

УДК 519.852

РАЗРАБОТКА СПЕЦИАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НЕРАВЕНСТВ

¹Кравчук С.П., ²Кравчук И.С., ¹Швед Е.В.

¹ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»,
Москва, e-mail: kafedra_vm@mail.ru;

²ФГБОУ ВО «Московский государственный университет путей сообщения
Императора Николая II», Москва

Известно, что задачи линейного программирования широко используются во всевозможных практических задачах оптимизации как экономических, так и технических проблем. Однако изучение основных методов решения подобных задач требует длительной теоретической подготовки, включающей в себя серьезное освоение фундаментального раздела высшей математики – линейной алгебры. Авторы данной статьи в предыдущем цикле работ по линейному программированию предложили простой универсальный способ решения любых задач линейного программирования с помощью исключения переменных в системе линейных неравенств. Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по применению метода неравенств к задачам транспортного типа, в том числе с правильными и неправильными балансами, ограничениями на пропускную способность и т.п. Предлагаемый метод будет полезен студентам экономических специальностей, а также инженерам-практикам, использующим методы оптимизации.

Ключевые слова: неравенства, линейное программирование, симплекс-метод, метод Жордана-Гаусса, целевая функция, экстремум, матрица

DEVELOPMENT SPECIAL SOFTWARE ENGINE OPTIMIZATION OF LOGISTICS COSTS BASED ON THE METHOD INEQUALITIES

¹Kravchuk S.P., ²Kravchuk I.S., ¹Shved E.V.

¹Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, e-mail: kafedra_vm@mail.ru;

²Moscow state University of railway engineering, Moscow

It is well known that linear programming problems are very useful in different practical tasks for the optimization of both economic and technical problems. However, the study of basic procedures solving such problems demands protracted theoretical background which involves the grave exploration of higher mathematics' fundamental branch that is linear algebra. In the preceding series of linear programming works the authors of this article proposed a simple universal way to do any linear programming problems using the elimination of variables in the linear inequalities system. Present article continues authors' series of works about the use of inequalities procedure to the problems of transport type including the problems with regular and irregular balances, with the constraint on capacity. Proposed procedure will be useful for the students who are economics majors as well as for practical engineers using optimization procedures.

Keywords: inequality, linear programming, the simplex method, Gauss-Jordan method, the objective function, extremum, matrix

Задачи линейного программирования транспортного типа широко распространены в практических исследованиях оптимизации различных экономических задач [1]. Однако существующие методы их решения нетривиальны и требуют специальной теоретической подготовки [1–3], как и вообще при решении любых других задач линейного программирования. В настоящее время существуют компьютерные программы, позволяющие решать подобные задачи с любым количеством переменных. Но для правильного использования этих программ и анализа найденного решения необходимо освоить хотя бы простейшие методы решения задач с малым числом переменных.

Авторам удалось построить простой универсальный метод решения задач линейного программирования с помощью исключения

переменных в системе линейных неравенств, используя таблицы Гаусса [4, 5]. Данная работа демонстрирует применение этого метода к решению транспортных задач.

Решение транспортной задачи с правильным балансом

Пусть исходная таблица имеет вид:

$a_i \backslash b_j$	10	12	8
17	x_{11} 3	x_{12} 5	x_{13} 2
13	x_{21} 4	x_{22} 1	x_{23} 7

где x_{ij} – объёмы перевозок от i -го поставщика к j -му потребителю, a_i – запасы поставщиков, b_j – запросы потребителей. Числа

рядом с x_{ij} указывают стоимость c_{ij} перевозки единицы груза. Переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 17; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 13; \\ x_{11} + x_{21} = 10; \\ x_{12} + x_{22} = 12; \\ x_{13} + x_{23} = 8; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Приведём систему (1) к разрешённому виду, используя таблицы Жордана-Гаусса [2, 3].

В итоге решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{cases} x_{11} = x_{22} + x_{23} - 3 \geq 0; \\ x_{12} = -x_{22} + 12 \geq 0; \\ x_{13} = -x_{23} + 8 \geq 0; \\ x_{21} = -x_{22} - x_{23} + 13 \geq 0; \\ x_{22} \geq 0; \\ x_{23} \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Целевая функция $Z = \sum c_{ij} x_{ij}$ является суммой затрат на перевозку всех грузов и должна быть минимальна: $Z \rightarrow \min$.

С учётом (2):

$$Z = 3x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22} +$$

$$+ 7x_{23} = -5x_{22} + 4x_{23} + 119 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Как показано в [4], система неравенств, обеспечивающая $Z_{\min}$, объединяет (2), (3) и выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -5x_{22} + 4x_{23} \leq Z - 119; \\ -x_{22} - x_{23} \leq -3; \\ x_{22} \leq 12; \\ x_{23} \leq 8; \\ x_{22} + x_{23} \leq 13; \\ -x_{22} \leq 0; \\ -x_{23} \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Исключаем переменные в системе (4) с помощью таблиц Гаусса, как в [4]:

Заметим, что в табл. 2 вычеркнуты автоматически выполняющиеся неравенства-следствия, например $-x_{23} \leq 0 < 9, x_{23} \leq 8 < 13$.

Подставляя $Z = 59$ в подтаблицу II, получим:

$$\begin{cases} 4x_{23} \leq 0; \\ 9x_{23} \leq 5; \Rightarrow x_{23} = 0. \\ 0 \leq x_{23} \leq 8. \end{cases}$$

Таблица 1

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}		
1	1	1	0	0	0	17	
0	0	0	1	1	1	13	
1	0	0	1	0	0	10	
0	1	0	0	1	0	12	
0	0	1	0	0	1	8	
1	1	1	0	0	0	17	
0	0	0	1	1	1	13	
0	-1	-1	1	0	0	-7	
0	1	0	0	1	0	12	
0	0	1	0	0	1	8	
1	1	1	0	0	0	17	
0	0	0	1	1	1	13	
0	-1	-1	0	-1	-1	-20	
0	1	0	0	1	0	12	
0	0	1	0	0	1	8	
1	0	1	0	-1	0	5	
0	0	0	1	1	1	13	
0	0	-1	0	0	-1	-8	
0	1	0	0	1	0	12	
0	0	1	0	0	1	8	
1	0	0	0	-1	-1	-3	
0	0	0	1	1	1	13	
0	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	1	0	12	
0	0	1	0	0	1	8	

Таблица 2

	x_{22} x_{23}		
[I]	∇	$Z - 119$	
	- 5 4	- 3	
	- 1 - 1	12	
	1 0	8	
	0 1	13	
	1 1	0	
	- 1 0	0	
[II]	∇	$Z - 59$	
	0 4	9	
	$\overline{0 - 1}$	$\overline{12}$	
	$\overline{0 0}$	$Z - 54$	
	0 9	$\overline{10}$	
	$\overline{0 0}$	$\overline{13}$	
	$\overline{0 1}$	8	
[III]	0 0	$Z - 59$	$\begin{cases} Z \geq 59; \\ Z \geq 54. \end{cases} \Rightarrow Z_{\min} = 59$
	0 0	$Z - 54$	
	$\overline{0 0}$	$\overline{8}$	

Подставляя $Z = 59$ и $x_{23} = 0$ в подтаблицу I, найдём:

$$\begin{cases} -5x_{22} \leq -60; \\ -x_{22} \leq -3; \\ x_{22} \leq 12; \\ 0 \leq x_{22} \leq 13. \end{cases} \Rightarrow x_{22} = 12.$$

С учётом (2) окончательное решение данной транспортной задачи таково:

$$Z_{\min}(X) = 59 \text{ при } X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 8 \\ 1 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

В общем случае m поставщиков и n потребителей (начало табл. 3) выглядит так:

Таблица 3

x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	...	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	
1	1	...	1	0	0	...	0	...	0	0	...	0	a_1
0	0	...	0	1	1	...	1	...	0	0	...	0	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	0	0	0	...	0	...	1	1	...	1	a_m
1	0	...	0	1	0	...	0	...	1	0	...	0	b_1
0	1	...	0	0	1	...	0	...	0	1	...	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	1	0	0	...	1	...	0	0	...	1	b_n

Нетрудно проверить, что в окончательной подтаблице табл. 3 первая строка заменится на:

1	0	...	0	0	-1	...	-1	...	0	-1	...	-1	$a_1 - (b_2 + \dots + b_n)$
---	---	-----	---	---	----	-----	----	-----	---	----	-----	----	-----------------------------

а строка с b_1 будет состоять из одних нулей:

x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	...	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	
1	0	...	0	0	-1	...	-1	...	0	-1	...	-1	$a_1 - (b_2 + \dots + b_n)$
0	0	...	0	1	1	...	1	...	0	0	...	0	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	0	0	0	...	0	...	1	1	...	1	a_m
0	1	...	0	0	1	...	0	...	0	1	...	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	1	0	0	...	1	...	0	0	...	1	b_n

С помощью этой подтаблицы легко выписываются соотношения типа (2)–(4).

Решение транспортной задачи с неправильным балансом

Рассмотрим случай, когда запросы потребителей больше запасов поставщиков:

$a_i \backslash b_j$	16	14	10
17	x_{11} 3	x_{12} 5	x_{13} 2
13	x_{21} 4	x_{22} 1	x_{23} 7

Ограничения на переменные таковы:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 17; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 13; \\ x_{11} + x_{21} \leq 16; \\ x_{12} + x_{22} \leq 14; \\ x_{13} + x_{23} \leq 10; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Выражая из равенств (5), например,

$$\begin{cases} x_{11} = -x_{12} - x_{13} + 17 \geq 0; \\ x_{21} = -x_{22} - x_{23} + 13 \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

преобразуем целевую функцию

$$\begin{aligned} Z &= 3x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22} + 7x_{23} = \\ &= 2x_{12} - x_{13} - 3x_{22} + 3x_{23} + 103 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (7)$$

В итоге исходная система неравенств (5)–(7) рассматриваемой задачи выглядит так:

$$\begin{cases} 2x_{12} - x_{13} - 3x_{22} + 3x_{23} \leq Z - 103; \\ x_{12} + x_{13} \leq 17; \\ x_{22} + x_{23} \leq 13; \\ -x_{12} - x_{13} - x_{22} - x_{23} \leq -14; \\ x_{12} + x_{22} \leq 14; \\ x_{13} + x_{23} \leq 10; \\ -x_{12} \leq 0; \\ -x_{13} \leq 0; \\ -x_{22} \leq 0; \\ -x_{23} \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Далее, последовательно, исключая переменные x_{12} , x_{13} , x_{22} , x_{23} (табл. 4), найдём решение задачи (8):

$$Z_{\min}(X) = 54 \text{ при } X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}.$$

Столь же просто составляется система неравенств для транспортной задачи с ограничениями на пропускную способность типа

$$0 < c_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}.$$

В этом случае к неравенствам вида (4), (8) добавляются ещё такие:

$$\begin{cases} x_{ij} \leq d_{ij}; \\ -x_{ij} \leq -c_{ij}. \end{cases}$$

При этом неравенство $-x_{ij} \leq 0$ следует откинуть, как выполняющееся автоматически.

Таблица 4

	x_{12}	x_{13}	x_{22}	x_{23}		
[I]	2	- 1	- 3	3	Z - 103	
	1	1	0	0	17	
	0	0	1	1	13	
	- 1	- 1	- 1	- 1	- 14	
	1	0	1	0	14	
	0	1	0	1	10	
	- 1	0	0	0	0	
	0	- 1	0	0	0	
	0	0	- 1	0	0	
	0	0	0	- 1	0	
[II]	- 3	- 5	1		Z - 131	
	0	1	1		13	
	1	0	1		10	
	- 1	- 3	3		Z - 103	
	1	0	0		17	
	0	1	0		14	
	- 1	0	0		0	
	0	- 1	0		0	
	0	0	- 1		0	
[III]	- 5	4			Z - 101	
	1	1			13	
	- 3	4			Z - 93	
	1	0			14	
	0	1			10	
	- 5	1			Z - 80	
	- 3	3			Z - 86	
	- 1	0			0	
	0	- 1			0	
[IV]			9		Z - 36	
			7		Z - 54	
			6		Z - 47	
			4		Z - 51	
			1		10	
			1		Z - 10	
			3		Z - 44	
			- 1		0	

Список литературы

1. Быканова О.А. Исследовательская деятельность в рамках обучения финансовой грамотности социально ориентированной молодежи // Молодой ученый. – 2015. – № 22.
2. Быканова О.А. Элементы общей топологии: Учеб.-метод. пособие по специальности 032100 «Математика» по курсу «Геометрия». Под ред. О.Н. Бабенко; М-о образования Рос. Федерации. Таганрог. гос. пед. ин-т. – Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та, 2001.
3. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования. Задачи транспортного типа. – М.: Librokom, 2010.
4. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2000.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2005.
6. Кравчук С.П., Кравчук И.С., Швед Е.В. Экстремумы в системе линейных неравенств с двумя переменными. – СПб.: Современные аспекты экономики, 2010. – № 6 (154).
7. Кравчук С.П., Кравчук И.С., Татарников О.В., Швед Е.В. Метод неравенств в задачах линейного программирования // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 3–1. – С. 148–153.

References

1. Bykanova O.A. Issledovatel'skaja dejatel'nost' v ramkah obuchenija finansovoj gramotnosti socialno orientirovannoj molodezhi // Molodoj uchenyj. 2015. no. 22.
2. Bykanova O.A. Jelementy obshhej topologii: Ucheb.-metod. posobie po specialnosti 032100 «Matematika» po kursu «Geometrija». Pod red. O.N. Babenko; M-o obrazovanija Ros. Federacii. Taganrog. gos. ped. in-t. Taganrog: Izd-vo Taganrog. gos. ped. in-ta, 2001.
3. Golshtejn E.G., Judin D.B. Zadachi i metody linejnogo programirovanija. Zadachi transportnogo tipa. M.: Librokom, 2010.
4. Obshhij kurs vysshej matematiki dlja jekonomistov. Uchebnik pod red. prof. V.I. Ermakova. M.: INFRA-M, 2000.
5. Sbornik zadach po vysshej matematike dlja jekonomistov: Uchebnoe posobie / Pod red. V.I. Ermakova. M.: INFRA-M, 2005.
6. Kravchuk S.P., Kravchuk I.S., Shved E.V. Jekstremumy v sisteme linejnyh neravenstv s dvumja peremennymi. SPb.: Sovremennye aspekty jekonomiki, 2010. no. 6 (154).
7. Kravchuk S.P., Kravchuk I.S., Tatarnikov O.V., Shved E.V. Metod neravenstv v zadachah linejnogo programirovanija// Fundamentalnye issledovanija. 2014. no. 3–1. pp. 148–153.