

УДК 519.6:532.5

РАЗРАБОТКА АДАПТИВНОГО МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ ПОПРАВOK ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

¹Чистяков А.Е., ¹Сухинов А.И., ²Кузнецова И.Ю., ³Проценко С.В., ³Яковенко И.В.

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, e-mail: cheese_05@mail.ru;

²Институт компьютерных технологий и информационной безопасности

Южного федерального университета, Таганрог, e-mail: ikuznecova@sfsedu.ru;

³Таганрогский педагогический институт имени А.П. Чехова Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), Таганрог, e-mail: eapros@rambler.ru

В работе предложен вариант итерационного метода минимальных поправок для решения систем линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей коэффициентов ленточной структуры, возникающих при численном решении параболических уравнений с мнимым коэффициентом диффузионного переноса (типа Шредингера). Доказана сходимость предложенного метода, выполнена теоретическая оценка скорости сходимости, для обеспечения максимальной скорости сходимости предложен алгоритм оптимизации итерационного параметра τ и определен вид оператора предобуславливателя B . Описан алгоритм метода решения сеточных уравнений с матрицей коэффициентов специального вида. Приведены результаты вычислительных экспериментов по исследованию распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде (задача бегущей волны) на основе предложенного варианта итерационного метода минимальных поправок для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: сеточные уравнения, комплексный оператор, итерационные методы

DEVELOPMENT OF ADAPTIVE METHOD MINIMUM OF AMENDMENTS FOR SOLVING SYSTEM OF GRID EQUATIONS WITH THE OPERATOR OF A SPECIAL FORM

¹Chistyakov A.E., ¹Sukhinov A.I., ²Kuznetsova I.Y., ³Protsenko S.V., ³Yakovenko I.V.

¹Don state technical university, Rostov-on-Don, e-mail: cheese_05@mail.ru;

²Institute of Computer Technology and Information Security, Southern Federal University, Taganrog, e-mail: ikuznecova@sfsedu.ru;

³Chekhov Taganrog Pedagogical Institute, Rostov State University of Economics, Taganrog, e-mail: eapros@rambler.ru

In this paper we propose a variant of the iterative method of minimal corrections for solving the linear matrix with complex coefficients arising in the numerical solution of parabolic equations with imaginary coefficient of diffusion transfer (Schrödinger type). The convergence of the proposed method, the estimate of the convergence rate, optimized iteration parameter τ and defined preconditioner for the operator B are proved. Also the algorithm for solving the linear matrix with complex coefficients is described in the article. The article is presented the results of computational experiments of propagation of the sound beams of finite amplitude in nonlinear dissipative medium based on described iterative method of minimal corrections for solving the linear matrix.

Keywords: difference equations, complex operator, iterative methods

При решении ряда прикладных задач, например, задачи теории дифракции акустических и электромагнитных волн, возникает необходимость решения СЛАУ с комплексной матрицей коэффициентов ленточной структуры. При решении одномерных задач в качестве метода решения сеточных уравнений с матрицей ленточного вида используется экономичный метод прогонки. В случае двух и большего числа пространственных измерений существуют варианты метода прогонки, которые не являются экономичными, поэтому разработка итерационного метода решения сеточных уравнений актуальна.

Итерационные методы решения сеточных уравнений

При решении уравнений сеточными методами возникает необходимость решения

системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$Ay = f, \quad (1)$$

где $A = D + iG$, G – самосопряженный положительно определенный оператор ($G = G^* > 0$), D – диагональный, положительно определенный оператор. Уравнения вида (1) рассматривались ранее [1–3], причем предполагалось, что оператор A имеет вид

$$A = qE + G, \quad q = q_1 + iq_2, \quad q_1 \neq 0.$$

Поставим задачу разработки адаптивного метода решения СЛАУ (1) для случая $q_1 \equiv 0$. Такая постановка связана с тем, что применение адаптивных методов не требует априорной информации об операторе за-

дачи. Для решения системы (1) используем нестационарный двухслойный итерационный процесс:

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_{n+1}} + Ay^n = f, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

где B – положительный самосопряженный оператор, τ_{n+1} – итерационный параметр.

Из формулы (2) выразим y^{n+1} :

$$y^{n+1} = y^n + \tau_{n+1} B^{-1} (f - Ay^n). \quad (3)$$

Обозначим $z^n \equiv y^n - y$ погрешность решения уравнения на n -м шаге. Уравнение (3) в терминах погрешности z^n на n -м шаге для погрешности примет вид

$$z^{n+1} = z^n - \tau_{n+1} B^{-1} Az^n.$$

Оптимизация итерационного параметра τ

Для получения оценок скорости сходимости будем использовать Эрмитову норму: $\|z\| = \sqrt{(z, \bar{z})}$, где $\bar{z}$ – вектор, комплексно сопряженный вектору z .

Введем обозначение $v^n = B^{-1/2} Az^n$. Вследствие того, что действительная часть оператора $B^{-1/2} A$ положительно определена, он не вырожден, из сходимости последовательности v^n к нулю следует сходимость последовательности z^n к нулю. Запишем норму вектора v на $(n+1)$ -м итерационном слое:

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|^2 &= (v^{n+1}, \bar{v}^{n+1}) = (B^{-1/2} Az^{n+1}, B^{-1/2} \bar{A} \bar{z}^{n+1}) = (\bar{A} B^{-1} Az^{n+1}, \bar{z}^{n+1}) = \\ &= (\bar{A} B^{-1} A(z^n - \tau_{n+1} B^{-1} Az^n), \bar{z}^n - \tau_{n+1} B^{-1} \bar{A} \bar{z}^n) = (\bar{A} B^{-1} Az^n, \bar{z}^n) - \\ &- \tau_{n+1} (\bar{A} B^{-1} Az^n, B^{-1} \bar{A} \bar{z}^n) - \tau_{n+1} (\bar{A} B^{-1} A B^{-1} Az^n, \bar{z}^n) + \tau_{n+1}^2 (\bar{A} B^{-1} A B^{-1} Az^n, B^{-1} \bar{A} \bar{z}^n). \end{aligned}$$

Обозначим ω^n вектор поправки ($\omega^n = B^{-1} Az^n$), тогда последнее равенство примет вид

$$\|v^{n+1}\|^2 = (B\omega^n, \bar{\omega}^n) - \tau_{n+1} (\bar{A}\omega^n, \bar{\omega}^n) - \tau_{n+1} (A\omega^n, \bar{\omega}^n) + \tau_{n+1}^2 (\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n).$$

С учетом равенства $\bar{A} + A = 2D$ норму вектора погрешности запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|^2 &= (B\omega^n, \bar{\omega}^n) - 2\tau_{n+1} (D\omega^n, \bar{\omega}^n) + \tau_{n+1}^2 (\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n) = \\ &= (B\omega^n, \bar{\omega}^n) - \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)} + \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)} - 2\tau_{n+1} (D\omega^n, \bar{\omega}^n) + \tau_{n+1}^2 (\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n) = \\ &= (B\omega^n, \bar{\omega}^n) - \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)} + \left(\sqrt{\frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)}} - \tau_{n+1} \sqrt{(\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)} \right)^2. \end{aligned}$$

Норма вектора погрешности минимальна в случае, когда

$$\sqrt{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2 / (\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)} - \tau_{n+1} \sqrt{(\bar{A} B^{-1} A\omega^n, \bar{\omega}^n)} = 0.$$

Следовательно,

$$\tau_{n+1} = (D\omega^n, \bar{\omega}^n) / (B^{-1} A\omega^n, \bar{A}\bar{\omega}^n). \quad (4)$$

Выбор оптимального оператора предобуславливателя B

Представим знаменатель (4) в виде

$$\begin{aligned} (B^{-1} A\omega^n, \bar{A}\bar{\omega}^n) &= (B^{-1} (D + iG)\omega^n, (D - iG)\bar{\omega}^n) = \\ &= (B^{-1} D\omega^n, D\bar{\omega}^n) + i(B^{-1} G\omega^n, D\bar{\omega}^n) - i(B^{-1} D\omega^n, G\bar{\omega}^n) + (B^{-1} G\omega^n, G\bar{\omega}^n). \end{aligned}$$

Мнимая часть последнего выражения равна нулю, так как оператор $K = DB^{-1}G - GB^{-1}D$ – кососимметричный. С учетом введенного обозначения последнее выражение примет вид

$$(B^{-1}A\omega^n, \bar{A}\bar{\omega}^n) = (B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n) + i(K\omega^n, \bar{\omega}^n) + (B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n).$$

Подставляя его в формулу (4), получим значение итерационного параметра τ_{n+1} :

$$\tau_{n+1} = \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)}{(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n) + i(K\omega^n, \bar{\omega}^n) + (B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n)}. \quad (5)$$

Оценим скорость сходимости разработанного алгоритма.

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\|^2 &= (B\omega^n, \bar{\omega}^n) - \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(\bar{A}B^{-1}A\omega^n, \bar{\omega}^n)} = (B\omega^n, \bar{\omega}^n) \left(1 - \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)}{(B\omega^n, \bar{\omega}^n)} \tau_{n+1} \right) = \\ &= (B\omega^n, \bar{\omega}^n) \left(1 - \frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(B\omega^n, \bar{\omega}^n)(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n)} \left(1 + \frac{i(K\omega^n, \bar{\omega}^n)}{(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n)} + \frac{(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n)}{(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n)} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\frac{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)^2}{(B\omega^n, \bar{\omega}^n)(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n)} \leq 1,$$

причем равенство достигается при $B = D$.

$$\begin{aligned} \frac{(B^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n)}{(B^{-1}D\omega^n, D\bar{\omega}^n)} &= \frac{(B^{-1}GD^{-1}B^{1/2}u, GD^{-1}B^{1/2}\bar{u})}{(u, \bar{u})} \leq \\ &\leq \|B^{-1/2}GD^{-1}B^{1/2}\|^2. \end{aligned}$$

Минимум полученной оценки достигается при $B = D$, так как:

$$\|B^{-1/2}GD^{-1}B^{1/2}\| \geq |\lambda_{\max}(GD^{-1})| = \|D^{-1/2}GD^{-1/2}\|,$$

где $\lambda_{\max}(GD^{-1})$ – максимальное собственное число оператора GD^{-1} . Выражение

$$\max_{|\omega|>0} (i(K\omega, \bar{\omega}) / (B^{-1}D\omega, D\bar{\omega}))$$

принимает минимальное нулевое значение при $B = D$. Таким образом, для обеспечения максимальной скорости сходимости метода в качестве оператора B нужно использовать диагональный оператор D . С учетом этого выражение (5) для τ_{n+1} , при котором скорость сходимости максимальна, примет вид

$$\tau_{n+1} = \left(1 + (D^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n) / (D\omega^n, \bar{\omega}^n) \right)^{-1}. \quad (6)$$

Скорость сходимости метода

Оценка скорости сходимости разработанного алгоритма с учетом равенства $B = D$ имеет вид

$$\begin{aligned} \|v^{n+1}\| &= \sqrt{\left(1 - \left(1 + \frac{(D^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n)}{(D\omega^n, \bar{\omega}^n)} \right)^{-1} \right) (D\omega^n, \bar{\omega}^n)} = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}} (D\omega^n, \bar{\omega}^n) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \|v^n\|^2, \end{aligned}$$

где $\alpha^2 = (D^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n) / (D\omega^n, \bar{\omega}^n)$.

Оценим α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{(D^{-1}G\omega^n, G\bar{\omega}^n) / (D\omega^n, \bar{\omega}^n)} = \\ &= \|D^{-1/2}GD^{-1/2}v^n\| / \|v^n\| \leq \|D^{-1/2}GD^{-1/2}\|. \end{aligned}$$

При решении прикладных задач, как правило, $\|D^{-1/2}GD^{-1/2}\| < 1$. Норма оператора $D^{-1/2}GD^{-1/2}$ зависит от шага дискретизации по временной переменной. В работе [7] показана зависимость погрешности от шага дискретизации по временной переменной для уравнения диффузии, при этом следует следить за выполнением условия монотонности явной схемы.

Алгоритм метода решения сеточных уравнений с матрицей коэффициентов вида $A = D + iG$

- 1) Задаем матрицы G, D и вектор f .
- 2) Задаем начальное приближение решения y^n при $n = 0$, допустимое значение погрешности решения (нормы вектора поправки).
- 3) Считаем вектор поправки w по формуле $w = B^{-1}(Ay^n - f)$, $B = D$.

4) Находим векторы $Gw^n = G \cdot w^n$, $Dw^n = D \cdot w^n$, $D^{-1}Gw^n = D^{-1} \cdot Gw^n$.

5) Выполняем комплексное сопряжение для векторов $G\bar{w}^n = \text{Re}(Gw^n) - i \text{Im}(Gw^n)$, $\bar{w}^n = \text{Re}(w^n) - i \text{Im}(w^n)$.

6) Вычисляем скалярные произведения $(D^{-1}Gw^n, G\bar{w}^n)$ и $(Dw^n, \bar{w}^n)$.

7) Рассчитываем итерационный параметр τ_{n+1} по формуле:

$$\tau_{n+1} = \left(1 + (D^{-1}Gw^n, G\bar{w}^n) / (Dw^n, \bar{w}^n) \right)^{-1}.$$

8) Находим приближенное решение на следующей итерации $y^{n+1} = y^n - \tau w^n$.

9) Если норма вектора поправки больше заданного значения, то наращиваем n и возвращаемся в пункт 3.

10) Конец работы алгоритма.

Пример использования метода для решения задачи бегущей волны

Для описания распространения звуковых пучков в квазиоптическом приближении используют уравнение [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v \quad (7)$$

с начальным условием:

$$v(t, \theta, x, y)|_{t=0} = V(\theta, x, y)$$

и граничными условиями периодичности сигнала [3]:

$$v(t, \theta, x, y)|_{\theta=0} = v(t, \theta, x, y)|_{\theta=2\pi},$$

$$v'_{\theta}(t, \theta, x, y)|_{\theta=0} = v'_{\theta}(t, \theta, x, y)|_{\theta=2\pi};$$

$$w_h = \{z_n = nh_z, x_j = jh_x, y_k = kh_y; n = \overline{1..N_z}, j = \overline{0..N_x}, k = \overline{0..N_y}; N_z h_z = l_z, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\},$$

где n, j, k – индексы по направлениям z, x, y соответственно; h_z, h_x, h_y – шаги по направлениям z, x, y соответственно; N_z, N_x, N_y – количество узлов сетки по направлениям z, x, y соответственно; l_x, l_y, l_z – размеры расчетной области.

Дискретный аналог оператора диффузионного переноса $(\mu'_x)'_x$, учитывающий частичную заполненность ячеек в случае граничных условий в форме Неймана, имеет вид

$$(q_0)_j (\mu'_x)'_x \approx (q_1)_j \mu_{j+1/2} \frac{c_{j+1} - c_j}{h_x^2} - (q_2)_j \mu_{j-1/2} \frac{c_j - c_{j-1}}{h_x^2},$$

где q_j – коэффициенты, описывающие заполненность контрольных областей [6].

Дискретный аналог задачи распространения звуковых пучков запишем в виде

$$\begin{aligned} i\omega m \frac{(c_m)_{j,k}^{n+1} - (c_m)_{j,k}^n}{h_z} = \frac{N}{4} & \left[(q_1)_{j,k} \frac{(c_m)_{j+1,k}^{n+\sigma} - (c_m)_{j,k}^{n+\sigma}}{h_x^2} - (q_2)_{j,k} \frac{(c_m)_{j,k}^{n+\sigma} - (c_m)_{j-1,k}^{n+\sigma}}{h_x^2} + \right. \\ & \left. + (q_3)_{j,k} \frac{(c_m)_{j,k+1}^{n+\sigma} - (c_m)_{j,k}^{n+\sigma}}{h_y^2} - (q_4)_{j,k} \frac{(c_m)_{j,k}^{n+\sigma} - (c_m)_{j,k-1}^{n+\sigma}}{h_y^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где σ – весовой коэффициент схемы [4].

симметричности:

$$v'_n(z, \theta, x, y) \Big|_{x=0, y=0} = 0;$$

отсутствия энергии в бесконечно удаленной точке:

$$v(z, \theta, x, y) \Big|_{x=\infty, y=\infty} = 0,$$

где $v = v(z, \theta, x, y)$ – величина скорости частиц среды, θ – время в сопровождающей системе координат, z – нормированное расстояние, N – параметр уравнения, характеризующий дифракцию волнового пучка, $\Delta_{\perp}$ – поперечный лапласиан.

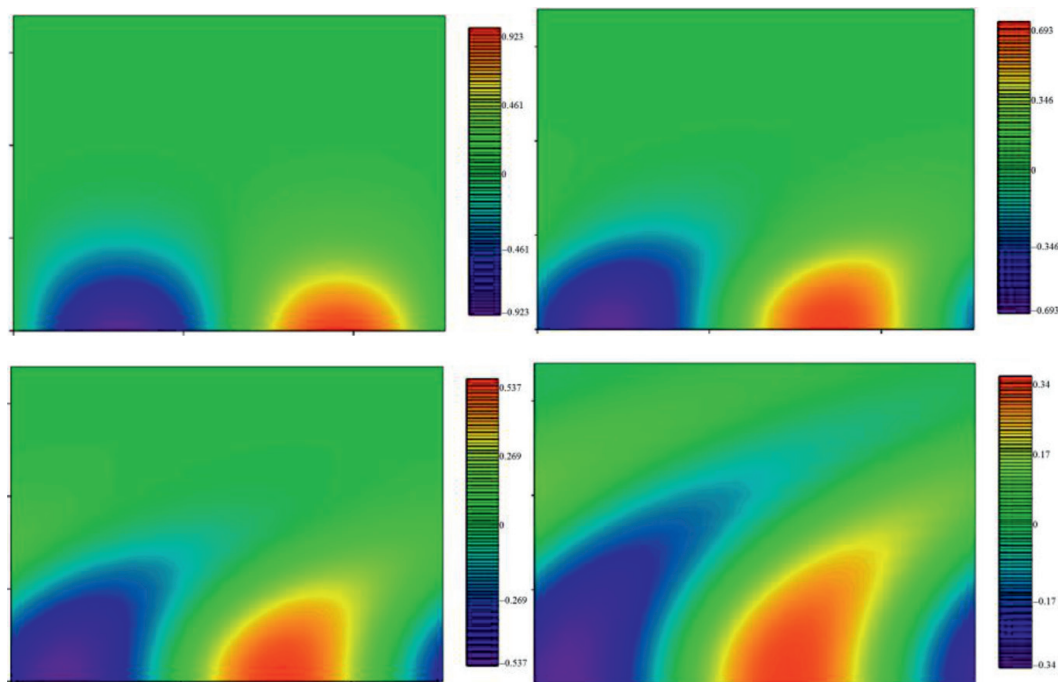
Решение задачи (7) находится методом гармоник (тригонометрическая интерполяция). Функцию скорости частиц среды можно представить усеченным рядом Фурье, полученным в результате применения тригонометрической интерполяции:

$$v = \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_j \exp(i\omega m \theta), \quad (8)$$

где ω – частота первой гармоники, m – номер гармоники, N – количество дискретных значений величины скорости частиц среды на период. Так как функции $\exp(i\omega m \theta)$ для различных j линейно независимы, то получим уравнение

$$i\omega m \frac{\partial c_m}{\partial z} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} c_m.$$

Для построения решения разностной схемы вводится равномерная сетка:



Решения задачи распространения звуковых пучков

В работе [8] рассмотрена конечно-разностная аппроксимация данного уравнения на основе схем с весами и доказана его устойчивость в случае $\sigma \geq 0,5$. Решение уравнения (7) сеточными методами существенно менее трудозатратно по сравнению с решением исходной волновой задачи [5]. Решение дискретной задачи (9) сводится к решению сеточного уравнения с оператором вида $A = D + iG$. Рассмотрены гармонические пучки с начальным гауссовским распределением:

$$V(\theta, x, y) = e^{-x^2 - y^2} \sin(\theta).$$

На рисунке представлено решение задачи при следующих параметрах: $N = 0,025$, $l_x = 0,5$, $l_y = 0,5$, $l_z = 0; 0,25; 0,5; 1$. Показано сечение.

Рисунок иллюстрирует, как с ростом z происходит диффузия амплитуды поля в поперечном направлении к оси пучка и трансформация первоначально плоского волнового фронта в квазисферический.

Заключение

В работе предложен вариант метода минимальных поправок в случае комплексной матрицы коэффициентов. Получено выражение для оптимального вида оператора преобуславливателя В. Получена теоретическая оценка скорости сходимости. Рассмотрен пример применения предложен-

ного метода. Показано, что теоретическая оценка скорости сходимости хорошо согласуется с реальной погрешностью решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 15-07-08626, № 15-07-08408, № 16-3716-37-00129, № 15-01-08619.

Список литературы

1. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Математическая модель распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 168–174.
2. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Сжатие и декомпрессия импульсов при взаимодействии с низкочастотными волнами конечной амплитуды в звуковых пучках // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 122–128.
3. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Численное моделирование распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 3. – С. 49–64.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
5. Сухинов А.И., Огурцов Е.С., Чистяков А.Е. Построение модели излучателя электромагнитных волн линейной антенной решеткой из скошенных волноводов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 129–139.
6. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 87–98.
7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишенин А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем

с весами // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 11. – С. 53–64.

8. Чистякова Т.А. Исследование конечно-разностных схем для уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 21–30.

References

1. Savickij O.A., Chistjakova T.A. Matematicheskaja model rasprostraneniya ultrazvukovyh puchkov vysokoj intensivnosti // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2010. no. 6 (107). pp. 168–174.

2. Savickij O.A., Chistjakova T.A. Szhatie i dekompressija impulsov pri vzaimodejstvii s nizkochastotnymi volnami konechnoj amplitudy v zvukovyh puchkah // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2011. no. 8 (121). pp. 122–128.

3. Savickij O.A., Chistjakova T.A. Chislennoe modelirovanie rasprostraneniya zvukovyh puchkov konechnoj ampli-

tudy v nelinejno-dissipativnoj srede // Matematicheskoe modelirovanie. 2014. T. 26, no. 3. pp. 49–64.

4. Samarskij A.A. Teorija raznostnyh shem / A.A. Samarskij. Moskva: Nauka, 1989. 616 p.

5. Suhinov A.I., Ogurcov E.S., Chistjakov A.E. Postroenie modeli izluchatelja jelectromagnitnyh voln lineinoj antennoj reshetkoj iz skoshennyh volnovodov // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2011. no. 8 (121). pp. 129–139.

6. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Fomenko N.A. Metodika postroeniya raznostnyh shem dlja zadachi diffuzii-konvekcii-reakcii, uchityvajushhih stepen zapolnennosti kontrolnyh jacheek // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2013. no. 4 (141). pp. 87–98.

7. Suhinov A.I., Chistjakov A.E., Shishenja A.V. Ocenka progressnosti resheniya uravneniya diffuzii na osnove shem s vesami // Matematicheskoe modelirovanie. 2013. T. 25, no. 11. pp. 53–64.

8. Chistjakova T.A. Issledovanie konechno-raznostnyh shem dlja uravneniya Hohlova-Zabolotskoj-Kuznecova // Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. 2010. no. 6 (107). pp. 21–30.