

УДК 519.6:532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛОВОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЛН НА ОПОРЫ НАДВОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

¹Сухинов А.И., ²Никитина А.В., ³Фоменко Н.А., ⁴Тимофеева Е.Ф., ⁵Проценко С.В.

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, e-mail: cheese_05@mail.ru;

²Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева, Южный федеральный университет, Таганрог, e-mail: nikitina.vm@gmail.com;

³Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, e-mail: fomenko.nata.alex@gmail.com;

⁴Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, e-mail: teflena@mail.ru;

⁵Таганрогский педагогический институт имени А.П. Чехова, Ростовский государственный экономический университет (РИНХ), Таганрог, e-mail: eaprosrab55555@rambler.ru

Работа посвящена разработке математической модели волновых процессов, учитывающей гидродинамическое воздействие на различные надводные береговые сооружения при наличии поверхностных волн в мелководных водоемах. Проведен натурный эксперимент по измерению различных параметров распространения волны на мелководье. Разработана двумерная модель волновых гидродинамических процессов, описывающая поведение водной среды как в случае наличия надводной конструкции, установленной на дне водоема, так и в случае его отсутствия. На основе построенных алгоритмов разработан комплекс программ, предназначенный для моделирования распространения волновых гидродинамических процессов. Комплекс позволяет задавать форму и интенсивность источника колебаний, геометрию надводного объекта, а также учитывает затопления и осушения прибрежных участков.

Ключевые слова: волны, мелкая вода, затопления, надводные сооружения, силовое воздействие

MODELING OF POWER WAVE HYDRODYNAMIC FORCES ON THE SUPPORT STRUCTURES ABOVE WATER

¹Sukhinov A.I., ²Nikitina A.V., ³Fomenko N.A., ⁴Timofeeva E.F., ⁵Protsenko S.V.

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don, e-mail: cheese_05@mail.ru;

²Kalyaev Scientific Research Institute of Multiprocessor Computer Systems, Southern Federal University, Taganrog, e-mail: nikitina.vm@gmail.com;

³Bauman Moscow State Technical University, Moscow, e-mail: fomenko.nata.alex@gmail.com;

⁴North-Caucasus Federal University, Stavropol, e-mail: teflena@mail.ru;

⁵Chekhov Taganrog Pedagogical Institute, Rostov State University of Economics, Taganrog, e-mail: eaprosrab55555@rambler.ru

The work is dedicated to the development of a mathematical model of wave processes, taking into account the hydrodynamic effects on various surface onshore facilities in the presence of surface waves in shallow waters. Full-scale experiment to measure various parameters of wave propagation in shallow water. On the basis of experimental data, the values of the spectrum function of elevation level of the water environment. A two-dimensional model of the wave hydrodynamic processes describing the behavior of the aquatic environment in case of emergent design, mounted on the bottom of the reservoir, and in the case of his absence. On the basis of these algorithms developed a program designed to simulate the propagation of wave hydrodynamic processes. Built complex program allows you to set the shape and the intensity of the vibrations of surface geometry of the object, as well as take into account the flooding and drainage of coastal areas. Based on the developed software calculated the force action of waves on structures having support at the bottom of the pond.

Keywords: waves, shallow water, flooding, surface structures, force action

В результате сложного взаимодействия волн с рельефом дна, береговой линией и различными объектами наблюдается их рефракция, дифракция и изменения структуры береговой зоны. Возникает необходимость в построении математических моделей, учитывающих особенности рельефа дна прибрежной акватории и наличие надводных сооружений. Не приуменьшая целесообразности использования трехмерных моделей волновых гидродинамических процессов [8–11], следует подчеркнуть

важность разработки двумерных моделей гидродинамики при исследовании воздействия волн на надводные объекты, на основе данных моделей при приемлемой точности можно производить оперативные численные расчеты, при условии ограниченности вычислительных ресурсов. Полученные численные результаты распространения гидродинамических колебаний позволят провести оценку воздействия волн на объекты, находящиеся в прибрежной зоне мелководных водоемов.

Постановка задачи волновой гидродинамики

Для построения двумерной математической модели движения водной среды использовалась трехмерная гидростатическая модель. Исходными уравнениями гидродинамики являются:

– система уравнений Навье – Стокса

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta u'_z)'_z; \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\eta v'_z)'_z; \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0; \quad (2)$$

– уравнение гидростатики

$$P = \rho g(z + \xi). \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) рассматривается при следующих граничных условиях: на дне условие непроницаемости и трения [2–5]

$$\rho_v \eta u'_n = \tau_{x,b}(t); \quad \rho_v \eta v'_n = \tau_{y,b}(t); \quad V_n = 0,$$

на поверхности задается подъем уровня и ветровые напряжения

$$\rho \eta u'_n = -\tau_{x,p}(t); \quad \rho \eta v'_n = -\tau_{y,p}(t); \quad w = -\xi'_t,$$

на боковых границах условие скольжения без трения

$$u'_n = 0; \quad v'_n = 0; \quad \xi'_n = 0,$$

где ξ – функция подъема уровня (функция возвышения); $V = \{u, v, w\}$ – вектор скорости движения водной среды; P – давление; μ, η – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтальному и вертикальному направлениям соответственно; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; τ_x, τ_y – тангенциальное напряжение на дне жидкости.

Уравнение расчета давления в гидростатическом приближении при наличии надводной конструкции, установленной на дне водоема:

$$P = \rho g(z + \chi) + P_g = \rho g(z + \chi + P_g / \rho g).$$

Доопределим функцию возвышения в случае наличия на поверхности надводного тела:

$$\xi = \chi + P_g / \rho g,$$

где χ – функция, описывающая геометрию дна надводного тела.

В уравнение неразрывности (2) в гидростатическом случае запишем в виде

$$\theta'_t + (Hu)'_x + (Hv)'_y = 0, \quad (4)$$

где $\theta = \min(\chi, \xi)$; $H = h + \theta$; h – глубина водоема.

Система уравнений (1) с учетом гидростатического приближения в двумерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} Hu'_t + Huu'_x + Hvv'_y &= -gH\xi'_x + \\ &+ (H\mu u'_x)'_x + (H\mu v'_y)'_y + (\tau_{x,p} - \tau_{x,b}) / \rho; \\ Hv'_t + Huv'_x + Hvv'_y &= -gH\xi'_y + \\ &+ (H\mu v'_x)'_x + (H\mu v'_y)'_y + (\tau_{y,p} - \tau_{y,b}) / \rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Предложенная двумерная модель волновых гидродинамических процессов описывает поведение водной среды как в случае наличия надводной конструкции, установленной на дне водоема, так и в случае ее отсутствия.

Дискретная модель гидродинамики

Область моделирования вписана в прямоугольник и покрыта равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\omega_t = \{t^n = nh_t, \quad 0 \leq n \leq N_t - 1, \quad l_t = h_t(N_t - 1)\};$$

$$\omega_x = \{x_i = ih_x, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad l_x = h_x(N_x - 1)\};$$

$$\omega_y = \{y_j = jh_y, \quad 0 \leq j \leq N_y - 1, \quad l_y = h_y(N_y - 1)\},$$

где n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; l_t, l_x, l_y – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Расчетные ячейки представляют собой прямоугольники, они могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми [11]. Поле скоростей и давление

рассчитываются в вершинах ячейки. Центры ячеек и узлы разнесены на $h_x/2$ и $h_y/2$ по координатам x и y соответственно. Обозначим через $o_{i,j}$ «заполненность» ячейки (i, j) . Вершинами ячейки (i, j) являются узлы (i, j) , $(i-1, j)$, $(i, j-1)$, $(i-1, j-1)$. Вводятся коэффициенты q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 , описывающие «заполненность» областей, находящихся в окрестности ячейки. Коэффициенты q_m можно вычислить по формулам

$$(q_m)_{i,j} = \frac{S_{D_m}}{S_{\Omega_m}};$$

$$(q_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4};$$

$$(q_1)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2}; \quad (q_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2};$$

$$(q_3)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2};$$

$$(q_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2}. \quad (6)$$

Рассмотрим двумерную модель движения водной среды, представленную уравнениями (4), (5). Воспользуемся схемами расщепления по физическим процессам [1–4] для системы (5). При этом решения задачи находим вначале на некоем промежуточном временном слое:

$$H \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{h_t} + H u u'_x + H v u'_y = (H \mu u'_x)'_x + (H \mu u'_y)'_y + (\tau_{x,p} - \tau_{x,b})/\rho;$$

$$H \frac{v^{n+\sigma} - v^n}{h_t} + H u v'_x + H v v'_y = (H \mu v'_x)'_x + (H \mu v'_y)'_y + (\tau_{y,p} - \tau_{y,b})/\rho, \quad (7)$$

затем на следующем временном слое

$$H \frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{h_t} = -g H \xi'_x; \quad H \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{h_t} = -g H \xi'_y. \quad (8)$$

Для решения задачи (8) вычислим функцию возвышения уровня, дифференцируя первое уравнение системы по переменной x , второе по переменной y , сложив их, имеем

$$\frac{(H u^{n+1})'_x - (H u^{n+\sigma})'_x}{h_t} + \frac{(H v^{n+1})'_y - (H v^{n+\sigma})'_y}{h_t} = -g (H \xi'_x)'_x - g (H \xi'_y)'_y.$$

Полученное выражение с учетом уравнения неразрывности примет вид

$$\theta'_t - h_t (H \xi'_x)'_x - h_t (H \xi'_y)'_y = -g (H u^{n+\sigma})'_x - g (H v^{n+\sigma})'_y. \quad (9)$$

Дискретные аналоги операторов конвективного $u c'_x$ и диффузионного $(\mu c'_x)'_x$ переноса, учитывающие частичную заполненность ячеек, в случае граничных условий третьего рода $c'_n(x, y, z, t) = \alpha_n c + \beta_n$ запишем в следующем виде:

$$(q_0)_{i,j} u c'_x \approx (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x};$$

$$(q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x \approx (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.$$

Полученные сеточные уравнения решены на основе адаптивного модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода вариационного типа [4, 6, 7].

Измерение параметров волновых процессов на основе натуральных наблюдений

Проведен натуральный эксперимент по измерению различных параметров распространения волны на мелководье. На основе экспериментальных данных получены значения спектра функции возвышения уровня водной среды. Для обработки результатов натуральных измерений использован тригонометрический интерполяционный полином. Расчет коэффициентов ряда Фурье выполнен согласно выражению

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x_n e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \right),$$

где $[x_n]$ – заданная последовательность чисел с постоянным шагом дискретизации размерности N .

С учетом обозначений: $a = \text{Re}x$, $b = \text{Im}x$, тригонометрическая функция, проходящая через точки $\{n, x_n\}$, примет вид

$$\xi(t) = \frac{1}{N} \left[a_0 + a_{N/2} \cos(\pi t) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi t n}{N}\right) - b_n \sin\left(\frac{2\pi t n}{N}\right) \right) \right].$$

На рис. 1 точками отмечены значения спектра волны, линиями представлены функции, распределенные по нормальному и логнормальному законам и имеющие математические ожидания и дисперсии, соответствующие реальным натурным данным.

На рис. 2 красным представлена функция, распределенная по логнормальному закону, синим – функция, распределенная по нормальному закону, черным – реальные натурные значения функции возвышения уровня.

В таблице приведены значения глубин, на которых проводились измерения, а также значения периода волны, средняя и максимальная высота волны, дисперсии функции возвышения уровня, зависящей от глубины, а также значение коэффициентов корреляции с нормальным и логнормальным распределениями.

Волновые процессы по большей части можно описать тремя величинами: математическим ожиданием (период волны), дисперсией и амплитудой нормального или логнормального распределения компонент спектра. Эти величины получены при обработке данных натурального эксперимента и используются в качестве граничных условий для математических моделей волновых гидродинамических процессов.

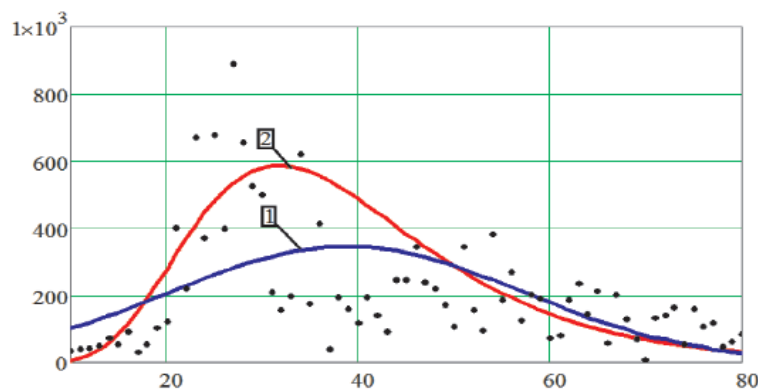


Рис. 1. Спектр функции возвышения уровня:
1 – нормальное распределение; 2 – логнормальное распределение

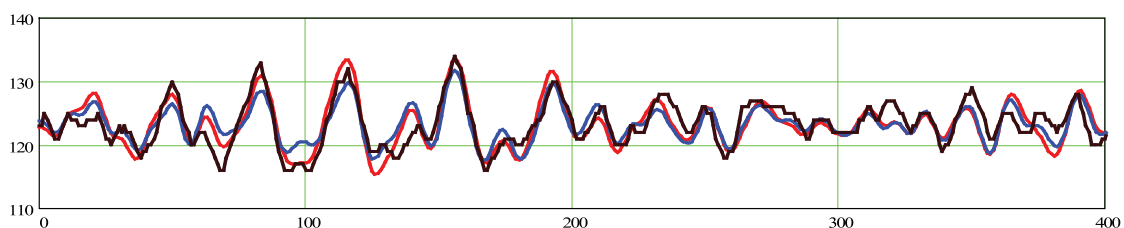


Рис. 2. Сопоставление результатов измерений с нормальным и логнормальным распределением

№ п/п	Глубина, см	Период волны, с	Средняя высота волны, см	Максимальное значение высоты волны, см	Дисперсия функции возвышения уровня	Корреляция с нормальным распределением	Корреляция с логнормальным распределением
1	12,734	3,181	1,434	3,266	3,384	0,67622403	0,72818161
2	21,657	3,187	2,216	5,127	2,875	0,71970734	0,75497854
3	34,296	3,257	2,673	6,673	2,587	0,76756352	0,80809736
4	47,696	3,208	2,903	7,278	2,373	0,80434285	0,81516631
5	50,221	3,238	3,408	8,779	2,465	0,80072646	0,82234947
6	56,95	3,323	3,423	10,05	2,539	0,82520735	0,83499856
7	58,256	3,094	3,538	13,742	2,468	0,70451786	0,75010325
8	75,284	3,482	3,595	12,716	2,317	0,80464887	0,82816629
9	83,353	3,056	4,472	14,647	2,498	0,7677805	0,80442466
10	123,251	3,23	4,671	15,749	2,327	0,78716382	0,82809779

Результаты численных экспериментов

Разработан комплекс программ, предназначенный для моделирования распространения волновых гидродинамических процессов, который позволяет задавать форму и интенсивность источника колебаний, а также геометрию надводного объекта. Результаты численных экспериментов по моделированию распространения волновых гидродинамических процессов при обтекании надводного тела водной средой с учетом геометрии дна объекта, находящегося в жидкости, и дна водоема приведены на рис. 3.

В качестве примера практического использования проблемно-ориентированного комплекса программ решается задача расчета гидродинамического воздействия волн опоры на сооружения. Размеры надводной конструкции: ширина 5 м, длина 10 м, глубина погружения 20 см. Конструкция установлена на дне водоема при помощи шести опор. Выделенный участок моделирования имеет размеры 50 на 50 м

и глубину 1 м. Источник возмущений задается на некотором расстоянии от надводного объекта. В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя. Требуется определить последующее движение водной среды при наличии на поверхности надводного объекта и силовые гидродинамические нагрузки на опоры сооружения. Для решения поставленной задачи использована сетка размерами 100×100 , шаг по времени равен 0,01 с.

Рисунки иллюстрируют, что при распространении плоской волны, которая встречает препятствие в виде надводного тела, происходит отражение волновых колебаний от неподвижного объекта, что в свою очередь приводит к изменению профиля волны. Источник колебаний распределен по левой границе и имеет синусоидальную форму. Разработанный программный комплекс при моделировании распространения поверхностных колебаний учитывает выход волны на берег (рис. 5).

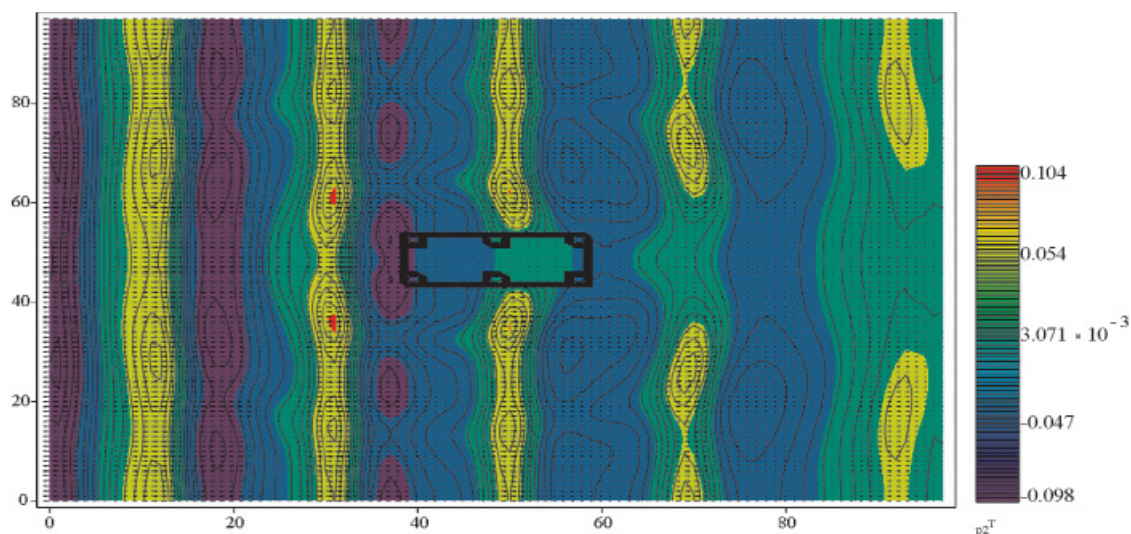


Рис. 3. Движение водной среды

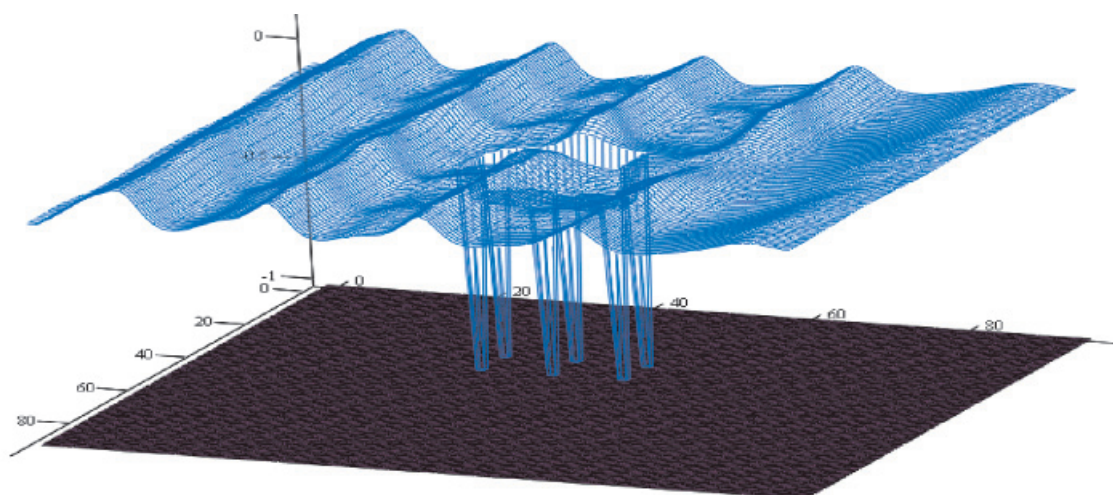


Рис. 4. Функция возвышения уровня при обтекании водной средой надводного тела, имеющего опору

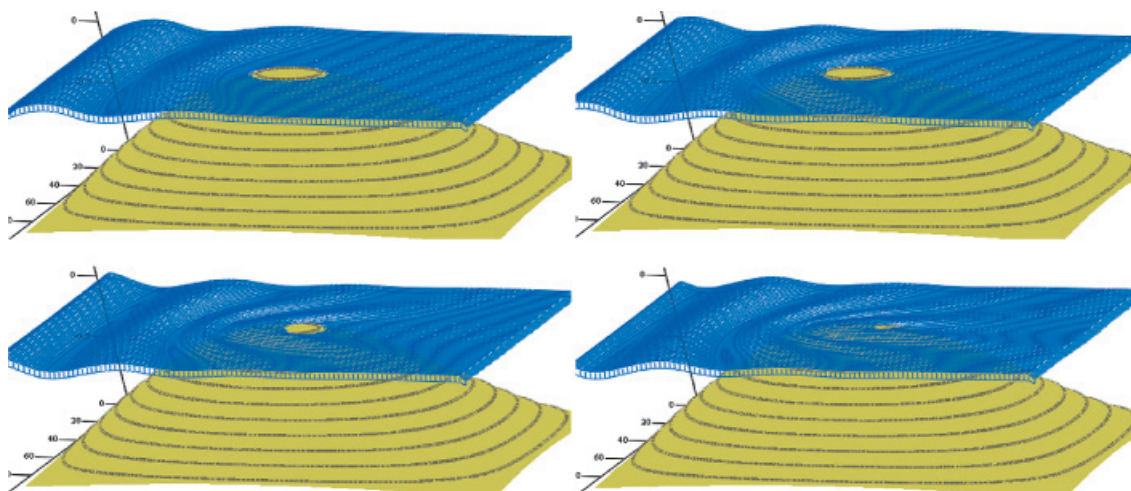


Рис. 5. Результаты расчета по распространению волновых колебаний

Заключение

Работа посвящена разработке двумерной модели, учитывающей гидродинамическое воздействие на различные надводные береговые сооружения при наличии поверхностных волн в мелководных водоемах. На основе экспериментальных данных получены значения спектра функции возвышения уровня водной среды. Из результатов экспериментальных наблюдений по изучению волновых процессов сделан вывод о том, что колебания поверхности водной среды могут быть описаны тремя величинами: математическим ожиданием, дисперсией и амплитудой нормального или логнормального распределения компонент спектра.

Результаты численных экспериментов по моделированию распространения гидродинамических волновых процессов дают возможность провести оценку воздействия волн на сооружения, имеющие опору на дне водоема.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 16-37-00129, № 15-07-08626, № 15-01-08619.

Список литературы

1. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – № 15:1 – С. 197–207.
2. Васильев В.С., Сушинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17–34.

3. Гущин В.А., Матюшин П.В. Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 2. – С. 268–281.

4. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – 43:3. – С. 552–572.

5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

6. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1, – С. 3–20.

8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2012. – Т.13. – С. 290–297.

9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3–21.

10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15. – С. 610–620.

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишени А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32–44.

References

1. Belotserkovskiy O.M., Gushhin V.A., Schennikov V.V. *Metod rasshhepleniya v primenenii k resheniyu zadach di-*

namiki vyazkoy neszimaemoy zhidkosti. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1975, Vol. 15, no. 1, pp. 197–207.

2. Vasilev V.S., Sukhinov A.I. *Pretsizionnye dvumernye modeli melkikh vodoemov*. Mathematical modeling, 2003, Vol. 15, no. 10, pp. 17–34.

3. Gushhin V.A., Matyushin P.V. *Matematicheskoe modelirovanie i vizualizatsiya transformatsii vikhrevoi struktury tekheniya okolo sfery pri uvelichenii stepeni stratifikatsii zhidkosti*. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, Vol. 51, no. 2, pp. 268–281.

4. Konovalov A.N. *K teorii poperemennno-treugolnogo iteratsionnogo metoda*. Siberian Mathematical Journal, 2002, Vol. 43, no. 3, pp. 552–572.

5. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes] Moscow, Nauka, 1989. 616 p.

6. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods for solving grid equations] Moscow, Nauka, 1978. 592 p.

7. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. *Adaptive modified alternating-triangular iterative method for solving grid equations with selfadjoint operator*. Mathematical modeling, 2012, Vol. 24, no. 1, pp. 3–20.

8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. *Parallel implementation of the three-dimensional model of the hydrodynamics of shallow reservoirs in the supercomputing system*. Computational Methods and Programming: New computing technologies, 2012, Vol. 13, pp. 290–297.

9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Alekseenko E.V. *Numerical solution of three-dimensional hydrodynamic model for shallow water basins on supercomputing system*. Mathematical modeling, 2011, Vol. 23, no. 3, pp. 3–21.

10. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. *Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnykh vodnykh sistemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme*. Vychislitelnye metody i programmirovaniye, 2014, Vol. 15, pp. 610–620.

11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Timofeeva E.F., Shisheniya A.V. *Mathematical model of the coastal wave processes*. Mathematical modeling, 2012, Vol. 24, no. 8, pp. 32–44.