

УДК 621.313

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕПОДВИЖНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

**Огарков Е.М., Ключников А.Т., Коротаев А.Д., Чирков Д.А.**

*ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ)», Пермь, e-mail: chirkov146@mail.ru*

Рассмотрены особенности получения уравнений электромагнитного поля с помощью векторного потенциала. Они связаны с граничным условием, что в электропроводящих средах в общем случае принимать значение  $\text{div } \vec{A} = 0$  нельзя, кроме некоторых частных случаев. При решении двухмерных и трехмерных задач по расчету электромагнитного поля, когда векторный потенциал имеет две или три составляющих, скалярный потенциал не может быть равен нулю. В ряде частных случаев скалярный потенциал можно положить равным нулю. При этом расчет электромагнитного поля сводится к определению векторного потенциала, на который должно быть наложено условие  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Такое упрощение становится возможным, если векторный потенциал имеет только одну составляющую, направленную вдоль одной из координатных осей. Причем его величина от этой координаты не зависит. Правомочность такого подхода к решению задачи подтверждается исследованиями электромагнитного поля на базе одномерных моделей электрических машин с электропроводящей средой, имеющей неограниченные размеры.

**Ключевые слова:** уравнения электромагнитного поля, векторный потенциал, скалярный потенциал, калибровка (нормировка) потенциалов

## CALCULATING ELECTROMAGNETIC FIELD IN A MOTIONLESS ELECTRICAL CONDUCTING ISOTROPIC MEDIUM

**Ogarkov E.M., Klyuchnikov A.T., Korotaev A.D., Chirkov D.A.**

*Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Perm National Research Polytechnic University (PNRPU), Perm, e-mail: chirkov146@mail.ru*

The features obtain the equations of the electromagnetic field by a vector potential. They are connected with the boundary condition that in the conductive environment have a  $\text{div } \vec{A} = 0$  is impossible, except some special cases. In real conditions the vector potential of the electromagnetic field has three components, directed along the axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in a Cartesian coordinate system. At the decision of two- and three-dimensional problems for the calculation of the electromagnetic field when the vector potential has two or three components, the scalar potential cannot be zero. In some special cases, the scalar potential can be set equal to zero. The calculation of the electromagnetic field is reduced to the determination of the vector potential, which should be imposed condition  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Such simplification is possible if the vector potential has only one component directed along one of the coordinate axes. Moreover, the magnitude of this position is independent. The validity of this approach to the problem is confirmed by studies of electromagnetic fields on the basis of one-dimensional models of electric motor with an electrically conductive medium having unlimited size.

**Keywords:** electromagnetic field equations, vector potential, scalar potential, calibration (normalization) potentials

Под электромагнитным полем понимают особый вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей [1].

Бегущее электромагнитное поле используется во многих электрических машинах и электромагнитных устройствах. При воздействии этого поля на проводящую среду в ней индуцируются токи и возникает тяговое усилие, направленное по направлению движения бегущего поля. На использовании электромагнитного поля основан принцип действия электрических машин как вращательного, так и возвратно-поступательного действия.

В Пермском национальном исследовательском политехническом университете (ПНИПУ) в течение ряда лет проводились

инициативные научно-исследовательские работы по созданию и разработке вентильных линейных двигателей возвратно-поступательного движения с постоянными магнитами. Результаты этих исследований легли в основу проекта, выполненного авторами настоящей статьи в рамках работ по Постановлению Правительства РФ № 218 (договор № 02.G25.310068 от 23.05.2013 г.). В результате создан опытный образец цилиндрического линейного вентильного двигателя возвратно-поступательного движения (ЦЛВД). Разработанный образец ЦЛВД предназначен для создания электропривода нового поколения для нефтедобычи как на существующих средне- и низкодебитных скважинах, так и для сверхглубоких скважин. ЦЛВД опускается в скважину и получает пита-

ние с помощью плоского армированного кабеля от электронного коммутатора, расположенного на поверхности земли рядом с устьем скважины. ЦЛВД в скважине создаёт возвратно-поступательное движение плунжерного насоса при управлении преобразователя от микропроцессорной системы, которая осуществляет необходимое число качаний и длину хода плунжера [4].

На основе разработанного ЦЛВД авторы статьи предполагают создать нефтяное оборудование нового поколения – погружной бесштанговый электронасосный агрегат возвратно-поступательного действия (ПБЭНА) с числовым программным управлением, который предназначен для замены традиционных станков-качалок, имеющих сегодня целый ряд принципиальных недостатков и не удовлетворяют требованиям перспектив развития нефтедобывающей отрасли. Например, глубина спуска плунжерного насоса станков-качалок не должна превышать 2000 метров из-за возможности обрыва штанг.

Создание ПБЭНА, позволяющего устранить недостатки традиционных станков-качалок (например, он может использоваться для скважин глубиной от 2000 м и более, выгодно и удобно добывать нефть в глубоких, наклонных, горизонтальных скважинах, а также малодобитных скважинах, на отмелях и морских нефтепромыслах), поэтому создание ЦЛВД является весьма важной научной и технической задачей, от решения которой зависит эффективность откачки пластовой жидкости на нефтепромыслах. В результате использования электропривода на основе ЦЛВД становится возможным дополнительно решить столетнюю сопутствующую проблему по клинообразному износу труб и штанг на станках-качалках, что серьезно осложняет ситуацию с нефтедобычей во всем мире. Кроме того, улучшится добыча «сложной» нефти.

Разработка ЦЛВД потребовала проведения достаточно глубоких научных исследований, создания опытных образцов и привела к необходимости разработки принципиально новых конструкций электропривода и созданию соответствующих научно обоснованных методик.

В настоящей статье рассматривается расчет электромагнитного поля, который использовался при разработке электропривода нового поколения на основе ЦЛВД для добычи нефти.

### Расчет электромагнитного поля

В большинстве практических случаев решение конкретных задач расчета электро-

магнитного поля удобнее производить с помощью векторного потенциала магнитного поля  $\vec{A}$  и скалярного потенциала электрического поля  $\varphi$ .

Эти потенциалы полностью характеризуют электромагнитное поле и после их определения расчет значений магнитной индукции  $\vec{B}$ , напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  и плотности индуцированного тока  $\vec{J}$  во всех точках среды не представляет особых трудностей.

В настоящее время универсальная система дифференциальных уравнений для расчёта поля с помощью потенциалов  $A$  и  $\varphi$  в электропроводящих средах отсутствует. Такое положение в значительной степени объясняется неоднозначностью понятия самого векторного потенциала. Действительно, магнитное поле в каждой точке среды полностью определяется векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ , которые могут быть определены бесчисленным множеством взаимосвязанных значений векторного и скалярного потенциалов.

Поэтому сложность записи системы дифференциальных уравнений и трудоёмкость их решения в большей степени зависят от выбора калибровки или нормировки потенциалов, связывающих векторный и скалярный потенциалы. Удачный выбор калибровки позволяет получить достаточно простое уравнение для решения конкретного класса задач. Неудачный выбор, наоборот, может и чрезвычайно усложнить расчёт поля или привести вообще к неразрешимости задачи [2, 5].

Расчет осуществляется на базе основных уравнений электромагнитного поля [7].

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_{\text{ст}}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}, \quad (4)$$

$$\text{div } \vec{J} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (6)$$

где  $J$  – плотность индуцированного в проводящей среде тока;

$J_{\text{ст}}$  – плотность стороннего тока, который создает электромагнитное поле;

$\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость среды.

Реальные величины  $E$  и  $B$  полностью определяют электромагнитное поле в проводящей среде. Для их нахождения очень часто используют векторный потенциал

электромагнитного поля  $\bar{A}$ . Векторный потенциал это некоторая вспомогательная функция, с помощью которой очень часто бывает значительно проще определить основные величины, характеризующие электромагнитное поле. Обычно векторный потенциал подчиняют известному условию:

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A}, \quad (7)$$

это уравнение не противоречит условию (3)

$$\text{div} \bar{B} = \text{div} \text{rot} \bar{A} = 0,$$

так как дивергенция любого ротора равна нулю. Второе уравнение Максвелла (2) с учетом (7) можно записать в следующем виде:

$$\text{rot} \bar{E} = \text{rot} \left( -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right). \quad (8)$$

Так как левые и правые части уравнения (8) определяются операцией  $\text{rot}$ , то можно записать:

$$\bar{E}_{\text{вих}} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (9)$$

Данное выражение отражает вихревой характер напряженности электрического поля, которая возникает за счет изменения магнитного потока во времени. В общем случае напряженность электрического поля может иметь и потенциальную составляющую  $E_{\text{пот}} = -\text{grad} \phi$  [3]. В этом выражении  $\phi$  скалярный потенциал электромагнитного поля, а общая напряженность электрического поля в проводящей среде равна вихревой и потенциальной составляющей

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{вих}} + \bar{E}_{\text{пот}} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi. \quad (10)$$

Из векторной алгебры известно, что ротор градиента любого скаляра равен нулю т.е.  $\text{rot} \text{grad} \phi = 0$ . Поэтому выражения (9) и (10) в равной степени удовлетворяют второму уравнению Максвелла (2), что не приводит к изменению значений магнитной индукции и напряженности электрического поля. Таким образом, с помощью уравнений (7) и (9) потенциалы поля могут быть определены только с точностью до градиента некоторого произвольного скаляра  $\phi$ . Инвариантность поля по отношению к этому классу преобразований его потенциалов называют калибровочной или градиентной инвариантностью [6]. То есть уравнение (2) может иметь бесконечное множество решений для определения  $E$  и  $B$ .

Для устранения указанной неопределенности при нахождении потенциалов их следует подчинять дополнительному условию,

задаваемому специальной калибровкой или нормировкой потенциалов и однозначно определить значения  $E$  и  $B$  [6].

Плотность тока в проводящей среде согласно закону Ома в дифференциальной форме с учётом (10) можно представить в виде

$$\bar{J} = \gamma \bar{E} = -\gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad} \phi,$$

где  $\gamma$  – электропроводность проводящей среды.

Калибровка потенциалов может быть получена на основании первого уравнения Максвелла (1) с учетом (6) и (7).

$$\text{rot} \text{rot} \bar{A} = \mu \bar{J} + \mu \bar{J}_{\text{ст}}. \quad (11)$$

На основании (4) и (10) уравнение (11) запишем в следующем виде:

$$\text{rot} \text{rot} \bar{A} = -\mu \gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \mu \gamma \text{grad} \phi + \mu \bar{J}_{\text{ст}}. \quad (12)$$

Согласно векторному анализу можем записать

$$\text{rot} \text{rot} \bar{A} = \text{grad} \text{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}. \quad (13)$$

Поэтому уравнение (12) с учетом (13) запишем следующим образом:

$$\text{grad}(\text{div} \bar{A} + \mu \gamma \phi) - \nabla^2 \bar{A} + \mu \gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \mu \bar{J}_{\text{ст}}. \quad (14)$$

Так как величины  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$  могут быть теоретически определены бесчисленным множеством взаимосвязанных значений  $A$  и  $\phi$ , т.е. значение  $\phi$  можно определять по произволу и все это должно удовлетворять уравнениям (8) и (12). Поэтому для того чтобы упростить уравнение (14) и связать однозначно  $\bar{A}$  и  $\phi$ , калибровку потенциалов целесообразно записать в виде

$$\text{div} \bar{A} + \mu \gamma \phi = 0,$$

откуда

$$\phi = -\frac{1}{\mu \gamma} \text{div} \bar{A}. \quad (15)$$

При введении калибровки (15) скалярный потенциал  $\phi$  из уравнения (14) исключается и устраняется неопределенность при определении  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$ , а уравнение (14) значительно упрощается

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu \gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\mu \bar{J}_{\text{ст}}. \quad (16)$$

Уравнение (16) однозначно выражается только через векторный потенциал  $A$  и после его определения значение  $\phi$  достаточно просто найти из калибровки (15).

В электропроводящих средах в общем случае принимать значение  $\text{div} \bar{A} = 0$  нель-

зя, кроме некоторых частных случаев. Это часто встречаемая ошибка при попытке получить уравнение электромагнитного поля с помощью векторного потенциала. В реальных условиях векторный потенциал электромагнитного поля имеет три составляющие, направленные по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в декартовой системе координат, поэтому калибровка (15) запишется в виде

$$\phi = -\frac{1}{\mu\gamma} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \quad (17)$$

При решении двухмерных и трехмерных задач по расчету электромагнитного поля, когда векторный потенциал имеет две или три составляющих, скалярный потенциал  $\phi$  согласно (17) не может быть равен нулю.

В ряде частных случаев скалярный потенциал  $\phi$  можно положить равным нулю. При этом расчет электромагнитного поля сводится к определению векторного потенциала  $\vec{A}$ , на который должно быть наложено условие  $\text{div} \vec{A} = 0$ . Такое упрощение становится возможным, если векторный потенциал имеет только одну составляющую, направленную вдоль одной из координатных осей. Причем его величина от этой координаты не зависит. Правомочность такого подхода к решению задачи подтверждается исследованиями электромагнитного поля на базе одномерных моделей электрических машин с электропроводящей средой, имеющих неограниченные размеры. При ограниченных размерах электропроводящей среды свободное растекание токов становится невозможным, что обуславливает появление потенциальной составляющей электрического поля

$$\vec{E}_{\text{пот}} = \text{grad} \phi.$$

Следует отметить, что в электропроводящих средах кроме калибровки потенциалов (15) теоретически возможно применить бесчисленное множество различных калибровок, но неперменным условием их применения должно быть значительное упрощение выражения (12) и выполнение условия  $\text{div} \vec{J} = 0$  [1].

В данной статье рассматривается расчет электромагнитного поля в изотропных неподвижных электропроводящих средах. Вопрос калибровки потенциалов поля в анизотропных средах изучен крайне недостаточно. В работе [2] рассматривается электромагнитное поле в анизотропной электропроводящей среде, неподвижной относительно системы координат. Магнитные проницаемости и электропроводности по двум координатным осям

принимаются одинаковыми. В этом случае используется калибровочное уравнение вида

$$\phi = -\frac{1}{\gamma_1} \left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{\mu_x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right),$$

где  $\gamma_1 = \gamma_y = \gamma_z$  и  $\mu_1 = \mu_y = \mu_z$ .

Для других типов анизотропии и для сред движущихся относительно системы координат, калибровочные уравнения неизвестны. Указывается только то, что можно получить систему уравнений, в каждом из которых будут содержаться производные только одной из проекций вектора. При этом уравнения имеют четвертый порядок и довольно громоздкий вид.

В общем случае для калибровки потенциалов целесообразно положить условие, заведомо справедливое во всех точках электропроводящей среды и независимое от анизотропии магнитных проницаемостей и электропроводимостей по координатным осям.

Как показали исследования, в качестве такого условия наиболее целесообразно использовать  $\text{div} \vec{J} = 0$ , которое с учетом уравнения  $\vec{J} = (\gamma)(\vec{E} + \vec{v} \cdot \vec{B})$  приводится к виду

$$\text{div} \left[ (\gamma) \left[ -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi + \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{A} \right] \right] = 0.$$

Все эти ограничительные условия значительно усложняют расчеты специальных электрических машин.

### Заключение

На основе представленной методики коллективом авторов были разработаны методы расчета электромагнитных процессов в специальных электрических машинах, в частности в ЦЛВД [8], полностью удовлетворяющие требованиям по простоте, скорости расчета и точности. Разработана также микропроцессорная система управления цилиндрическим линейным вентильным двигателем возвратно-поступательного движения [4].

*Результаты, представленные в статье, получены при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (договор № 02.G25.310068 от 23.05.2013 г. в составе мероприятия по реализации постановления Правительства РФ № 218).*

### Список литературы

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. Учебник для студентов вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1978. – 231 с.

2. Брынский Е.А., Данилевич Я.Б., Яковлев В.Н. Электромагнитное поле в электрических машинах. – Л.: Энергия, 1979. – 321 с.

3. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. – М.: АН СССР, 1948. – 728 с.

4. Коротаев А.Д., Ключников А.Т., Шутемов С.В., Байбаков М.С. Система управления цилиндрического линейного вентильного двигателя возвратно поступательного движения // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2015. – № 9. – С. 64–69.

5. Огарков Е.М. Квазитрёхмерная теория линейных асинхронных двигателей. – Пермь, ПГТУ, 2003 – 237 с.

6. Огарков Е.М., Коротаев А.Д. Поперечный эффект линейных асинхронных двигателей с учетом анизотропии вторичного элемента. // Электричество. – 1991. – № 4. – С. 36–40.

7. Тамм И.Е. Основы электричества. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

8. Шулаков Н.В., Шутемов С.В. Метод расчета электромагнитных процессов в цилиндрическом линейном вентильном двигателе // Электротехника. – 2014 – № 11. – С. 18–22.

## References

1. Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy jelectrotehniki: Jelectromagnitnoe pole. Uchebnik dlja studentov vuzov. 7-e izd., pererab. i dop. M.: Vyssh. shkola, 1978. 231 p.

2. Brynskiy E.A., Danilevich Ja.B., Jakovlev V.N. Jelectromagnitnoe pole v jelectricheskikh mashinah. L.: Jenergija, 1979 321 p.

3. Grinberg G.A. Izbrannye voprosy matematicheskoy teorii jelectricheskikh i magnitnyh javlenij. M.: AN SSSR, 1948. 728 p.

4. Korotaev A.D., Kljuchnikov A.T., Shutemov S.V., Bajbakov M.S. Sistema upravlenija cilindricheskogo linejnogo ventilnogo dvigatelja vozvratno postupatel'nogo dvizhenija // Informacionno-izmeritelnye i upravljajushhie sistemy. 2015. no. 9. pp. 64–69.

5. Ogarkov E.M. Kvazitrehmernaja teorija linejnyh asinhronnyh dvigatelej. Perm, PGU, 2003. 237 p.

6. Ogarkov E.M., Korotaev A.D. Poperechnyj jeffekt linejnyh asinhronnyh dvigatelej s uchetom anizotropii vtorichnogo jelementa. // Jelectrichestvo. 1991. no. 4. pp. 36–40.

7. Tamm I.E. Osnovy jelectrichestva. M.: Nauka, 1966. 624 p.

8. Shulakov N.V., Shutemov S.V. Metod rascheta jelectromagnitnyh processov v cilindricheskom linejnom ventilnom dvigatele // Jelectrotehnika. 2014 no. 11. pp. 18–22.