

УДК 621.74.06

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕЙСЯ ЗАГОТОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ МАШИНЕ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ

¹Крюков И.Ю., ²Наумова М.Г., ³Вдовин К.Н., ³Ларина Т.П.

¹Представительство компании *thyssenkrupp AG* в Российской Федерации, Москва, e-mail: *ir.kryukov@gmail.com*;

²ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, e-mail: *qwerty-rita@yandex.ru*;

³ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова», Магнитогорск, e-mail: *vdovin@magtu.ru*

Настоящая статья посвящена разработке математической модели, описывающей тепловое состояние и процесс кристаллизации заготовки прямоугольного поперечного сечения в процессе её вытяжки из горизонтальной машины полунепрерывного литья заготовок (ГМПЛЗ). В разработанной модели были учтены теплофизические свойства разливаемого цветного металла, его температура на входе в кристаллизатор, режим охлаждения заготовки в графитовом кристаллизаторе при наличии медного водоохлаждающего устройства. Кроме того, учитывалась асимметрия теплопередачи от верхней и нижней частей слитка в кристаллизатор, возникающая за счет усадки слитка и особенностей конструкции горизонтального кристаллизатора. Разработанная математическая модель позволяет определить для затвердевающей заготовки, как изменяются по времени: температурное поле затвердевающего слитка при различных технологических режимах работы ГМПЛЗ; границы твердой – двухфазной и жидкой – двухфазной областей; изменение толщины заготовки в процессе усадки материала слитка.

Ключевые слова: математическая модель, горизонтальное полунепрерывное литье, тепловое состояние, цветные металлы, температурные поля, графитовый кристаллизатор

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF THERMAL STATE OF CRYSTALLIZING BLANK RECTANGULAR IN SHAPE IN HORIZONTAL SEMI-CONTINUOUS CASTING MACHINE

¹Kryukov I.Yu., ²Naumova M.G., ³Vdovin K.N., ³Larina T.P.

¹Representative Office of *thyssenkrupp AG* in the Russian Federation, Moscow, e-mail: *ir.kryukov@gmail.com*;

²National University of Science and Technology MISiS, Moscow, e-mail: *qwerty-rita@yandex.ru*;

³Magnitogorsk State Technical University after Nosov (National Research University), Magnitogorsk, e-mail: *vdovin@magtu.ru*

This article is dedicated to the development of a mathematical model that describes thermal state and the process of crystallization of a blank rectangular in shape during its extraction from horizontal semi-continuous casting machine. By development of the model the thermal properties of the cast nonferrous metal, its temperature at the inlet of the mold, cooling conditions in the graphite mold having a copper water-cooled device were taken into account. Moreover, the asymmetry of a heat transfer from the upper and lower parts of the crystallizing ingot was considered, which arises due to the shrinkage of the ingot and specific design of the horizontal mold. The developed mathematical model allows to determine how the following aspects are changing over the time: temperature field of crystallizing ingot at different technological modes of horizontal semi-continuous casting machine; frontiers of solid/two-phase and liquid/two-phase fields; ingot thickness change during shrinkage of ingot material.

Keywords: mathematical model, horizontal semi-continuous casting, thermal state, nonferrous metals, temperature field, graphite mold

Разрабатываемая математическая модель предназначена для изучения теплового состояния кристаллизующейся заготовки прямоугольного сечения в горизонтальной машине полунепрерывного литья заготовок (ГМПЛЗ), в качестве которого используется сплав 960 пробы серебра [1, 7].

Рассмотрим кристаллизатор ГМПЛЗ для отливки прямоугольного сечения [2, 8]. Особенностью его конструкции яв-

ляется наличие нижней и верхней частей для графитового кристаллизатора и медного охлаждающего устройства (рис. 1). Основные геометрические размеры графитового кристаллизатора показаны на рис. 2, а медного охладителя – на рис. 3 [3]. Для получения отливки прямоугольного сечения 200×20 мм используется графитовый кристаллизатор и медный охладитель.

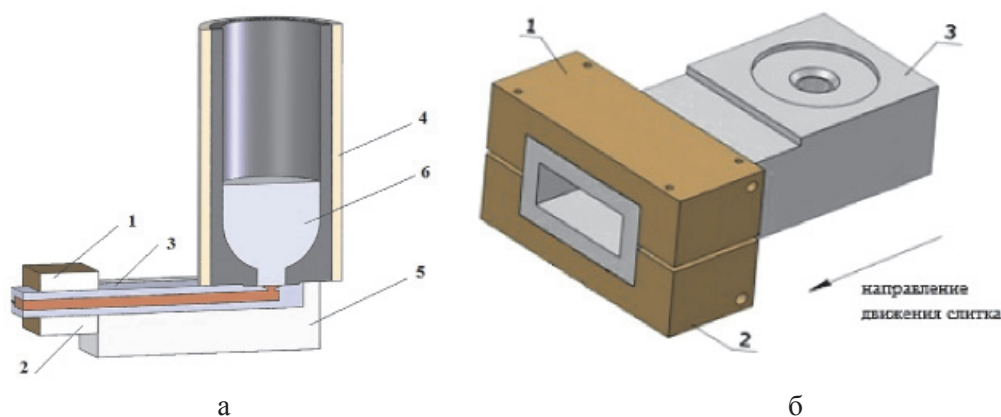


Рис. 1. Общий вид ГМПЛЗ для получения заготовок прямоугольного сечения (а) и графитовый кристаллизатор с медным охладителем (б):

1 – верхняя часть охлаждающего устройства; 2 – нижняя часть охлаждающего устройства; 3 – верхняя часть графитового кристаллизатора; 4 – тигель; 5 – теплоизолятор; 6 – расплав

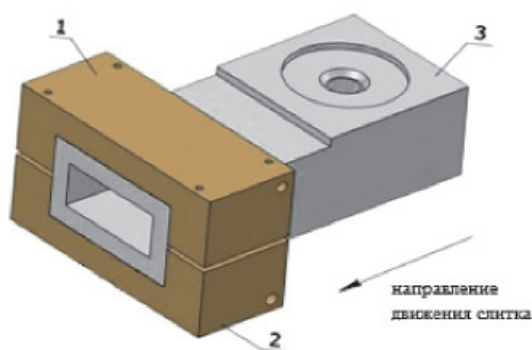


Рис. 2. Основные размеры ГМПЛЗ

Известно, что в жидкой фазе (жидком ядре слитка) тепло переносится не только теплопроводностью, но и конвекцией, например по данным работ по изучению теплового состояния слитка в кристаллизаторах МНЛЗ [4–6]. Причинами этого являются естественная конвекция перегретого расплава, перемешивание распла-

ва струей подаваемого жидкого металла, электромагнитные и другие воздействия на жидкое ядро слитка. Движение расплава в незатвердевшей части слитка существенно усложняет расчет затвердевания слитка, поскольку для корректного учета явлений тепло- и массопереноса в жидкой фазе необходимо, наряду с уравнением теплопроводности, принимать во внимание систему уравнений движения жидкости и неразрывности [4].

Упрощение задачи достигается при введении эффективного коэффициента теплопроводности жидкой фазы $\lambda_{эф}$, значение которого увеличено по сравнению с коэффициентом молекулярной теплопроводности $\lambda_{ж}$ в определенное число раз:

$$\lambda_{эф} = \epsilon_k \lambda_{ж},$$

где ϵ_k – коэффициент конвекции, зависящий от интенсивности движения расплава. Ввиду низкой начальной скорости струи металла в ГМПЛЗ принимаем $\epsilon_k = 1-2$ [4]. Таким

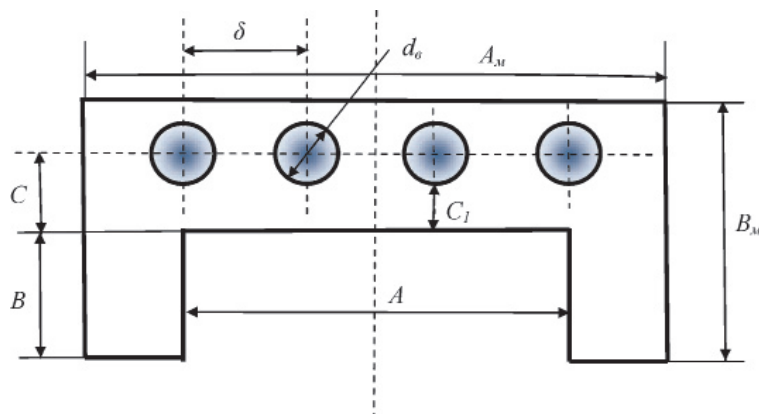


Рис. 3. Основные размеры медного охлаждающего устройства

образом, эффективная теплопроводность жидкой фазы может превышать теплопроводность неподвижной фазы. Возрастание эффективной теплопроводности в жидком металле при его перемешивании приводит к увеличению теплоотдачи на фронте фазового перехода, разогреву твердой фазы и соответственно увеличению теплоотдачи на поверхности слитка.

При работе в установившемся режиме рассматриваемый графитовый кристаллизатор ГМПЛЗ в разных точках имеет температуру от 100 до 600 °С. Для этого диапазона температур для теплопроводности λ_λ получено уравнение линейной регрессии:

$$\lambda(t) = 127,28 - 0,11657t, \text{ Вт/(м·К)},$$

где λ_λ – коэффициент теплопроводности для графита в направлении перпендикулярном прессованию.

С его использованием среднеинтегральное значение теплопроводности в этом диапазоне температур составляет

$$\lambda_r = \bar{\lambda} = \frac{1}{600-100} \int_{100}^{600} \lambda(t) dt \approx 86,5 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Известно, что серебро и его сплавы можно отливать при температуре всего лишь на 50 градусов выше температуры ликвидуса. Скорость разливки или скорость вытяжки в общем случае зависит от ширины заготовки, температуры расплава на входе в кристаллизатор и свойств металла. Основным фактором, определяющим скорость разливки, является толщина твердой корки на выходе из кристаллизатора. Скорость воды в каналах в общем случае зависит от ширины a , толщины b заготовки и скорости разливки v (таблица).

Основные допущения и ограничения математической модели

Задачу затвердевания заготовки решаем в декартовой системе координат. За начало

отсчета принимаем середину нижней стороны прямоугольника вертикального сечения внутреннего канала кристаллизатора, проходящего через ось тигля. Расположение осей координат и направление движения слитка \vec{v} показано на рис. 4. Видно, что в общем случае областью моделирования тепловых процессов является параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$.

При разработке математической модели теплового состояния слитка были приняты следующие допущения и ограничения:

1. Принимаем, что температура в данной точке слитка в стационарном режиме разливки не зависит от времени (в системе отсчета, связанной с Землей), то есть рассматриваем квазистационарный тепловой режим.

2. Считаем, что температура существенно меняется вдоль осей x и z . Дело в том, что толщина слитка b существенно меньше его ширины a , конструкция кристаллизатора и охладителя такова, что охлаждение более интенсивное со стороны граней $BB' C' C$ и $AA' D' D$ (рис. 3 и 4). Граничные условия на боковой грани $ABCD$ такие же, как на $A' B' C' D'$, то есть наблюдается симметрия температурных полей относительно плоскости $EFGH$, в которой $dT/dy = 0$. Для достижения поставленных задач моделирования с целью упрощения принимается $dT/dy \ll dT/dx$. Рабочей областью моделирования теплового состояния слитка является прямоугольник $EFGH$.

3. Для затвердевания жидкого металла используется квазиравновесная модель, при этом считается, что в двухфазной зоне отсутствует диффузионное переохлаждение.

4. В зоне охлаждения медным охладителем на его границе с графитовым кристаллизатором принимаем среднее значение коэффициента теплоотдачи, зависящего от конструкции охладителя и параметров охлаждающей воды.

Основные технологические параметры процесса вытяжки слитка из ГМПЛЗ

№ п/п	Наименование величины	Обозначение	Единица измерения	Величина
1	Перегрев расплава на выходе из плавильного тигля над точкой ликвидус	ΔT_0	°С	50100
2	Температура расплава на выходе из плавильного тигля	$T_0 = T_l + \Delta T_0$	°С	9201020
3	Скорость разливки	v	см/мин	1020
4	Температура охлаждающей воды	t_b	°С	25
5	Скорость воды в каналах	W_b	м/с	14

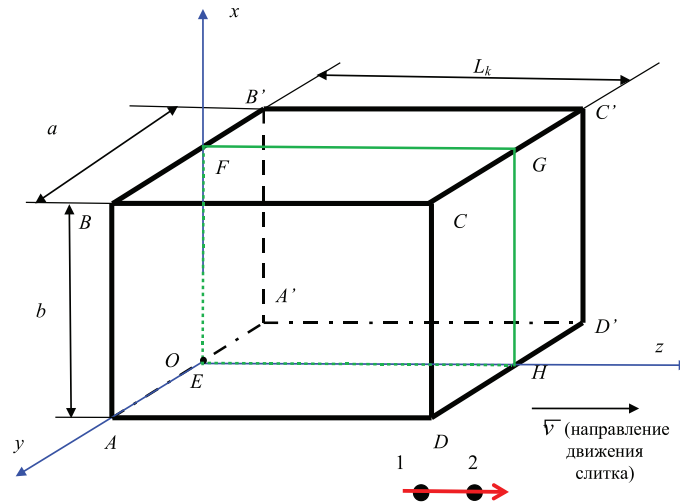


Рис. 4. Область моделирования теплового состояния слитка и выбранная декартова система координат

5. Считаем, что в направлении оси Oz тепло передается только конвекцией. Покажем это. Определяющим для соотношения роли конвекции и теплопроводности является число Пекле:

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{W_z \Delta z}{a},$$

где Δz – характерный размер вдоль движения, где наблюдается градиент температур dT/dz , это расстояние можно оценить как $L_k \approx 330 \text{ мм} = 0,33 \text{ м}$; $W_z = v$ – скорость разливки.

Минимальная скорость разливки $W_z = v = 10 \text{ см/мин} = 16,6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, коэффициент температуропроводности для твердой фазы вблизи T_s равен $a = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. При этих условиях $Pe \approx 5$. Известно, что при $Pe > 1$ можно пренебречь распространением тепла за счет теплопроводности. Это означает, что если выбрать любые две точки 1 и 2, имеющие одинаковые координаты x, y и разные координаты z ($z_2 > z_1$), то температура второй точки зависит от температуры первой, а температура первой не зависит от второй при выбранном направлении движения слитка (рис. 4).

Математическая модель теплового состояния слитка

В основе математической модели теплового состояния слитка лежит нелинейное уравнение теплопроводности, которое дополняется начальными и граничными условиями; при этом учет теплоты затвердевания производится с помощью квазиравновесной теории двухфазной зоны.

Согласно первому и второму допущениям распределение температуры в затвердевающем слитке в системе отсчета, связанной с Землей, описывается стационарным уравнением энергии с учетом внутреннего источника тепла:

$$\begin{aligned} \text{ср}v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v(x, y, z, \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Выделим в двухфазной зоне слитка контрольный объем V_0 и введем в рассмотрение относительное количество твердой фазы $\Psi = \frac{V_{\text{тв}}}{V_0}$ – отношение объема, занимаемого твердой фазой, к полному объему выделенного элемента двухфазной зоны (доля твердой фазы). Параметр Ψ для жидкой фазы равен нулю $\Psi|_{T=T_l} = 0$, для полностью затвердевшей части слитка равен единице $\Psi|_{T=T_s} = 1$ и для двухфазной зоны изменяется от нуля до единицы, T_s, T_l – температура солидуса и ликвидуса материала заготовки соответственно [4].

Будем полагать, что функция источника тепла $q_v(x, y, z, \tau)$ прямо пропорциональна локальной скорости затвердевания расплава $q_v(x, y, z, \tau) = \rho L \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$, причем удельная теплота плавления L играет роль коэффициента пропорциональности.

Рассмотрим тепловое состояние тела в системе координат, связанной с произвольным сечением заготовки, движущимся вместе со слитком. Учитывая соотношение $dz/d\tau = v$, получим

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \rho L \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2)$$

Скорость затвердевания расплава $\partial \psi / \partial \tau$ в уравнении (2) в общем случае определяется закономерностями роста кристаллов в переохлажденном расплаве. Однако в настоящее время закономерности зарождения и роста кристаллов для большинства металлов и сплавов изучены недостаточно полно. В связи с этим скорость затвердевания расплава определяется на основе гипотезы о квазиравновесном протекании процесса затвердевания [4]. Согласно этой гипотезе, если кристаллизация сплава идет довольно медленно, то есть полностью протекают процессы диффузионного обмена примесью между жидкой и твердой фазами, а также внутри самих фаз, то соблюдается равновесный процесс кристаллизации сплава и относительное количество твердой фазы, находящейся в равновесии с жидкостью при температуре T , может быть определено из диаграммы состояния сплава по правилу рычага.

В наиболее простом случае сечение твердой фазы ψ определяется кусочно-непрерывной функцией, график которой представлен на рис. 5.

$$\psi(T) = \begin{cases} 0, & \text{при } T > T_l; \\ \frac{T_l - T}{T_l - T_s}, & \text{при } T_s \leq T \leq T_l; \\ 1, & \text{при } T < T_s. \end{cases} \quad (3)$$

$$C_3(T) = \begin{cases} C_{ж}, & \text{при } T > T_l; \\ C_T(T_s)\psi + C_{ж}(T_l)(1-\psi) - L \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, & \text{при } T_s \leq T \leq T_l; \\ C_T(T), & \text{при } T < T_s; \end{cases} \quad (6)$$

$$\lambda(T) = \begin{cases} \varepsilon_k \lambda_{ж}, & \text{при } T > T_l; \\ \lambda_{\tau} + \frac{\varepsilon_k \lambda_{ж} - \lambda_{\tau}}{T_l - T_s} (T - T_s), & \text{при } T_s \leq T \leq T_l; \\ \lambda_{\tau}, & \text{при } T < T_s; \end{cases} \quad (7)$$

$$\rho(T) = \begin{cases} \rho_{ж}, & \text{при } T > T_l; \\ \rho_T \psi + \rho_{ж} (1 - \psi), & \text{при } T_s < T < T_l; \\ \rho_T(T), & \text{при } T < T_s. \end{cases} \quad (8)$$

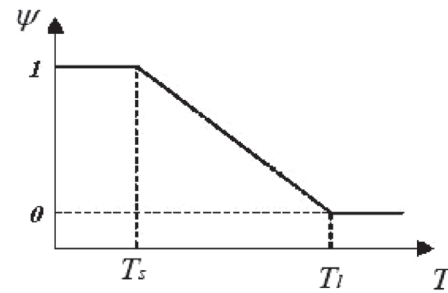


Рис. 5. Вид функции относительного содержания твердой фазы $\psi(T)$

В этом случае темп кристаллизации сплава внутри интервала от T_l до T_s является постоянной величиной, равной

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{1}{T_l - T_s}. \quad (4)$$

С учетом допущения о возможности пренебречь распространением тепла за счет теплопроводности в направлении Oz и используя подстановку

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau},$$

уравнение (2) можно записать как

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \rho \left(c - L \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

или более подробно

$$\rho C_3 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5)$$

где $\tau = 0 - L_k / v$; C_3 , λ , ρ – эффективная теплоемкость, теплопроводность и плотность материала затвердевающего слитка.

Эффективная теплоемкость, теплопроводность и плотность материала затвердевающего слитка представляются кусочно-непрерывными функциями [5]:

Для решения краевой задачи уравнение (5) необходимо дополнить начальным и граничными условиями.

Начальное условие определяет температурное поле расплава в начальный момент времени на выходе из плавильного тигля (при $\tau = 0, 0 < x < b$)

$$T(x, 0) = T_0 = T_L + \Delta T_0. \quad (9)$$

На сторонах FG и EH слитка (рис. 4), находящихся в контакте с рабочей стенкой кристаллизатора, задаются следующие граничные условия.

Для определения граничного условия при теплоотдаче от затвердевающей жидкости использовался метод конечных объемов. Для элемента объема, имеющего форму параллелепипеда $f \Delta x$, лежащего вблизи поверхности охлаждающей стенки площадью f , должно выполняться условие теплового баланса. Количество отводимого тепла кристаллизатором q при температуре металла выше T_s равно количеству тепла фазового перехода, описываемого эффективной теплоемкостью элемента объема $C_{эф} \Delta x \rho dT/d\tau$, и количеству тепла, переданного из объема расплава $-\lambda \partial T/\partial x$.

Исходя из этого граничные условия:

для $x = b, z = \tau \cdot v$

при $T > T_s$,

$$q_{up}(z) = C_s \cdot \Delta x \cdot \rho \frac{dT}{d\tau} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=b};$$

при $T \leq T_s$,

$$q_{up}(z) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=b}; \quad (10)$$

для $x = 0, z = \tau \cdot v$

при $T > T_s$,

$$q_{dn}(z) = C_s \cdot \Delta x \cdot \rho \frac{dT}{d\tau} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0};$$

при $T \leq T_s$,

$$q_{dn}(z) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (11)$$

где $q_{up}(z), q_{dn}(z)$ – тепловые потоки в кристаллизатор с верхней и нижней поверхностей слитка.

Таким образом, полученные уравнения (5)–(11) составляют математическую модель теплового состояния слитка в ГМПЛЗ.

В результате проведенной работы развита математическая модель, описывающая тепловое состояние и процесс кристаллизации заготовки из драгоценного сплава, отливаемого на ГМПЛЗ небольшой производительности и позволяющая определить для затвердевающей заготовки, как изменится по времени температурное поле слитка при различных технологических режимах работы ГМПЛЗ.

Список литературы

1. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: справ. изд. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.
2. Кристаллизатор горизонтальной машины непрерывного литья заготовок из цветных металлов и сплавов: пат. 122052 Рос. Федерация № 2012122677/02; опубл. 20.11.12, Бюл. № 32.
3. Охлаждающее устройство кристаллизатора горизонтальной машины непрерывного литья заготовок из цветных металлов и сплавов: пат. 120901 Рос. Федерации № 2012118969/02; опубл. 10.10.2012, Бюл. № 28.
4. Самойлович Ю.А. Тепловые процессы при непрерывном литье стали. – М.: Металлургия, 1982. – 152 с.
5. Цаплин А.И. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие. – Пермь: Из-во Пермского гос. техн. ун-та, 2008. – 230 с.
6. Gorbatyuk S.M., Gerasimova A.A., Radyuk A.G. Using the coating for the diffusion layer obtaining on the walls of the mold (CCM) // Metallurgical and Mining Industry. – 2015. – Vol. 9. – P. 1085–1088.
7. Bast J., Gorbatyuk S.M., Kryukov I.Yu. Horizontal HCC-12000 unit for the continuous casting of semi finished products // Metallurgist. – 2011. – Vol. 55. – № 1–2. – P. 116–118.
8. Bast J., Gorbatyuk S.M., Kryukov I.Yu. Study of the temperature fields in the mold of a horizontal continuous caster // Metallurgist. – 2011. – Vol. 55. – № 3–4. – P. 163–166.

References

1. Zinovev V.E. Teplofizicheskie svojstva metallov pri vysokih temperaturah: sprav. izd. M.: Metallurgija, 1989. 384 p.
2. Kristallizator gorizontальной mashiny nepreryvnogo litja zagotovok iz cvetnyh metallov i splavov: pat. 122052 Ros. Federacija no. 2012122677/02; opubl. 20.11.12, Bjul. no. 32.
3. Ohlazhdajushhee ustrojstvo kristallizatora gorizontальной mashiny nepreryvnogo litja zagotovok iz cvetnyh metallov i splavov: pat. 120901 Ros. Federacii no. 2012118969/02; opubl. 10.10.2012, Bjul. no. 28.
4. Samojlovich Ju.A. Teplovye processy pri nepreryvnom lite stali. M.: Me-tallurgija, 1982. 152 p.
5. Caplin A.I. Teplofizika v metallurgii: ucheb. posobie: izvo Permskogo gos. tehn. un-ta, 2008. 230 p.
6. Gorbatyuk S.M., Gerasimova A.A., Radyuk A.G. Using the coating for the diffusion layer obtaining on the walls of the mold (CCM) // Metallurgical and Mining Industry. 2015. Vol. 9. pp. 1085–1088.
7. Bast J., Gorbatyuk S.M., Kryukov I.Yu. Horizontal HCC-12000 unit for the continuous casting of semi finished products // Metallurgist. 2011. Vol. 55. no. 1–2. pp. 116–118.
8. Bast J., Gorbatyuk S.M., Kryukov I.Yu. Study of the temperature fields in the mold of a horizontal continuous caster // Metallurgist. 2011. Vol. 55. no. 3–4. pp. 163–166.