

УДК 517.977.58

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Корнюшин Ю.П.

Калужский филиал ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», Калуга, e-mail: theroland@yandex.ru

В статье рассматриваются вопросы синтеза оптимальных по быстродействию программных управлений. Рассматриваются объекты, относящиеся к классу нелинейных аффинных систем со скалярным управлением. В качестве математического аппарата используется линеаризация Ньютона – Канторовича, аппарат матричных операторов и абстрактная конечномерная L-проблема моментов М.Г. Крейна и А.А. Нудельмана. Алгоритм состоит из следующих основных этапов. 1. Линеаризация нелинейной математической модели объекта по схеме Ньютона – Канторовича. 2. Преобразование дифференциальных уравнений к форме с матричными операторами. 3. Синтез управления, согласно заданному критерию с использованием L-проблемы моментов. 4. Организация итерационного процесса, согласно схеме Ньютона – Канторовича. На 3 этапе используются методы функционального анализа, которые сводят задачу к классической вариационной задаче – максимизации системы моментных соотношений при ограничении на управление, которое рассматривается как равенство. Приводится пример иллюстрирующий метод синтеза.

Ключевые слова: синтез, оптимальный, быстродействие, нелинейный, матричный, оператор, проблема моментов

APPLICATION OF THE APPARATUS FOR THE SYNTHESIS OF MATRIX OPERATORS TIME OPTIMAL CONTROL SYSTEMS

Kornyushin Yu.P.

Kaluga branch of Federal state budgetary educational institution of higher professional education «Moscow State Technical University named after N.E. Bauman (National Research University), Kaluga, e-mail: theroland@yandex.ru

The article deals with questions the optimal synthesis by time program controls. Considered objects, belong to the class of nonlinear affine systems with scalar control. As an mathematical apparatus used linearization Newton – Kantorovich, apparatus matrix operators and finite abstract of L – moment problem M.G. Krein and A.A. Nudelman. The algorithm consists of the following stages. 1. The linearization of a nonlinear mathematical model of the object on the Newton – Kantorovich scheme. 2. Transformation of differential equations to form a matrix operators. 3. Synthesis of control, according to specified criteria using the L – moment problem. 4. Organization of the iterative process, in accordance with Newton’s – Kantorovich scheme. In step 3 using methods of functional analysis, which reduces the problem of classical variational problem – maximize system moment ratio while limiting the control, which is regarded as equality. An example is given illustrating the synthesis method.

Keywords: Synthesis, optimum, expeditious, non-linear, matrix, operator, the problem of moments

Оптимальное управление сложными нелинейными объектами имеет большой теоретический и практический интерес. В целом задача синтеза оптимальных систем управления в теоретическом плане в общем виде решена [13], однако формирование управления, например, по критерию максимального быстродействия в замкнутом виде выполнено только для объектов, математические модели которых описываются уравнениями невысокого порядка.

Основной проблемой является необходимость решения краевых задач и наличие ограничений на управление. В случае нелинейных систем – разнообразие видов нелинейностей. Универсального подхода нет. Эти особенности приводят к необходимости в каждом конкретном случае разрабатывать свой метод решения задачи. Разра-

ботано множество методов, имеющих свои достоинства и недостатки [1–3, 10, 14, 15]. Список крайне неполон. Предлагается один из возможных подходов к решению задачи. Он основан на аппарате матричных операторов.

Аппарат матричных операторов нашел свое широкое применение для решения самых различных задач при исследовании и проектировании систем управления [5–7, 11, 12]. Его применение совместно с другими методами позволяет существенно расширить круг решаемых задач. Одной из таких является задача синтеза оптимальных по быстродействию программных управлений для нелинейных объектов. Желательно иметь решение задачи в замкнутом виде, однако это не всегда возможно. Если найдено оптимальное программное управление, то задача синтеза регулятора для нелиней-

ного объекта упрощается. Она сводится, например, к задаче стабилизации движения объекта относительно программной траектории и программного управления, так называемая задача двухэтапной оптимизации [12].

В работе предлагается использовать аппарат матричных операторов совместно с абстрактной конечномерной L -проблемой моментов М.Г. Крейна и А.А. Нудельмана [8]. В работе [9] Е. Крейнндлер показал, как можно использовать положения L -проблемы моментов для синтеза оптимального по быстродействию управления для класса линейных объектов.

Применение линеаризации Ньютона – Канторовича, в продолжение развития идей Е. Крейнндлера, позволяет для нелинейных объектов также синтезировать оптимальное по быстродействию программное управление.

Постановка задачи. Задан объект, описываемый уравнением вида

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{B}(t)u(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{X}(t) \in R^n$, $u(t) \in R^1$.

Полагаем, что объект является вполне управляемым. Необходимо синтезировать скалярное управление $u(t)$, переводящее объект из заданного начального состояния $\mathbf{X}(t_0)$ в конечное состояние $\mathbf{X}(T)$ и доставляющее минимум следующему функционалу

$$J(u) = \int_{t_0}^T dt = (T - t_0) \rightarrow \min_{u(t)}. \quad (2)$$

Алгоритм синтеза

Алгоритм состоит из следующих основных этапов.

1. Линеаризация нелинейной математической модели объекта по схеме Ньютона – Канторовича.

2. Преобразование дифференциальных уравнений к форме с матричными операторами.

3. Синтез управления, согласно заданному критерию с использованием L -проблемы моментов.

4. Организация итерационного процесса, согласно схеме Ньютона – Канторовича.

Линеаризация нелинейной математической модели

Данная процедура достаточно подробно рассмотрена [6, 7, 11] и в других работах автора, посвященных задачам синтеза. Отметим лишь, что в процессе линеаризации осуществляется переход от нелинейных дифференциальных уравнений (1) к после-

довательности линеаризованных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{X}}_{k+1}(t) = \mathbf{A}^k(t)\mathbf{X}_{k+1}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) + \mathbf{D}^k(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_{k+1}(t_0) = \mathbf{X}(t_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\mathbf{A}^k(t) = \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_k(t), t),$$

$$\mathbf{D}^k(t) = \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_k(t), t) \cdot \mathbf{X}_k(t) + \mathbf{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_k(t), t). \quad (4)$$

Матрица $\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_k(t), t)$ определена следующим образом:

$$\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_k(t), t) = \{\hat{f}_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1,\overline{n}}. \quad (5)$$

Линеаризованные дифференциальные уравнения (3) имеют переменные коэффициенты. Их структура соответствует той, с которой обычно выполняется синтез управления для неавтономных объектов.

Преобразование дифференциальных уравнений к необходимой форме

Преобразование дифференциальных уравнений в форму необходимую для применения L -проблемы моментов осуществляется переходом к системе интегральных моментных соотношений и систему моментов.

Для этого перейдем от дифференциального уравнения (3) к интегральному уравнению Фредгольма 2 – рода (индекс k для краткости записи опустим):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & \int_{t_0}^T \mathbf{K}_X(t, \tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^T \mathbf{K}_U(t, \tau) u(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^T \mathbf{K}_D(t, \tau) d\tau + \mathbf{X}(t_0), \\ & t \in [t_0, T], \end{aligned} \quad (6)$$

где матричные ядра $\mathbf{K}_X(t, \tau)$, $\mathbf{K}_U(t, \tau)$, $\mathbf{K}_D(t, \tau)$ имеют вид

$$\mathbf{K}_X(t, \tau) = \{K_{ij}^X(t, \tau) = -1(t - \tau)a_{ij}(\tau)\}_{i,j=1}^n,$$

$$\mathbf{K}_U(t, \tau) = \{K_{ij}^U(t, \tau) = 1(t - \tau)b_{ij}(\tau)\}_{i=1, j=1}^{n,1},$$

$$\mathbf{K}_D(t, \tau) = \{K_i^D(t, \tau) = 1(t - \tau)d_i(\tau)\}_{i=1}^n.$$

Представим сигналы $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(t_0)$, $u(t)$ и ядра уравнения (6) $\mathbf{K}_X(t, \tau)$, $\mathbf{K}_U(t, \tau)$, $\mathbf{K}_D(t, \tau)$ в виде конечномерного разложе-

ния по заданному ортогональному базису $\Phi = \{\varphi_i(t) : i = 1, N, t \in [t_0, T]\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \cdot \hat{\mathbf{C}}^x, \quad \mathbf{X}(t_0) = \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \cdot \hat{\mathbf{C}}^0, \\ u(t) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_1(t) \cdot \hat{\mathbf{C}}^u, \\ \mathbf{K}_x(t, \tau) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \hat{\mathbf{A}}^x \overline{\mathbf{F}}_n(\tau), \\ \mathbf{K}_u(t, \tau) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \hat{\mathbf{B}}^u \mathbf{F}_1(\tau), \\ \mathbf{K}_D(t, \tau) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \hat{\mathbf{D}} \mathbf{F}_1(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{C}}^x$, $\hat{\mathbf{C}}^0$, $\hat{\mathbf{C}}^u$, $\hat{\mathbf{A}}^x$, $\hat{\mathbf{B}}^u$, $\hat{\mathbf{D}}$ – спектральные характеристики соответствующих функций, $\overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t)$, $\overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_1(t)$, $\overline{\mathbf{F}}_n(\tau)$, $\mathbf{F}_1(\tau)$ – клеточные матрицы, построенные на элементах ортогонального базиса.

Теперь можно перейти от интегральной формы описания объекта к спектральной форме

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}^x &= (\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{A}}^x)^{-1} \hat{\mathbf{B}}^u \hat{\mathbf{C}}^y + \\ &+ (\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{A}}^x)^{-1} \hat{\mathbf{D}} + (\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{A}}^x)^{-1} \hat{\mathbf{C}}^0. \end{aligned}$$

Если вновь вернуться во временную область, то имеет место следующая зависимость, связывающая управление с выходом:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \int_{t_0}^T \mathbf{W}(t, \tau) u(\tau) d\tau + \\ &+ \mathbf{D}\mathbf{D}(t) + \int_{t_0}^T \tilde{\mathbf{R}}(t, \tau) \mathbf{X}(t_0) d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t, \tau) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{F}_1(\tau), \\ \tilde{\mathbf{R}}(t, \tau) &= \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{F}_1(\tau), \quad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{B}}^u, \\ \hat{\mathbf{P}} &= (\hat{\mathbf{I}}_1 - \hat{\mathbf{A}}^x)^{-1}, \quad \mathbf{D}\mathbf{D}(t) = \overline{\mathbf{F}\mathbf{T}}_n(t) \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{D}}. \end{aligned}$$

Выражение (8) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \int_{t_0}^T \mathbf{W}(t, \tau) u(\tau) d\tau + \\ &+ \mathbf{D}\mathbf{D}(t) + \mathbf{R}(t, t_0, T) \mathbf{X}(t_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\mathbf{R}(t, t_0, T) = \int_{t_0}^T \tilde{\mathbf{R}}(t, \tau) d\tau.$$

Полагая $t = T$, получаем систему моментных соотношений

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \mathbf{W}(t, \tau) u(\tau) d\tau &= \mathbf{X}(T) - \\ &- \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T) \mathbf{X}(t_0). \end{aligned} \quad (10)$$

В зависимости (10) $\mathbf{W}(t, \tau)$ – системой моментных функций, $\mathbf{X}(T) - \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T) \mathbf{X}(t_0)$ – система моментов.

Синтез управления

Управление оптимальное $u(t)$ по критерию (2) всегда ограничено. Это может быть ограничение по величине $|u(t)| \leq C$,

по энергии $\int_{t_0}^T |u(\tau)|^2 d\tau \leq C_2^2$ или по площади

ди $\int_{t_0}^T |u(\tau)| d\tau \leq C_1$. Все они объединяются

одним выражением

$$\left(\int_{t_0}^T |u(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (11)$$

При $p = \infty$ и $q = 1$ имеет место ограничение управления по величине.

Левая часть неравенства (11) есть норма $u(t)$ в пространстве L_p . Поэтому при синтезе управления можно воспользоваться методами функционального анализа. В [9] отмечается, что «управление будет оптимальным только в случае, если оно удовлетворяет неравенству (11) со знаком равенства». Кроме того для оптимальности управления необходимо и достаточно, чтобы оно максимизировало следующее выражение

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \Lambda \cdot \mathbf{W}(t, \tau) u(\tau) d\tau &= \\ &= \Lambda \cdot (\mathbf{X}(T) - \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T) \mathbf{X}(t_0)), \end{aligned} \quad (12)$$

при некотором ненулевом векторе Λ .

Как видим, имеет место классическая вариационная задача – максимизация выражения (13) при ограничении (12), которое рассматривается, как равенство. Решение задачи известно – [11, 18]. Оптимальное управление определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \frac{C_p |\Lambda \cdot \mathbf{W}(T, t)|^{q-1} \text{sign}(\Lambda \cdot \mathbf{W}(T, t))}{\left(\int_{t_0}^T |\Lambda \cdot \mathbf{W}(T, \tau)|^q d\tau \right)^{(q-1)/q}}, \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} &= 1, \quad 1 < p \leq \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

При условии

$$\max_{\Lambda} \frac{\Lambda \cdot (\mathbf{X}(T) - \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T)\mathbf{X}(t_0))}{\int_{t_0}^T \Lambda \cdot \mathbf{W}(T, \tau) u(\tau, \Lambda, T, C_p) d\tau} = 1. \quad (14)$$

Как видим из (13), оптимальное управление является функцией времени и зависит от значений элементов ненулевого вектора – Λ , минимального времени – T и величины ограничения – C_p : $u = u(t, \Lambda, T, C_p)$.

Для значений $p = \infty$ и $q = 1$ имеет место известный результат [8, 13]

$$u^*(t) = C \cdot \text{sign}(\Lambda \cdot \mathbf{W}(T, t)). \quad (15)$$

С учетом вида управления (15), условие (14) становится следующим:

$$\max_{\Lambda} \frac{\Lambda \cdot (\mathbf{X}(T) - \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T)\mathbf{X}(t_0))}{\int_{t_0}^T |\Lambda \cdot \mathbf{W}(T, \tau)| d\tau} = \frac{1}{C}. \quad (16)$$

Если длину вектора Λ выбрать произвольно, например, так, чтобы

$$\Lambda \cdot (\mathbf{X}(T) - \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T)\mathbf{X}(t_0)) = 1, \quad (17)$$

то условие (17) упрощается:

$$\min_{\Lambda} \left(\int_{t_0}^T |\Lambda \cdot \mathbf{W}(T, \tau)| d\tau \right) = C. \quad (18)$$

Выражение (18) есть решение поставленной задачи на максимальное быстрое действие.

Наименьшее T , которое удовлетворяет данному уравнению для заданного значения C при условии (17) есть искомое минимальное время для текущего шага итерационного процесса.

Организация итерационного процесса

Линеаризация по схеме Ньютона – Канторовича предполагает организацию итерационного процесса по уточнению решения уравнения (3) до тех пор, пока решение линеаризованного уравнения не будет близко к решению исходного нелинейного уравнения. Как правило, начальные приближения выбираются исходя из некоторых практических соображений, например, при решении данной задачи в качестве них можно использовать начальные состояния, из которых переводится объект. На текущем шаге итерационного процесса находится система моментных функций – $\mathbf{W}(t, \tau)$ и система моментов – $\mathbf{X}(T) - \mathbf{D}\mathbf{D}(T) - \mathbf{R}(t_0, T)\mathbf{X}(t_0)$ (смотри систему моментных соотношений (10)), находится оптимальное время управле-

ния T , удовлетворяющее уравнению (18) и искомое управление $u(t)$. Найденному управлению соответствует своя фазовая траектория, являющаяся основой для следующего шага итерационного процесса. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока с заданной точностью не будет выполнено ограничение на управление и не будет меняться время управления T .

Пример. Объект управления описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{B}u(t),$$

$$\text{где } \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -3x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется синтезировать управление, переводящее объект из начального состояния $\mathbf{X}(0) = [1 \ 2]^T$ в конечное состояние $\mathbf{X}(T) = [3 \ 6]^T$ за минимальное время при ограничении на управление $|u(t)| \leq 42,5$.

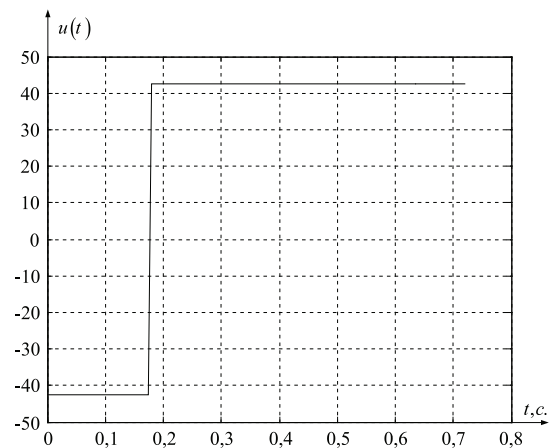


Рис. 1. Управление $u(t)$

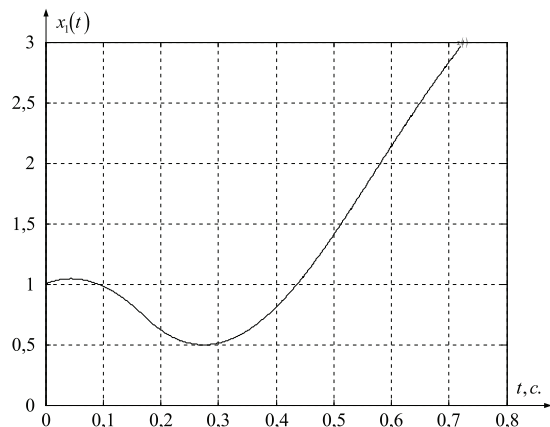


Рис. 2. Изменение координаты $x_1(t)$

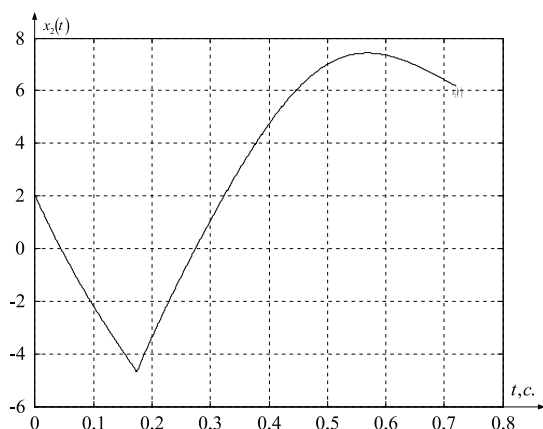


Рис. 3. Изменение координаты $x_2(t)$

Начальные приближения $x_1(t)=1(t)$, $x_2(t)=1(t)$. Найденное время управления $T=0,7216256$ с. Полученное конечное состояние: $X(T)=[2,97193 \ 6,21338]^T$. Ограничение на управление: $\max(u(t))=42,494708$. Данная точность получена за 4 итерации.

На рис. 1 показан график изменения управления; на рис. 2–3 графики изменения фазовых координат. На рис. 2–3 точками показаны точные конечные значения фазовых координат.

Заключение

Предложен на взгляд автора, достаточный по эффективности и конструктивности метод синтеза оптимальных по быстродействию программных управлений для нелинейных объектов. Приведенный пример свидетельствует о том, что управление является ограниченным и обеспечивает перевод объекта из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за минимальное время.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (грант № 16-41-400701).

Список литературы

1. Александров В.М. Оптимальное по быстродействию управление в реальном времени линейными системами с возмущениями // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, вып. 3. – С. 3–25; URL: <http://www.nsu.ru/xmlui/bitstream/handle/nsu/2702/01.pdf> (дата обращения: 26.11.2016).
2. Ибрагимов Д. Н. Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Труды МАИ. – 2015. – Выпуск № 83. – С. 1–31; URL: http://www.mai.ru/upload/iblock/bf3/ibragimov_rus.pdf (дата обращения: 26.11.2016).
3. Карагодин В.В., Горин В.А., Вишняков Е.П. Математические основы построения оптимального по быстродействию управления возбуждением синхронного генератора // Вопросы электромеханики. – 2013. – Т. 134. – С. 3–8.

4. Корнюшин Ю.П., Мельников Д.В. Концепция синтеза регуляторов следящих систем для класса нелинейных объектов управления на основе метода матричных операторов. // Автоматика. – 2008. – Т. 15. – С. 268.

5. Корнюшин Ю.П., Егупов Н.Д., Корнюшин П.Ю. Идентификация нелинейных объектов и систем управления с использованием аппарата матричных операторов // Электронное научно-техническое издание. Инженерный журнал: наука и инновации. – 2014. – № 6 (30). – С. 1–14; URL: <http://engjournal.ru/articles/1315/1315.pdf> (дата обращения: 26.11.2016).

6. Корнюшин Ю.П., Мельников Д.В., Егупов Н.Д., Корнюшин П.Ю. Синтез дополнительного регулятора для стабилизации угловой скорости ротора паровой турбины. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2015. – № 5 (62). – С. 100–112.

7. Корнюшин Ю.П., Егупов Н.Д., Акименко Д.А., Корнюшин П.Ю. Синтез нелинейных робастных регуляторов методом матричных операторов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 5–1. – С. 99–108.

8. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.

9. Крендлер Е. Развитие теории оптимальных по быстродействию процессов управления / Кибернетический сборник. – М.: Издательство «Мир», 1975. – № 3. – С. 111–148.

10. Ловчаков В.И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора «Мехатроника, автоматизация, управление». – 2014. – № 9(162). – С. 3–6; URL: <http://novtex.ru/mech/mech2014/annot09.html> (дата обращения: 26.11.2016).

11. Мельников Д.В., Чжо Т.А., Окар М.М., Мин Ч.Т. Синтез систем регулирования первичных двигателей синхронных генераторов. // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10–3. – С. 509–515.

12. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов – М.: Физматгиз, 1961. – 384 с.

14. Сухинин Б.В., Сурков В.В., Соловьев А.Э. Синтез оптимальных по быстродействию систем на основании использования теоремы об интервалах управления // Вести высших учебных заведений черноморья. – 2010. – № 2(20). – С. 57–63; URL: http://www.stu.lipetsk.ru/files/materials/3945/2010_2_012.pdf (дата обращения: 26.11.2016).

15. Ding M.-F., Liu Y., Gear J.A. A Modified Centered Climbing Algorithm for Linear Programming // Appl. Math. – 2012. – V. 3. – P. 1423–1429; URL: http://file.scirp.org/pdf/AM20123000030_42233952.pdf (дата обращения: 26.11.2016).

References

1. Aleksandrov V.M. Optimalnoe po bystrodejstviju upravlenie v realnom vremeni linejnymi sistemami s vozmushhenijami // Vestnik NGU. Serija: Matematika, mehanika, informatika. 2008. T. 8, vyp. 3. pp. 3–25; URL: <http://www.nsu.ru/xmlui/bitstream/handle/nsu/2702/01.pdf> (data obrashhenija: 26.11.2016).
2. Ibragimov D.N. Optimalnoe po bystrodejstviju upravlenie dvizheniem ajerostata // Trudy MAI. 2015. Vypusk no. 83. pp. 1–31; URL: http://www.mai.ru/upload/iblock/bf3/ibragimov_rus.pdf (data obrashhenija: 26.11.2016).
3. Karagodin V.V., Gorin V.A., Vishnjakov E.P. Matematicheskie osnovy postroenija optimalnogo po bystrodejstviju upravlenija vozbuzhdeniem sinhronnogo generatora // Voprosy jelektromehaniki. 2013. T. 134. pp. 3–8.
4. Kornjushin Ju.P., Melnikov D.V. Konceptija sinteza reguljatorov sledjashhih sistem dlja klassa nelinejnyh obektov up-

ravlenija na osnove metoda matrichnyh operatorov. // Avtomatika. 2008. T. 15. pp. 268.

5. Kornjushin Ju.P., Egupov N.D., Kornjushin P.Ju. Identifikacija nelinejnyh obektov i sistem upravljenja s ispolzovaniem apparata matrichnyh operatorov // Jelektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie. Inženernyj zhurnal: nauka i innovacii. 2014. no. 6 (30). pp. 1–14; URL: <http://engjournal.ru/articles/1315/1315.pdf> (data obrashhenija: 26.11.2016).

6. Kornjushin Ju.P., Melnikov D.V., Egupov N.D., Kornjushin P.Ju. Sintez dopolnitelnogo reguljatora dlja stabilizacii uglovoj skorosti rotora parovoj turbiny. // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta im. N.Je. Bauman. Serija: Estestvennye nauki. 2015. no. 5 (62). pp. 100–112.

7. Kornjushin Ju.P., Egupov N.D., Akimenko D.A., Kornjushin P.Ju. Sintez nelinejnyh robustnyh reguljatorov metodom matrichnyh operatorov // Izvestija Tuskogo gosudarstvennogo universiteta. Tehničeskije nauki. 2011. no. 5–1. pp. 99–108.

8. Krejn M.G., Nudelman A.A. Problema momentov Markova i jekstremalnye zadachi. M.: Nauka, 1973. 551 p.

9. Krendler E. Razvitie teorii optimalnyh po bystrodejstvu processov upravljenja / Kibernetičeskij sbornik. M.: Izdatelstvo «Mir», 1975. no. 3. pp. 111–148.

10. Lovchakov V.I. Funkcii perekljucheniya optimalnogo po bystrodejstvu reguljatora dlja chetyrehkratnogo integratora «Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie». 2014. no. 9(162). pp. 3–6; URL: <http://novtex.ru/mech/mech2014/annot09.html> (data obrashhenija: 26.11.2016).

11. Melnikov D.V., Chzho T.A., Okar M.M., Min Ch.T. Sintez sistem regulirovaniya pervichnyh dvigatelej sinhronnyh generatorov. // Fundamentalnye issledovanija. 2016. no. 10–3. pp. 509–515.

12. Moiseev N.N. Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza. M.: Nauka, 1981. 488 p.

13. Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F. Matematičeskaja teorija optimalnyh processov M.: Fizmatgiz, 1961. 384 p.

14. Suhinin B.V., Surkov V.V., Solovev A.Je. Sintez optimalnyh po bystrodejstvu sistem na osnovanii ispolzovanija teoremy ob intervalah upravljenja // Vesti vysshih uchebnyh zavedenij chernozemja. 2010. no. 2(20). pp. 57–63; URL: http://www.stu.lipetsk.ru/files/materials/3945/2010_2_012.pdf (data obrashhenija: 26.11.2016).

15. Ding M.-F., Liu Y., Gear J.A. A Modified Centered Climbing Algorithm for Linear Programming // Appl. Math. 2012. V. 3. pp. 1423–1429; URL: http://file.scirp.org/pdf/AM20123000030_42233952.pdf (data obrashhenija: 26.11.2016).