойчивость решения, численный метод решения, априорная оценка

SUSTAINABLE NUMERICAL METHODS FOR SOLVING CAUCHY PROBLEM FOR LINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abregov M.K., Kanchukoev V.Z., Mashukov I.K.

Kabardino-Balkaria State University K.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: bsk@kbsu.ru

The work is dedicated to building a sustainable numerical method for solving the Cauchy problem for a linear ordinary differential equation of the second order, which is often used in the study of applied problems of physics, engineering, biology, and other fields of science. It is known that the solution of this problem may be unstable. In this case, it is difficult to obtain a solution numerically, since rounding errors and truncation have on the result of the same effect as changing the initial conditions. The proposed work method is based on reducing the initial problem to an equivalent Cauchy problem for a linear ordinary differential equation of second order with a nonlocal integral condition and its subsequent decision finite-difference method. Finite-difference scheme approximating differential problem with nonlocal condition for a second order of accuracy for grid spacing is reduced to the solution of two stable finite-difference schemes of the second order with boundary conditions of the first kind.

Keywords: cauchy problem for an ordinary linear differential equation of the second order, stability of the solution, a numerical method for the solution, a priori estimate

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$(k(x)u')' - g(x)u = f(x), \quad 0 < x < l; \quad (1)$$

$$u(0) = 0; \quad k(0)u'(0) = 0. \quad (2)$$

Будем предполагать, что коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям: $k(x) \in C^3[0, l]$; $g(x), f(x) \in C^2[0, l]$; $c_2 \geq k(x) \geq c_1 > 0$; $0 \leq g(x) \leq \bar{g}$.

Известно [5], что решение задачи (1)–(2) существует и единственно в классе функций $C^4[0, l]$. Однако это решение, как показано в [2], при больших значениях l может оказаться неустойчивым. Это означает, что сколь угодно малые изменения начальных условий могут вызвать сколь угодно большие измене-

ния решения при больших значениях l . В этом случае сложно получить указанное решение численно, так как ошибки округления и усечения оказывают такое же влияние, как и изменение начальных условий, и приводят к тому, что решение становится неограниченным.

Проинтегрировав уравнение (1) по отрезку $[0, l]$ и воспользовавшись начальным условием (2), приходим к эквивалентной задаче

$$(k(x)u')' - g(x)u = f(x), \quad x \in (0, l); \quad (3)$$

$$u(0) = 0; \quad (4)$$

$$k(l)u'(l) = \int_0^l g(x)u \, dx + \int_0^l f(x) \, dx. \quad (5)$$

На равномерной сетке

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N; hN = l\}$$

задачу (3)–(5) аппроксимируем конечно-разностной схемой

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0 = 0; \quad (6)$$

$$a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \sum_{i=1}^{N-1} d_i y_i h + \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i h + \varphi_0 \frac{h}{2};$$

где

$$a_i = k \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right); \quad d_i = g(x_i); \quad \varphi_i = f(x_i). \quad (7)$$

Нетрудно показать, что разностная схема (6) аппроксимирует дифференциальную задачу (3)–(5) с точностью $O(h^2)$. Используя обозначения [3]

$$(ay_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right]; \\ (u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \cdot v_i \cdot h; \quad y_{\bar{x}, i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}; \\ (u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i h,$$

перепишем задачу (6) в форме

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = \varphi; \quad (8)$$

$$y_0 = 0; \quad a_N y_{\bar{x}, N} = (d, y) + (\varphi, 1) + \frac{h}{2} \cdot \varphi_0. \quad (9)$$

Нетрудно показать единственность решения задачи (8), (9). Действительно, если $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ – два решения задачи (8), (9), то, очевидно, разность $v = \bar{y} - \bar{\bar{y}}$ будет решением задачи

$$(av_{\bar{x}})_x - dv = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (10)$$

$$v_0 = 0; \quad a_N v_{\bar{x}, N} = (d, v). \quad (11)$$

Суммируя (10) по i от 1 до $N-1$, приходим к равенству

$$a_N v_{\bar{x}, N} - a_1 v_{\bar{x}, 1} = (d, v),$$

из которого следует, с учетом условия (22), что $a_1 v_{\bar{x}, 1} = 0$.

Таким образом, сеточная функция v будет решением конечно-разностной задачи Коши

$$(av_{\bar{x}})_x - dv = 0; \quad v_0 = 0; \quad a_1 v_{\bar{x}, 1} = 0,$$

из которой следует, что $v_i = 0, i = 0, 1, \dots, N$, что означает единственность решения задачи (8), (9).

Будем искать решение задачи (8), (9) в виде

$$y_i = P_i + y_N Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (12)$$

где P_i и Q_i – сеточные функции, определенные на сетке ω_h , как решения разностных задач:

$$(aP_{\bar{x}})_x - dP = \varphi; \quad P_0 = 0; \quad P_N = 0; \quad (13)$$

$$(aQ_{\bar{x}})_x - dQ = 0; \quad Q_0 = 0; \quad Q_N = 1, \quad (14)$$

где коэффициенты a, d и правая часть φ определены по формулам (7). Как известно [3], задачи (13) и (14) однозначно разрешимы в силу условий на a, d .

Для решения задачи (13) имеет место априорная оценка [4]

$$\|P\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{l^2}{c_1} \|\varphi\|_{C(\omega_h)}, \quad (15)$$

а для решения задачи (14) имеет место равномерная оценка

$$\|Q\|_{C(\omega_h)} \leq 1. \quad (16)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция y , определенная по формуле (12), удовлетворяет уравнению (8) и начальному условию $y_0 = 0$. Подставив (12) в нелокальное условие (9), приходим к равенству

$$a_N P_{\bar{x}, N} + y_N a_N Q_{\bar{x}, N} =$$

$$= (d, P) + y_N (d, Q) + (\varphi, 1) + 0, 5h\varphi_0,$$

откуда выражаем y_N :

$$y_N = \frac{-a_N P_{\bar{x}, N} + (d, P) + (\varphi, 1) + 0, 5h\varphi_0}{a_N Q_{\bar{x}, N} - (d, Q)}. \quad (17)$$

Покажем ограниченность y_N . Преобразуем правую часть (17). Суммируя уравнение (13) по i от 1 до $N-1$, приходим к равенству

$$-a_N P_{\bar{x}, N} + (d, P) + (\varphi, 1) = -a_1 P_{\bar{x}, 1}. \quad (18)$$

Суммируя уравнение (14) по i от 1 до $N-1$, получаем

$$a_1 Q_{\bar{x}, 1} = a_N Q_{\bar{x}, N} - (d, Q). \quad (19)$$

С учетом (18) и (19) выражение (17) для y_N принимает вид

$$y_N = \frac{-a_1 P_{\bar{x}, 1} + 0, 5h\varphi_0}{a_1 Q_{\bar{x}, 1}}. \quad (20)$$

Оценим снизу $a_1 Q_{\bar{x}, 1}$. Это число не может быть отрицательным, что противоречило бы принципу максимума [3] первой краевой задачи для уравнения (14). Также $Q_{\bar{x}, 1} \neq 0$, это противоречит условию $Q_N = 1$. Следовательно, $Q_{\bar{x}, 1} > 0$.

Пусть r_i – сеточная функция, определенная на ω_h , и является решением разностной задачи

$$(c_1 r_{\bar{x}})_x - \bar{g}r = 0; \quad r_0 = 1; \quad r_N = 0. \quad (21)$$

Умножим уравнение (21) скалярно на Q , а уравнение (14) скалярно на r и вычтем почленно одно из другого. Применяя разностную формулу интегрирования по частям [3] и учитывая краевые условия (14), (21), приходим к равенству

$$\begin{aligned} & -(aQ_{\bar{x}}, r_{\bar{x}}) - a_1 Q_{\bar{x},1} + (c_1 r_{\bar{x}}, Q_{\bar{x}}) - \\ & - c_1 r_{\bar{x},N} - (dQ, r) + (\bar{g}r, Q) = 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} a_1 Q_{\bar{x},1} = & -c_1 r_{\bar{x},N} + \\ & + ((c_1 - a)Q_{\bar{x}}, r_{\bar{x}}) + ((\bar{g} - d)Q, r). \end{aligned} \quad (22)$$

Нетрудно показать, что для всех $i = 1, 2, \dots, N$ выполняются неравенства

$$Q_{\bar{x}} \geq 0, \quad r_{\bar{x}} < 0, \quad Q \geq 0, \quad r \geq 0.$$

С учетом этих оценок из (22) получаем

$$a_1 Q_{\bar{x},1} \geq -c_1 r_{\bar{x},N}. \quad (23)$$

Оценим снизу выражение $-c_1 r_{\bar{x},N}$. Используя точное решение задачи (21), находим, что

$$-c_1 r_{\bar{x},N} = \alpha(h),$$

$$\text{где} \quad \alpha(h) = \frac{2c_1 \sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\bar{g}}{4c_1} h^2}}{\left(1 + \frac{\bar{g}}{2c_1} h^2 + \sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \cdot h \sqrt{1 + \frac{\bar{g}}{4c_1} h^2}\right)^{\frac{l}{h}} - \left(1 + \frac{\bar{g}}{2c_1} h^2 - \sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \cdot h \sqrt{1 + \frac{\bar{g}}{4c_1} h^2}\right)^{\frac{l}{h}}}.$$

Положив

$$\alpha(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \alpha(h) = c_1 \sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} sh \left(\sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \right),$$

на отрезке $\left[0, \frac{l}{2}\right]$ получим непрерывную, возрастающую по h функцию. Следовательно, для любого $h \in \left(0, \frac{l}{2}\right]$ имеет место неравенство $-c_1 r_{\bar{x},N} > \alpha(0)$. Таким образом, $a_1 Q_{\bar{x},1} \geq a(0)$, откуда следует, что

$$\frac{1}{a_1 Q_{\bar{x},1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \cdot sh \left(\sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \right). \quad (24)$$

Теперь оценим сверху модуль выражения $a_1 P_{\bar{x},1}$. Умножая скалярно разностное уравнение (13) на сеточную функцию $v_i = 1 - \frac{x_i}{l}$, определенную на ω_h , получим

$$(v, (aP_{\bar{x}})_x) - (dP, v) = -(\phi, v). \quad (25)$$

Применяя разностную формулу интегрирования по частям [4] в (25) и учитывая краевые условия (13) и равенства $v_{\bar{x}} = -\frac{1}{l}$; $v_N = 0$, $v_0 = 1$, получаем

$$a_1 P_{\bar{x},1} = \frac{1}{l} (aP_{\bar{x},1}) - (dP, v) + (\phi, v). \quad (26)$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского [1, 3], оценим по модулю слагаемые в правой части (26):

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \left| \frac{1}{l} (aP_{\bar{x},1}) \right| \leq \frac{c_2}{l} \left(\sum_{i=1}^N P_{\bar{x},i}^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N h \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{c_2}{l} \cdot \sqrt{l} \cdot \|P_{\bar{x}}\| \leq \frac{c_2}{l} \cdot \sqrt{l} \cdot \frac{l\sqrt{l}}{c_1} \|\phi\|_{C(\omega_h)} = \frac{c_2}{c_1} \cdot l \cdot \|\phi\|_{C(\omega_h)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \left| \left(dP, 1 - \frac{x}{l} \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^N d_i P_i \left(1 - \frac{x_i}{l} \right) h \right| \leq \bar{g} \cdot \|P\|_{C(\omega_h)} \cdot \frac{l}{3} \leq \\ &\leq \bar{g} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l^2}{c_1} \cdot \|\varphi\|_{C(\omega_h)} = \bar{g} \cdot \frac{1}{c_1} \cdot \frac{l^3}{3} \cdot \|\varphi\|_{C(\omega_h)}; \end{aligned}$$

$$\text{в)} \left| \left(\varphi, 1 - \frac{x}{l} \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i \left(1 - \frac{x_i}{l} \right) h \right| \leq \frac{l}{2} \|\varphi\|_{C(\omega_h)}.$$

С учетом полученных оценок и неравенства $\left| \frac{h}{2} \varphi_0 \right| \leq \frac{l}{2} \|\varphi\|_{C(\omega_h)}$, из (26) находим

$$|a_1 P_{\bar{x},1} + 0,5h\varphi_0| \leq |a_1 P_{\bar{x},1}| + \frac{l}{2} \|\varphi\|_{C(\omega_h)} \leq l \left(1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{\bar{g}}{c_1} \frac{l^2}{3} \right) \|\varphi\|_{C(\omega_h)}. \quad (27)$$

Из (24) и (27) получаем оценку

$$|y_N| \leq l \left(1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{\bar{g}}{c_1} \frac{l^2}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \cdot sh \left(\sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \right) \cdot \|\varphi\|_{C(\omega_h)}. \quad (28)$$

Из (12), используя оценки (15), (16) и (28), получаем равномерную оценку решения конечно-разностной схемы (8), (9),

$$\|y\|_{C(\omega_h)} \leq M \cdot \|\varphi\|_{C(\omega_h)}, \quad (29)$$

где

$$M = \frac{l^2}{c_1} + l \left(1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{\bar{g}}{c_1} \frac{l^2}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \cdot sh \left(\sqrt{\frac{\bar{g}}{c_1}} \right) \cdot \|\varphi\|_{C(\omega_h)}.$$

Из оценки (29) следует устойчивость конечно-разностной схемы (8), (9). Алгоритм решения задачи (8), (9) заключается в решении задач (13) и (14) методом прогонки [3], вычислении y_N по формуле (20) и подстановке их в формулу (12). В силу условий на коэффициенты в задачах (13) и (14) метод прогонки при их решении будет устойчивым, погрешность в исходных данных не будет возрастать.

Изложенный выше метод можно использовать для нахождения решения задачи (1), (2) с более высоким порядком точности по шагу h .

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.. Численные методы. – М.: Наука, 1987.

2. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.

3. Самарский А.А.. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.

5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.

References

1. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.. Chislennyye metody. M.: Nauka, 1987.

2. Ortega Dzh., Pul U.. Vvedenie v chislennyye metody resheniya differentsial'nykh uravnenij. M.: Nauka, 1986.

3. Samarskiy A.A.. Teoriya raznostnykh shem. M.: Nauka, 1989.

4. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennyye metody. M.: Nauka, 1989.

5. Stepanov V.V. Kurs differentsialnykh uravnenij. M.: Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1956.