УДК 531.01:004.94

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ В ИМПУЛЬСАХ ПУАССОНА

**Иванов В.Н., Полосков И.Е., Шимановский В.А.**

*ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», Пермь, e-mail: polosk@psu.ru*

Работа посвящена разработке методов компьютерного моделирования динамики сложных механических систем. В статье представлена новая матричная форма уравнений движения систем абсолютно твердых тел со структурой дерева. Рассмотрен случай голономных связей. В качестве независимых параметров, однозначно определяющих положение и распределение скоростей тел системы в пространстве, выбраны обобщенные координаты и переменные, имеющие размерность импульсов. Особенность системы уравнений состоит в том, что она разрешена относительно производных от обобщённых импульсов и не содержит реакций связей. Приведен вывод предлагаемой новой формы уравнений движения системы связанных твердых тел из уравнений динамики свободного твердого тела в квазикоординатах Эйлера – Лагранжа с использованием матрично-геометрического подхода. Предложен метод разрешения уравнений движения относительно старших производных, ориентированный на использование ЭВМ. Получены рекуррентные формулы для определения всех кинематических и динамических переменных, входящих в уравнения. Временна́я сложность решения системы уравнений с помощью данного алгоритма растёт по линейному закону в зависимости от числа тел в механической системе, что говорит о его эффективности. Рассматриваемый алгоритм подобен методу, предложенному А.Ф. Верещагиным для разрешения общих уравнений динамики цепочки твёрдых тел относительно ускорений. На примере механической системы с четырьмя степенями свободы продемонстрированы все этапы подготовки первичной информации и составления уравнений движения в предлагаемой форме.

**Ключевые слова: система абсолютно твердых тел, уравнения движения, динамика, математическое моделирование, обобщенные координаты, импульсы Пуассона, матрично-геометрический метод**

# MATHEMATICAL MODELS OF CONSTRAINED MULTIBODY SYSTEMS THROUGH THE USE OF POISSON IMPULSES

**Ivanov V.N., Poloskov I.E., Shimanovskiy V.A.**

*Perm State University, Perm, e-mail: polosk@psu.ru*

The article is devoted to the development of methods for computer simulation of dynamics of mechanical systems. The article presents a new matrix form of equations of motion for rigid body systems with a tree structure and holonomic constrains. Generalized coordinates and impulses were exploited as independent parameters that uniquely identified the configuration and velocity distribution of bodies. The most important features of the equations are that they are resolved with respect to derivatives of generalized impulses and don’t contain constraint forces. In this paper we obtain the proposed new form of the equations for systems of connected rigid bodies on the base of the Euler-Lagrange equations of free rigid body dynamics through the use of quasi-coordinates and matrix-geometric approach. The method is intended for the study of motions of mechanical systems with the usage of computers. Recurrent formulae were obtained for all kinematic and dynamic variables that were included in the equations. The time complexity of solution of equations by our algorithm grows linearly with respect to the number of bodies in a mechanical system under investigation. This fact says about an effectiveness of the algorithm. The algorithm under consideration is similar to the method proposed by the A.F. Vereschagin for resolution of general equations of dynamics for chains of rigid bodies with respect to accelerations. An example demonstrates all stages of source data preparation and construction of specific equations in the proposed form for a mechanical system with four degrees of freedom.

**Keywords: multibody system, equations of motion, dynamic, mathematical modeling, generalized coordinates, Poisson impulses, matrix-geometric method**

Компьютерное моделирование динамики механических систем широко используется в современной инженерной практике. Оно позволяет существенно уменьшить объём натурных испытаний и в конечном счёте сократить время и стоимость новых разработок. Требование точности компьютерного моделирования ведет к возрастанию сложности математических моделей технических систем. Но параллельно с ростом размерности математической модели увеличивается и трудоёмкость моделирования. Это отражается в серьезном росте времени, которое затрачивается на стадии оптимизации параметров проектируемой конструкции и исследовании ее поведения при различных условиях эксплуатации. Поэтому разработка методов, позволяющих ускорить процесс математического моделирования сложных технических систем, является актуальной задачей.

В настоящей работе выводится новая форма уравнений движения систем связанных твёрдых тел с использованием квазискоростей, обобщённых координат и обобщённых импульсов (импульсов Пуассона).

**Описание механической системы. Матрица кинематической структуры**

Рассмотрим систему абсолютно твёрдых тел со структурой дерева, соединенных шарнирами. Под шарнирами будем понимать соединение между двумя смежными телами, возникающее вследствие как наличия кинематической связи между телами, так и взаимодействия посредством различных силовых полей. Будем предполагать, что кинематические связи, реализуемые в шарнирах, голономны и идеальны.

Пусть $N$ – число тел в системе (не считая тела «0», движение которого во времени относительно инерциальной системы координат (СК) $Oxyz$ задано). Тогда количество шарниров всегда будет равно $N$, если учитывать шарнир между системой и телом «0».

Пронумеруем тела и шарниры системы, причем телам присвоим номера так, чтобы для любого тела в графе системы номер предшествующего ему тела был меньше, а шарниру, связывающему $i$-е тело с предшествующим, присвоим номер $i$. В этом случае для полного описания структуры взаимосвязей в такой системе достаточно одного целочисленного массива $k = \{k_1, \ldots, k_N\}$, на $i$-м месте которого расположен индекс тела, предшествующего $i$-му. С каждым телом системы свяжем следующие множества: $P_i$ – упорядоченное множество индексов шарниров, составляющих путь между нулевым и $i$-м телами; $U_i$ – множество индексов шарниров, для которых $i$-е тело является предшествующим.

Положение и ориентацию $i$-го тела системы относительно инерциальной СК будем определять с помощью радиуса-вектора $\overline{OO_i}$ фиксированной на нём точки $O_i$ и системы ортонормированных векторов $\vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{e}_3^{(i)}$, которые вместе с точкой $O_i$ определяют СК $O_ix_iy_iz_i$, неизменно связанную с $i$-м телом.

Введем следующие обозначения: $\rho_i = O_{k_i}O_i$ – матрица-столбец координат точки $O_i$ в $k_i$-й СК; $r_i = OO_i$ – матрица-столбец координат точки $O_i$ в инерциальной СК; $G_j^i$ – матрица направляющих косинусов между базисными векторами $\vec{e}_1^{(j)}, \vec{e}_2^{(j)}, \vec{e}_3^{(j)}$ и $\vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{e}_3^{(i)}$ (матрица преобразования координат из $j$-й СК в $i$-ю).

Предположим, что физическая связь в $i$-м шарнире моделируется системой $l_i \le 6$ идеальных голономных линейно-независимых связей. Тогда множество относительных положений $i$-го тела в $k_i$-й СК образует $n_i$-мерное конфигурационное многообразие [1], где $n_i = 6 - l_i$. Уравнения этого многообразия можно записать в параметрической форме, введя матрицу-столбец $q_i = \left(q_i^1, \ldots, q_i^{n_i}\right)^T$ криволинейных (обобщенных) координат его текущей точки. Тогда матрицы $\rho_i$ и $G_i \equiv G_{k_i}^i$ являются функциями обобщенных координат:

$$\rho_i = \rho_i(q_i, t); \quad G_i = G_i(q_i, t).$$

Задание матрицы-столбца $q = (q_1, \ldots, q_N)^T$ как функции времени позволяет однозначно определить взаимное положение всех тел и их движение относительно абсолютной системы координат в любой момент $t$.

Введенные матрицы связаны между собой рекуррентными формулами

$$r_i = r_{k_i} + G_0^{iT}\rho_i; \qquad G_0^i = G_i G_0^{k_i}.$$

Принимая движение $i$-го тела за относительное, а предшествующего ему $k_i$-го тела за переносное, в соответствии с правилом сложения скоростей можно записать рекуррентные формулы для вычисления проекций линейной $v_i$ и угловой $\omega_i$ скоростей тел механической системы на оси $i$-й СК [8]:

$$v_i = C_i v_{k_i} + A_i \dot{q}_i + v_i^*, \tag{1}$$

где

$$v_i = \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix}; \quad C_i = \begin{pmatrix} G_i & -G_i\tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix};$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^v & \cdots & a_{in_i}^v \\ a_{i1}^\omega & \cdots & a_{in_i}^\omega \end{pmatrix}; \quad v_i^* = \begin{pmatrix} a_{i0}^v \\ a_{i0}^\omega \end{pmatrix};$$

$$a_{ij}^v = G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_i^j}\left(j = \overline{1, n_i}\right); \quad a_{i0}^v = G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t};$$

$$\tilde{a}_{ij}^\omega = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial q_i^j}\left(j = \overline{1, n_i}\right); \quad \tilde{a}_{i0}^\omega = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial t}.$$

Здесь и далее символ «~» используется для обозначения кососимметричной матрицы (это соответствует матричной записи векторного произведения [8]).

Введём блочную $6N\times6N$-матрицу $S$ с квадратными подматрицами порядка 6 по следующей формуле:

$$S_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i; \\ -C_i, & j = k_i; \\ 0_{6\times6}, & j \ne i \vee k_i, \end{cases} \qquad i, j = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Заметим, что для любой кинематической структуры эта матрица содержит в каждой строке только два ненулевых блока $E_6$ и $-C_i$. Поскольку матрица $S$ содержит информацию как о топологической структуре системы, так и об относительном положении тел в системе, ее называют матрицей кинематической структуры. С использованием матрицы $S$ уравнения кинематики системы тел (1) можно записать следующим образом:

$$Sv = A\dot{q} + v^*, \tag{3}$$

где $v = (v_1, \omega_1, \ldots, v_N, \omega_N)^T$, $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)$.

Рекуррентные формулы (3) можно записать в виде явных выражений

$$v = T\left(A\dot{q} + v^*\right), \tag{4}$$

где обратная к $S$ матрица $T = S^{-1}$ является блочной $6N\times 6N$-матрицей, подматрицы которой могут быть вычислены по рекуррентным формулам:

$$T_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i; \\ C_i T_{k_i j}, & j \in P_i; \\ 0_{6\times 6}, & j \notin P_i, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется соотношение для производной матрицы $T$. Для вывода этого соотношения получим формулу для производной матрицы $C_i$:

$$\dot{C}_i = \begin{pmatrix} \dot{G}_i & -\dot{G}_i\tilde{\rho}_i - G_i\dot{\tilde{\rho}}_i \\ 0 & \dot{G}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i\tilde{\omega}_{k_i} & G_i\tilde{v}_{k_i} - G_i\tilde{\rho}_i\tilde{\omega}_{k_i} \\ 0 & G_i\tilde{\omega}_{k_i} \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i G_i & -\tilde{\omega}_i G_i\tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i G_i \\ 0 & \tilde{\omega}_i G_i \end{pmatrix} = \Omega_i^T C_i - C_i \Omega_{k_i}^T,$$

где введено обозначение

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i & 0 \\ \tilde{v}_i & \tilde{\omega}_i \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства и формулы (2) следует, что

$$\dot{S} = \Omega^T S - S\Omega^T, \tag{6}$$

где $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$.

Продифференцируем равенство $ST = E$ и из полученного выражения выразим производную $\dot{T}$. Тогда с учётом формулы (6) получим

$$\dot{T} = -T\dot{S}T = \Omega^T T - T\Omega^T. \tag{7}$$

**Расширенная система уравнений движения в импульсах Пуассона**

Для составления уравнений движения систем связанных твёрдых тел со структурой дерева будем использовать принцип освобождения от связей. В этом случае мысленно уничтожаем связи между телами, а движение системы, осуществляемое при наличии связей, обеспечим введением дополнительных сил – реакциями связей. Введение этих реакций позволяет записать дифференциальные уравнения движения любого тела в форме уравнений Эйлера – Лагранжа для свободного твёрдого тела [8]:

$$M_i\dot{v}_i + \Omega_i M_i v_i = F_i + R_i - \sum_{j\in U_i} C_j^T R_j, \tag{8}$$

где

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i E & -m_i\tilde{r}_i^c \\ m_i\tilde{r}_i^c & J_i \end{pmatrix}; \quad F_i = \begin{pmatrix} f_i^o \\ m_i^o \end{pmatrix};$$

$$R_i = \begin{pmatrix} \tau_i^o \\ \mu_i^o \end{pmatrix};$$

$m_i$ – масса $i$-го тела; $J_i$ – тензор инерции $i$-го тела; $r_i^c$ – матрица-столбец проекций радиуса-вектора центра масс $i$-го тела на оси связанной с ним СК; $f_i^o$, $m_i^o$ – проекции главного вектора и главного момента активных сил, действующих на $i$-е тело в $i$-й СК; $\tau_i^o$, $\mu_i^o$ – проекции главного вектора и главного момента реакций связей в $i$-м шарнире в $i$-й СК.

С использованием матрицы кинематической структуры $S$ уравнение (8) запишем в краткой форме:

$$M\dot{v} + \Omega M v = F + S^T R, \tag{9}$$

где

$$M = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_N); \qquad F = (F_1, \ldots, F_N)^T;$$

$$R = (R_1, \ldots, R_N)^T.$$

Декартовым импульсом системы назовём $6N$-мерную матрицу-столбец

$$p^a = Mv. \tag{10}$$

Тогда $n$-мерная матрица-столбец $\left(n = \sum_{i=1}^{N} n_i\right)$

$$p = A^T T^T p^a = B^T p^a$$

является обобщённым импульсом, или импульсом Пуассона [1].

Построим выражение для производной обобщённого импульса $\dot{p}$. Для этого умножим слева на $B^T$ левую и правую части уравнения (9). Получим, что

$$B^T \dot{p}^a + B^T \Omega p^a = B^T F$$

или

$$\dot{p} = \left(\dot{B}^T - B^T \Omega\right) p^a + B^T F. \qquad (11)$$

Здесь было учтено равенство

$$B^T S^T R = A^T T^T S^T R = A^T R = 0,$$

отражающее принцип идеальности связей. В уравнении (11) $Q = B^T F$ – матрица-столбец обобщенных сил.

Преобразуем выражение $\left(\dot{B}^T - B^T \Omega\right) p^a$ с учётом формулы (7):

$$\left(\dot{B}^T - B^T \Omega\right) p^a = \left(\dot{A}^T T^T + A^T \dot{T}^T - A^T T^T \Omega\right) S^T \mu =$$

$$= \left(\dot{A}^T + A^T \left(T^T \Omega - \Omega T^T\right) S^T - A^T T^T \Omega S^T\right) \mu =$$

$$= \left(\dot{A}^T - A^T \Omega\right) \mu,$$

где введено обозначение $\mu = T^T p^a$.

В результате получим следующую расширенную систему уравнений движения

$$\begin{cases} Mv - S^T \mu = 0; \\ -Sv + A\dot{q} = -v^*; \\ A^T \mu = p; \\ \dot{p} = \left(\dot{A}^T - A^T \Omega\right) \mu + Q. \end{cases} \qquad (12)$$

Особенность уравнений (12) состоит в том, что они разрешены относительно производных обобщённых импульсов $\dot{p}$. Первые три из этих уравнений образуют линейную систему с симметричной, блочной трёхдиагональной разреженной матрицей коэффициентов относительно скоростей $v$, $\dot{q}$ и переменных $\mu$, которые являются множителями Лагранжа [4, 6]. Уравнения (12) для цепочки твердых тел впервые были выведены В.Н. Ивановым из принципа Гамильтона – Остроградского в работе [4]. В работе [6] эти уравнения были получены в координатной форме для систем твердых тел со структурой дерева.

Структура первых трех кинематических уравнений системы (12) аналогична структуре расширенной системы уравнений динамики системы связанных твердых тел [5, 9, 10]:

$$\begin{cases} Mw - S^T R = F^*; \\ -Sw + A\ddot{q} = -w^*; \\ A^T R = 0, \end{cases} \qquad (13)$$

где $w$ – матрица-столбец абсолютных линейных и угловых декартовых ускорений всех тел системы в связанных с ними СК. Правые части уравнений $F^*$ и $w^*$, помимо внешних сил, содержат гироскопические, центробежные и явно зависящие от времени ускорения.

Отличие уравнений (12) и (13) состоит в том, что первые три уравнения системы (12) служат для получения значений обобщенных скоростей $\dot{q}$, а не ускорений $\ddot{q}$.

Совпадение структуры уравнений (12) и (13) означает, что все разработанные ранее алгоритмы решения системы уравнений (13), такие как метод «прогонки» (отдельных тел) А.Ф. Верещагина [2, 3], методы проекций уравнений в подпространства обобщенных координат или подпространства линейно-независимых компонент реакций связей (схемы явного формирования уравнений движения в форме Лагранжа 2 или 1 рода) [7, 8, 11, 12], применимы и для системы уравнений (12).

### Решение расширенной системы уравнений движения в импульсах Пуассона методом «прогонки»

Учитывая формулы (1) и (2), систему уравнений (12) запишем в следующем виде:

$$\mu_i = M_i v_i + \sum_{j \in U_i} C_j^T \mu_j; \qquad (14)$$

$$v_i = C_i v_{k_i} + A_i \dot{q}_i + v_i^*; \qquad (15)$$

$$A_i^T \mu_i = p_i; \qquad (16)$$

$$\dot{p}_i = \left(\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i\right) \mu_i + A_i^T F_i^*, \qquad (17)$$

где

$$F_i^* = F_i + \sum_{j \in U_i} C_j^T F_j^*, \quad i = \overline{1,N}. \qquad (18)$$

Построим на основе этой системы рекуррентные формулы для вычисления обобщённых скоростей $\dot{q}$ и множителей Лагранжа $\mu_i$. Для этого сначала докажем, что для каждого тела системы множитель $\mu_i$ может быть представлен в виде

$$\mu_i = M_i^* v_i + \varphi_i^*. \qquad (19)$$

Нетрудно видеть, что для концевых тел системы такое представление наблюдается:

$$M_i^* = M_i; \quad \varphi_i^* = 0.$$

Предположим, что формула (19) справедлива для всех номеров $j \in S_i$. Покажем, что она справедлива и для номера $i$. Для этого с помощью формулы (15) исключим из (19) матрицу-столбец $v_i$:

$$\mu_i = M_i^* C_i v_{k_i} + M_i^* A_i \dot{q}_i + M_i^* v_i^* + \varphi_i^*. \qquad (20)$$

Подставим полученное равенство в уравнение (16) и выразим из него матрицу-столбец $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \left(A_i^T M_i^* A_i\right)^{-1} \left[p_i - A_i^T \left(\varphi_i^* + M_i^* \left(C_i v_{k_i} + v_i^*\right)\right)\right]. \tag{21}$$

С помощью формул (20), (21) из уравнения (14) исключим множители $\mu_j$, $j \in S_i$, несомых тел:

$$\mu_i = M_i v_i +$$
$$+\sum_{j \in U_i} C_j^T \left[M_j^* C_j v_i + M_j^* A_j \left(A_i^T M_i^* A_i\right)^{-1} \left(p_j - A_j^T \left(\varphi_j^* + M_j^* \left(C_j v_i + v_j^*\right)\right)\right) + M_j^* v_j^* + \varphi_j^*\right].$$

Собирая в полученном равенстве коэффициент перед $v_i$, преобразуем его к виду (19), где

$$M_i^* = M_i + \sum_{j \in U_i} \left[C_j^T M_j^* C_j - C_j^T M_j^* A_j \left(A_i^T M_i^* A_i\right)^{-1} A_j^T M_j^* C_j\right]; \tag{22}$$

$$\varphi_i^* = \sum_{j \in U_i} C_j^T \left[M_j^* A_j \left(A_i^T M_i^* A_i\right)^{-1} p_j + \left(E - M_j^* A_j \left(A_i^T M_i^* A_i\right)^{-1} A_j^T\right)\left(M_j^* v_j^* + \varphi_j^*\right)\right]. \tag{23}$$

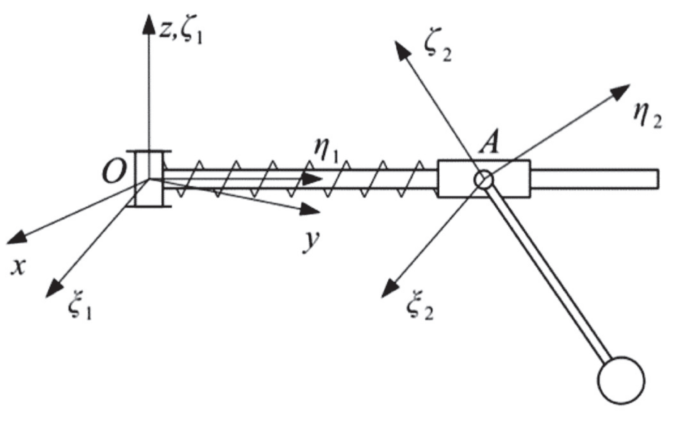
Таким образом, процесс вычисления обобщённых скоростей и производных обобщённых импульсов состоит из двух этапов. На первом из них по формулам (22), (23) и (18), начиная с концевых тел и заканчивая корневым, вычисляются матрицы $M_i^*$, $\varphi_i^*$, $F_i^*$. На втором этапе, начиная с корневого тела, с помощью формул (21), (15), (19) и (17) определяются обобщённые скорости $\dot{q}_i$ и производные обобщённых импульсов $\dot{p}_i$.

Данный метод является одним из самых эффективных методов численного моделирования систем с длинными кинематическими цепочками. Трудоёмкость решения системы уравнений (12) с помощью данного алгоритма растёт по линейному закону в зависимости от числа тел в механической систем [10]. При реализации этого алгоритма требуется обращение только матриц $A_i^T M_i^* A_i$, порядок которых равен числу степеней свободы в $i$-м шарнире, причем эти матрицы симметричны и положительно определены, а их порядок всегда мал (не превышает шести). Именно этим и обусловлена эффективность представляемого метода.

Описанный алгоритм аналогичен методу отдельных тел А.Ф. Верещагина, предложенному в работах [2, 3] для решения общих уравнений динамики цепочки твёрдых тел относительно ускорений.

### Пример составления уравнений движения системы тел в импульсах Пуассона

Для иллюстрации техники составления уравнений (12), а также определения всех входящих в них параметров выведем уравнения движения для механической системы (элемента регулятора угловой скорости), изображённой на рисунке.



Введём неподвижную $Oxyz$ и связанные с телами $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ системы координат, как показано на рисунке. Система состоит из двух тел с массами $m_1$ и $m_2$ и осевыми моментами инерции $J_{1x}$, $J_{1y}$, $J_{1z}$ и $J_{2x}$, $J_{2y}$, $J_{2z}$. Предположим, что:

а) в точке $O$ цилиндрический шарнир обеспечивает вращение $OA$ вокруг оси $Oz$;

б) точка $A$ может перемещаться вдоль оси $O\eta_1$;

в) шарнир в этой точке обеспечивает вращение второго тела сначала вокруг оси $O\eta_1$, а затем вокруг оси $O\xi_2$;

г) на тела системы действует сила тяжести;

д) точки $O$ и $A$ связаны пружиной.

Рассматриваемая система имеет четыре степени свободы. В качестве обобщённых координат выберем:

а) угол $\gamma_1$ – угол поворота первого тела вокруг оси $Oz$;

б) изменяющуюся длину $OA = y_2$;

в) углы $\beta_2$ и $\alpha_2$ поворота второго тела вокруг осей $O\eta_1$ и $O\xi_2$ соответственно, т.е. $q_1 = \gamma_1$; $q_2 = (y_2, \beta_2, \alpha_2)^T$, $q = (\gamma_1, y_2, \beta_2, \alpha_2)^T$.

Подготовим элементы уравнений движения (12). Очевидно, что координаты точек $O$ и $A$ в системах координат $Oxyz$ и $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ соответственно равны

$$\rho_1 = (0, 0, 0)^T; \quad \rho_1 = (0, y_2, 0)^T.$$

Далее, матрицы направляющих косинусов между системами координат имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} c_{\gamma 1} & s_{\gamma 1} & 0 \\ -s_{\gamma 1} & c_{\gamma 1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} c_{\beta 2} & s_{\alpha 2}s_{\beta 2} & -c_{\alpha 2}s_{\beta 2} \\ 0 & c_{\alpha 2} & s_{\alpha 2} \\ s_{\beta 2} & -s_{\alpha 2}c_{\beta 2} & c_{\alpha 2}c_{\beta 2} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{\gamma 1} = \cos\gamma_1; \quad s_{\gamma 1} = \sin\gamma_1; \quad c_{\alpha 2} = \cos\alpha_2;$$

$$s_{\alpha 2} = \sin\alpha_2; \quad c_{\beta 2} = \cos\beta_2; \quad s_{\beta 2} = \sin\beta_2.$$

Масс-инерционные характеристики тел системы задаются матрицами

$$M = \mathrm{diag}(M_1, M_2); \qquad r_{c1} = (0, y_{c1}, 0)^T;$$

$$r_{c2} = (0, 0, z_{c2})^T,$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 y_{c1} \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & m_1 y_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 y_{c1} & J_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{1y} & 0 \\ -m_1 y_{c1} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{1z} \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_2 & 000 & & & m_2 z_{c2} & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & -m_2 z_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 z_{c2} & 0 & J_{2x} & 0 & 0 \\ m_2 z_{c2} & 000 & & & J_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{2z} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, матрицы кинематической структуры и локальных касательных базисов конфигурационного многообразия возможных перемещений тел системы имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -C_2 & E \end{pmatrix}; \quad A = \mathrm{diag}(A_1, A_2),$$

где

$$C_2 = \begin{pmatrix} G_2 & -G_2\tilde{\rho}_2 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} s_{\alpha 2}s_{\beta 2} & 0 & 0 \\ c_{\alpha 2} & 0 & 0 \\ -s_{\alpha 2}c_{\beta 2} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\beta 2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & s_{\beta 2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда производная матрицы $A$ равна

$$\dot{A} = diag\left(0_{6\times 1}, \dot{A}_2\right),$$

где

$$\dot{A}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}c_{\alpha 2}s_{\beta 2} + \dot{\beta}s_{\alpha 2}c_{\beta 2} & 00 & \\ -\dot{\alpha}s_{\alpha 2} & 00 & \\ -\dot{\alpha}c_{\alpha 2}c_{\beta 2} + \dot{\beta}s_{\alpha 2}s_{\beta 2} & 00 & \\ 0 & -\dot{\beta}s_{\alpha 2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dot{\beta}c_{\alpha 2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вследствие того, что тело 0 системы стационарно, то вектор $v^* = 0$. При этом вектор обобщённых сил имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} k\left(\omega_0 - \dot{\gamma}_1\right) \\ c\left(y_{20} - y_2\right) \\ g m_2 z_{c2} s_{\alpha 2} c_{\beta 2} \\ g m_2 z_{c2} c_{\alpha 2} s_{\beta 2} \end{pmatrix},$$

где $\omega_0 = \omega_0(t)$ – заданная угловая скорость вращения первого тела; $k$ – коэффициент усиления; $c$ – коэффициент жёсткости пружины; $y_{20}$ – длина ненапряжённого состояния пружины; $g$ – ускорение свободного падения.

Теперь для получения уравнений движения в импульсах Пуассона достаточно подставить выписанные матрицы в уравнения (12).

Из анализа приведенного примера несложно установить, что объем информации, которую необходимо подготовить для построения математической модели системы твердых тел в форме уравнений (12), минимален.

## Заключение

В работе получена новая расширенная матричная форма уравнений движения систем связанных твердых тел со структурой дерева. Уравнения содержат импульсы Пуассона, обобщенные координаты, квазискорости и множители Лагранжа. Они разрешены относительно производных импульсов Пуассона. Поэтому в отличие от классических уравнений в форме Лагранжа 1 или 2 рода представленные уравнения не требуется разрешать относительно старших производных (обобщенных ускорений) в процессе их численного интегрирования.

Построены рекуррентные формулы, предназначенные для автоматизированного компьютерного формирования уравнений движения систем связанных твердых тел из простейших основных блоков, описывающих структуру, масс-инерционные, геометрические и кинематические характеристики отдельных звеньев (тел и шарниров).

Для группы кинематических уравнений, входящих в расширенную систему уравнений, разработан матричный алгоритм разрешения относительно обобщенных скоростей, аналогичный известному методу «прогонки». Число арифметических операций в построенном алгоритме, как и в методе А.Ф. Верещагина [2, 3], растет линейно в зависимости от количества тел в механической системе. Поэтому для систем твердых тел с длинными кинематическими цепями разработанный алгоритм является более эффективным [10] в сравнении с процедурами моделирования, основанными на использовании уравнений в форме Лагранжа 2 рода, для которых аналогичная зависимость является кубической.

## Список литературы

1. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. – М.: Наука, 1988. – 280 с.

2. Верещагин А.Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – № 6. – С. 89–94.

3. Верещагин А.Ф. Принцип наименьшего принуждения Гаусса для моделирования на ЭВМ динамики роботов-манипуляторов // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 220, № 1. – С. 51–53.

4. Иванов В.Н. Математическое моделирование динамики механических систем со структурой дерева.– Пермь: Перм. ун-т. – 1983. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ: 28.10.83, № 5876.

5. Иванов В.Н., Домбровский И.В., Набоков Ф.В. и др. Классификация моделей систем твердых тел, используемых в численных расчетах динамического поведения машиностроительных конструкций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – № 2. – С. 139–155.

6. Иванов В.Н., Суслонов В.М. Уравнения движения механических систем со структурой дерева // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. – Пермь, 1984. – С. 154–159.

7. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных тел. – М.: Наука, 1993. – 272 с.

8. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гос. изд-во физ-мат. лит, 1961. – 824 с.

9. Шимановский В.А., Иванов В.Н. Формирование уравнений движения механических систем в обобщенных координатах // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. – Пермь, 2005. – Вып. 37. – С. 188–201.

10. Шимановский В.А., Иванов В.Н. Методы составления уравнений движения систем связанных твердых тел в декартовых координатах // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2007. – Вып. 39. – С. 248–262.

11. Wittenburg J. Dynamics of multibody systems. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 223 p.

12. Shabana A.A. Computational dynamics. – New York: Wiley, 2009. – 542 p.

## References

1. Velichenko V.V. Matrichno-geometricheskie metody v mekhanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki. M.: Nauka, 1988. 280 p.

2. Vereschagin A.F. Metod modelirovaniya na CVM dinamiki slozhnykh mekhanizmov robotov-manipulyatorov. Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. 1974. no. 6. pp. 89–94.

3. Vereshhagin A.F. Printsip naimenshego prinuzhdeniya Gaussa dlya modelirovaniya na CVM dinamiki robotov-manipulyatorov. Dokl. AN SSSR, 1975. T. 220, no. 1. pp. 51–53.

4. Ivanov V.N. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki mehanicheskih sistem so strukturoj dereva. Perm: Perm State University, 1983. 11 p. Dep. v VINITI: 28.10.83, no. 5876.

5. Ivanov V.N., Dombrovskii I.V., Nabokov F.V. и др. Classification of the models of rigid multibody systems applied for the numerical analysis of mechanical structures dynamic behavior. The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, 2012. no. 2. pp. 139–155.

6. Ivanov V.N., Suslonov V.M. Uravneniya dvizheniya mekhanicheskikh sistem so strukturoj dereva. Problemy mekhaniki upravlyaemogo dvizheniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy. Perm, 1984. pp. 154–159.

7. Lilov L.K. Modelirovanie sistem svyazannykh tel. M.: Nauka, 1993. 272 p.

8. Lure A.I. Analiticheskaya mekhanika. M.: Gos. izd. fiz.-mat. lit., 1961. 824 p.

9. Shimanovskiy V.A., Ivanov V.N. Formirovanie uravnenij dvizheniya mekhanicheskikh sistem v obobschennykh koordinatakh. Problemy mekhaniki upravlyaemogo dvizheniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy. Perm, 2005. Vol. 37. pp. 188–201.

10. Shimanovskiy V.A., Ivanov V.N. Metody sostavleniya uravnenij dvizheniya sistem svyazannykh tverdykh tel v dekartovykh koordinatakh. Problemy mekhaniki upravlyaemogo dvizheniya. Nelinejnye dinamicheskie sistemy. Perm, 2007. Vol. 39. pp. 248–262.

11. Wittenburg J. Dynamics of multibody systems. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 223 p.

12. Shabana A.A. Computational dynamics. New York: Wiley, 2009. 542 p.