УДК 339.732:004.414

ФОРМИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ С «ВОЗМУЩЕННЫМИ» ПАРАМЕТРАМИ

Шукаев Д.Н., Ким Е.Р., Ергалиева Н.О.

Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, e-mail: dshuk@mail.ru, kimer77@mail.ru, naz_er@bk.ru

В условиях рыночной экономики от эффективности и бесперебойности функционирования инвестиционной деятельности зависит не только своевременное получение средств отдельными хозяйственными единицами, но и темпы экономического развития страны в целом. В статье рассмотрена задача формирования инвестиционного портфеля банка и приведена ее математическая постановка. На основе анализа распределения случайных составляющих доходности инвестиций на уровнях компании, сектора и всего рынка выявлен характер возмущенности параметров модели сформулированной задачи. Получены и доказаны условия взаимосвязи между решениями исходной «возмущенной» задачи и задачи без учета таких параметров. Для нахождения оптимального инвестиционного портфеля разработан модифицированный алгоритм на основе метода расширения множества допустимых значений, который обеспечивает точное и устойчивое решение данной задачи.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, модель формирования инвестиционного портфеля, метод расширения

FORMATION OF AN INVESTMENT PORTFOLIO WITH A «PERTURBATION» PARAMETERS

Shukaev D.N., Kim E.R., Ergalieva N.O.

National Research Technical University named after K.I. Satpayev, Almaty, e-mail: dshuk@mail.ru, kimer77@mail.ru, naz_er@bk.ru

As the recent financial crisis has clearly shown disruptions to the smooth operation of the investment activity might affect not only the financial positions of individual companies but also the economic growth performance of entire countries. This article formulates a mathematical representation of a bank's optimal investment portfolio problem. We characterize the nature of parameter uncertainty for the portfolio problem based on stochastic distributions of investment returns of individual companies, of economic sectors, and of the market returns. We derive the analytical relations between the solutions of the original stochastic problem with the parameter uncertainty, and the solutions of simpler problems, which do not take account of parameter uncertainty. We further develop a modified solution algorithm for the portfolio problem based on the method of an expanded admissible set. The new solution method provides accurate and stable solutions of the problem.

Keywords: investment portfolio, a model of an investment portfolio, an extension method

Для развития экономики любого государства необходимо гармоничное развитие сферы финансов и инвестиций. Основную роль в данном направлении играет банковская система. В современных условиях экономическая эффективность деятельности банка основывается на оправданной рыночной стратегии размещения и привлечения ресурсов с точки зрения доходности, ликвидности и минимизации рисков. Эффективность работы банка определяется одним критерием кредитных и депозитных портфелей. Плохое качество портфеля банка напрямую ведет к его банкротству. Равно как умелое управление источниками ресурсов и эффективное распределение их между доступными финансовыми инструментами и направлениями инвестирования (кредиты, ценные бумаги и т.п.) влечет высокую маржу и высокую прибыльность.

Основными принципами формирования инвестиционного портфеля являются надежность и доходность вложений, их стабильный рост и высокая ликвидность. Целью оптимизации портфеля ценных бумаг является формирование такого портфеля ценных бумаг, который бы соответствовал требованиям инвестора или предприятия, как по доходности, так и по возможному риску, что достигается путем распределением ценных бумаг в портфеле. При инвестировании ценных бумаг инвестор формирует портфель этих бумаг и использует для этого наиболее известные и апробированные на практике модели: Марковица [5, 7], Шарпа [8], Тобина [1] и другие. Для решения данных задач можно применить методы квадратичного программирования, метод множителей Лагранжа и др. [9].

Однако все эти методы эффективны только в том случае, если задачи формирования оптимального инвестиционного портфеля сформулированы корректно.

На практике многие параметры определяются приближенно, и это приводит к некорректной постановке «возмущенных» оптимизационных задач с характерной для них неустойчивостью и приближенностью полученных решений [2].

В [6, 10–12] авторами данной статьи предложен метод расширения множества допустимых значений для решения «возмущенных» задач распределения и размещения ресурсов и объектов, обеспечивающий нахождение точных и устойчивых решений.

В предлагаемой работе, рассматривающей очередной этап предынвестиционного анализа банков развития [3, 4], метод расширения обобщен для задачи формирования оптимального инвестиционного портфеля банка, которую можно отнести к классу нелинейных оптимизационных задач.

Математическая постановка задачи

Допустим, банк (или другой инвестор) имеет S миллионов долларов, чтобы инвестировать в ценные бумаги компаний из K разных секторов экономики. Каждая компания i из сектора k обязуется платить дивиденды (или проценты) на эти ценные бумаги в течение какого-то периода времени, после чего она обязуется возвратить сумму займа. Допустим компания 1 обязуется платить согласованную квартальную процентную ставку в течение T_1 кварталов на каждый доллар займа. Другая компания обещает платить увеличивающийся процент в течение T_2 кварталов. Третья компания обещает выплатить всю сумму с накопленными процентами через T_3 кварталов и т.д.

Так как компании могут иметь трудности в будущем, то Банк рассматривает эти платежи как случайные величины, которые могут быть больше или меньше, чем обещанные. Задача банка разместить инвестиционные ресурсы так, чтобы избежать или минимизировать риск потери денег с учетом обеспечения планируемого объема дохода от портфеля и приемлемых значений наиболее важных параметров инвестиционного процесса

Формально задача банка может выглядеть следующим образом: минимизация ожидаемой вариации суммы будущих платежей

$$\min_{x_i^k \ge 0} \operatorname{var}\left[\sum_{n=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k \sum_{t=0}^{T}\beta^t \gamma_{i,t}^k\right)\right]. \qquad (1)$$

С учетом обеспечения ожидаемой величины чистой приведенной стоимости (NPV)

$$E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k \sum_{t=0}^{T}\beta^t \gamma_{i,t}^k\right)\right] B \qquad (2)$$

и выполнения диверсификационных ограничений

$$\sum_{i=1}^{n^k} x_i^k \le P_k S \text{ для всех секторов } k = \overline{1,K}, \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k} x_i^k = S. \qquad (4)$$

В поставленной выше задаче использованы следующие обозначения:

1) $x_i^k \ge 0$ – денежные инвестиции в компанию i из сектора k, где $i = 1, 2, \ldots, n^k$;

2) $\beta \in (0, 1)$ – дисконтный фактор, который банк использует, чтобы оценивать платежи из последующих кварталов;

3) индекс T – максимальное количество кварталов, в течение которых по крайней мере какие-нибудь компании должны выплачивать займы (максимальный срок займов);

4) K – количество разных секторов. А число n^k – это количество компаний из сектора k, которые банк рассматривает включить в свой портфель;

5) $\gamma_{i,t}^k$ – платеж компании i из сектора k в квартал t. Банк принимает величины $\gamma_{i,t}^k$ как случайные параметры своей задачи (рыночные процентные ставки);

6) B – ожидаемая доходность банковского портфеля;

7) P_k – параметр диверсификации, принимающий значение от 0 до 1.

Анализ распределения платежей

При согласовании величин платежей между инвестором и компанией обычно ориентируются не только на индивидуальную составляющую доходности конкретной компании, но и на общую составляющую доходности всего рынка R^M и среднюю доходность компаний соответствующего сектора r^k. Следовательно, процентную ставку $\gamma_{i,t}^k$ можно разложить следующим образом:

$$\gamma_{i,t}^k = b_{i,k}^M R_t^M + c_i^k r_t^k + \varepsilon_{i,t}^k, \qquad (5)$$

где $b_{i,k}^M$ и c_i^k определяют насколько чувствительны доходы компании i из сектора k к изменениям во всем рынке или в отдельном секторе (factor loadings), а $\varepsilon_{i,t}^{k}$ – это индивидуальная составляющая доходности компании i из сектора k. Коэффициенты $b_{i,k}^{M}$ и c_{i}^{k} обычно находятся с помощью простой линейной регрессии.

Предположим, что $\varepsilon_{i,t}^{k}$ независима от индивидуальных составляющих доходности других компаний, так что для $i \neq j$:

$$Cov\left(\left(\sum_{t=0}^{T}\beta^{t}\varepsilon_{i,t}^{k}\right),\left(\sum_{t=0}^{T}\beta^{t}\varepsilon_{j,t}^{m}\right)\right)=0.$$

Также предполагается, что r_{t}^{k} независима от секторных составляющих доходности других секторов, следовательно для $k \neq m$:

$$Cov\left(\left(\sum_{t=0}^{T}\beta^{t}r_{t}^{k}\right),\left(\sum_{t=0}^{T}\beta^{t}r_{t}^{m}\right)\right)=0.$$

С учетом введенных предположений выражение для ожидаемого значения NPV можно привести к следующему виду:

$$E_0[NPV]=E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\gamma_{i,t}^k\right)\right]=$$

$$=E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(b_{i,k}^M R_t^M+c_i^k r_t^k+\varepsilon_{i,t}^k\right)\right)\right]=$$

$$=\left\{E_0\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k b_{i,k}^M\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(R_t^M\right)\right)+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k c_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t(r_t^k)\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(\varepsilon_{i,t}^k\right)\right)\right]\right\}=$$

$$=\left\{E_0\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t(R_t^M)\sum_{k=1}^{k}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k b_{i,k}^M\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(r_t^k\right)\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k c_i^k\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(\varepsilon_{i,t}^k\right)\right)\right]\right\}=$$

$$=\left\{E_0\left[Y^M\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(R_t^M\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}Y^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(r_t^k\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(\varepsilon_{i,t}^k\right)\right)\right]\right\},$$

где $Y^M\equiv\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k b_{i,k}^M\right)$; $Y^k\equiv\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k c_i^k\right)$.

Аналогично преобразуем и выражение для вариации NPV

$$\mathrm{var}\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\gamma_{i,t}^k\right)\right]=$$

$$=\mathrm{var}\left\{\left[Y^M\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(R_t^M\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{K}Y^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(r_t^k\right)\right]+\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(\varepsilon_{i,t}^k\right)\right)\right]\right\},$$

которая в силу предположения о независимости распределений равна

$$\mathrm{var}\left[Y^M\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(R_t^M\right)\right]+\sum_{k=1}^{K}\left(Y^k\right)^2 var\left[\sum_{t-0}^{T}\beta^t\left(r_t^k\right)\right]+\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\right)^2 var\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left[\varepsilon_{i,t}^k\right]\right]=$$

$$=\left(Y^M\right)^2\sigma_M^2+\sum_{k=1}^{K}\left(Y^k\right)^2\sigma_k^2+\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\right)^2\sigma_{i,k}^2,$$

где $\sigma_M^2\equiv var\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(R_t^M\right)\right]$; $\sigma_k^2\equiv var\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(T_t^k\right)\right]$; $\sigma_{i,k}^2\equiv var\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(\varepsilon_{i,t}^M\right)\right]$.

С учетом этих преобразований задача (1)–(4) примет вид

$$F=\left(Y^M\right)^2\sigma_M^2+\sum_{k=1}^{K}\left(Y^k\right)^2\sigma_k^2+\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\right)^2\sigma_{i,k}^2\to\min; \tag{6}$$

$$E_0\left[Y^M\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(R_t^M\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}Y^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(r_t^k\right)\right]+E_0\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\sum_{t=0}^{T}\beta^t\left(\varepsilon_{i,t}^k\right)\right)\right]\geq B; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n^k} x_i^k \le P_k S, \quad k = \overline{1,k}; \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k} x_i^k = S. \tag{9}$$

Общая схема метода расширения для решения задачи формирования банковского портфеля

Решение выше сформулированной задачи не вызывает затруднений кроме тех случаев, когда платежи компаний характеризуются коэффициентами $\gamma_{i,t}^k$, имеющими незначительные отклонения от некоторого общего их значения. Такая «возмущенность», например, в виде выражения (5) имеет место при составлении многих банковских портфелей. Применение обычных методов квадратичной оптимизации при наличии «возмущенного» ограничения приводит к неустойчивости решения таких задач, поэтому необходима некоторая процедура регуляризации задачи [11]. Ее суть состоит в установлении связи между решениями исходной задачи (6)–(9), которую назовем «возмущенной», и более простой «расширенной» задачей:

$$F = \left(Y^M\right)^2 \sigma_M^2 + \sum_{k=1}^{K}\left(Y^k\right)^2 \sigma_k^2 + \\ + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k}\left(x_i^k\right)^2 \sigma_{i,k}^2 \to \min; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n^k} x_i^k \le P_k S \quad k = \overline{1,K}; \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n^k} x_i^k = S, \tag{12}$$

полученной из (6)–(9) при исключении ограничения (7).

Установим связь между множествами допустимых решений X и $X^{\text{расш}}$, соответственно исходной (6)–(9) и расширенной (10)–(12) задач. Для этого сформулируем две леммы.

Лемма 1. «Допустимое множество решений X исходной задачи (4)–(8) всегда является подмножеством множества решений расширенной задачи (9)–(11), т.е. $X \subseteq X^{\text{расш}}$». Справедливость данного утверждения следует из структуры этих задач.

Лемма 2. «Оптимальное решение исходной задачи совпадает с оптимальным решением расширенной задачи только тогда, когда:

1) множества допустимых решений этих задач эквивалентны;

2) оптимальное решение расширенной задачи принадлежит множеству X, т.е. $x^{\text{расш}} \in X$».

Доказательство. Действительно, целевые функции исходной (5) и расширенной (9) задач одинаковы, следовательно, идентичность множеств допустимых решений этих задач приводит к эквивалентности самих задач, а следовательно, и их оптимальных решений. Далее, так как $F^{\text{расш}}$ = suprenum F, следовательно, ни одно ограничение исходной задачи не может расширить множество, определяемое ограничениями расширенной задачи. Поэтому любой переход от точки $x^{\text{расш}} \in X^{\text{расш}}$ к другой точке $x \in X$ будет ухудшать значение целевой функции или, другими словами, этот переход будет означать спуск от $F^{\text{расш}}$ к другому значению целевой функции.

В соответствии со сказанным приведем следующую общую схему решения задачи формирования оптимального портфеля методом расширения [10]:

1. Решение расширенной задачи.
2. Проверка полученного решения на допустимость по ограничению (7) исходной задачи. Если решение допустимо, то оно оптимально.
3. Выбор направления и шага спуска.
4. Переход к новому решению.

Новое решение, полученное в результате спуска, будет очевидно оптимальным, если спуск в выбранном направлении приводит к наименьшему изменению значения целевой функции по сравнению с другими направлениями.

Главным и определяющим этапом данной схемы является третий этап.

Выбор направления и шага спуска

Пусть решение расширенной задачи $x^{\text{расш}}$ не удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи и необходимо перейти к новому решению

$$x = x^{\text{расш}} + h.$$

Элементы вектора вычисляются по схеме

$$h_j = \begin{cases} -h_{ml}, & \text{если} \quad j = m; \\ h_{ml}, & \text{если} \quad j = l; \\ 0, & \text{если}\,, \quad j \ne ml, \end{cases}$$

где $h_{ml} = \dfrac{B_d^{\text{расш}} - B_d}{a_{dm} - a_{dl}}$; m – индекс элемента вектора $x^{\text{расш}}$, из которого производится спуск; l – индекс элемента, в который осуществляется спуск; d – индекс нарушенного ограничения вида (7); $A = \|a_{ml}\|$ – матрица коэффициентов ограничения вида (7).

Для выбора параметров m, l в формуле (13) сформулируем следующее утверждение [6]: «Точка $x = x^{\text{расш}} + h$ является решением задачи (6)–(9) тогда и только тогда, когда параметры m, l определяются из условия

$$(m,l) = \min_{(m,l)\in N_V}\left\{(\psi_{ml} - \psi_{mm} - \psi_{ll})\frac{\left(B_d^{\text{расш}} - B_d\right)^2}{\left(a_{dm} - a_{dl}\right)^2}\right\},$$

где ψ_{ml} – элементы матрицы Y коэффициентов, стоящих перед нелинейной частью целевой функции (6)».

Алгоритм метода расширения для решения задачи формирования банковского портфеля

Шаг 1. Решение расширенной задачи (10)–(12).

Шаг 2. Проверка полученного решения на допустимость по ограничениям (7) исходной задачи. Если решение допустимо, то оно оптимально. В противном случае переход к шагу 3.

Шаг 3. Вычисление значений

$$\vartheta_{ml} = \psi_{ml} - \psi_{mm} - \psi_{ll}, \quad m = \overline{1,n},$$

$$l = m + c, \ \forall c = \overline{1, n-m}$$

и определение возможных направлений спуска N_V из условия

$$N_V = \left\{(m,l)/\vartheta_{ml} > 0\right\}.$$

Шаг 4. Определение наилучшего направления спуска:

$$\left(m^*, l^*\right) = \min_{(m,l)\in N_V}\left\{\frac{\vartheta_{ml}\left(B_d^{\text{расш}} - B_d\right)^2}{\left(a_{m^*} - a_{l^*}\right)^2}\right\}.$$

Шаг 5. Вычисление величины шага спуска:

$$h_{m^*l^*} = \frac{B_d^{\text{расш}} - B_d}{a_{m^*} - a_{l^*}}.$$

Шаг 6. Переход к новому решению $x = x^{\text{расш}} + h$ и возвращение к шагу 2.

Заключение

На практике используют множество методов формирования оптимальной структуры портфеля ценных бумаг, однако как было сказано выше, все эти методы эффективны только в том случае, если задачи формирования оптимального инвестиционного портфеля сформулированы корректно. В статье проведен анализ распределения платежей и приведена общая схема метода расширения для решения задачи формирования банковского портфеля, с учетом нестабильности и «возмущенности» параметров моделей задач. Так же на основе сформулированных лемм разработан алгоритм метода расширения для решения задачи формирования банковского портфеля, который позволяет инвесторам в условиях быстро развивающейся рыночной экономики повышать эффективность инвестиционной деятельности. Считаем, что представленная модель формирования инвестиционного портфеля банка с возмущенными параметрами и алгоритм её решения являются достаточно универсальными и актуальны не только для реализации государственной стратегии в данном направлении, но и для осуществления коммерческих интересов любого банка, включая и банк развития.

Список литературы

1. Малыхин В.И. Финансовая математика: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 237 с.

2. Тихонов А.И. О методах регуляризации задач оптимального управления // ДАН СССР, 1965. – Т. 162, № 4. – С. 42–50.

3. Шукаев Д.Н., Ергалиева Н.О. Принятие инвестиционных решений в условиях неопределенности // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11–3. – С. 444–446.

4. Шукаев Д.Н., Ким Е.Р., Абдикадырова А.А. Функциональные задачи предынвестиционной деятельности банка развития // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 10–4. – С. 605–610.

5. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. – New York: Wiley, 1959.

6. Shukayev D.N., Abdullina V.Z., Yergaliyeva N.O., Lamasheva Zh.B. Modeling the processes of distribution of resource flows // Proceedings of the Romanian academy, Series A. – 2014. – Vol. 15, № 1. – P. 85–94.

7. Markowitz H.M. Portfolio Selection // Journal of Finance. – 1952. – № 7. – С. 7–91.

8. Sharpe W.F. A simplified model for portfolio analysis // Management Science. – 1963. – С. 277–293.

9. Lancaster K. Mathematical economics. – New York, 1968. – 464 p.

10. Shukaev D.N., Kim E.R. Extension method in location problem with discrete objects. Proceedings of the 21st IASTED International Conference «Modelling and Simulation (MS 2010)». – Banff, Alberta, Canada, 2010. – P. 270–274.

11. Shukayev D.N., Kim Ye.R., Shukayev M., Kozhamkulova Zh. Modeling allocation of parallel flows with general resource. Proceeding of the 22st IASTED International Conference «Modelling and Simulation (MS 2011)». –Calgary, Alberta, Canada, 2011. – P. 110–117.

12. Shukayev D.N., Kim E.R., Shukayev M.D., Ergalieva N.O., Mereke A.A. Modeling resource flows and allocations in systems with parallel structure. Proceeding of the IASTED International Conference «Applied Simulation and Modelling (ASM 2012)». – Napoli, Italy, 2012. – P. 110–117.

Reference

1. Malykhin V.I. Finansovaya matematika: Ucheb. posobie dlya vuzov. 2-e izd., pererab. i dop. M.: YUNITI-DANA, 2003. 237 p.

2. Tikhonov A.I. O metodakh regulyarizatsii zadach optimalnogo upravleniya // DAN SSSR, 1965. T.162, no. 4. pp. 42–50.

3. Shukayev D.N., Yergalyieva N.O. Prinyatie investitsionnykh resheniy v usloviyakh neopredelennosti // Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamentalnykh issledovaniy. 2015. no. 11 (chast 3). pp. 444–446.

4. Shukayev D.N., Kim Ye.R., Abdikadyrova A.A. Funktsionalnye zadachi predynvestitsionnoy deyatelnosti banka razvitiya // Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamentalnykh issledovaniy. 2015. no. 10 (chast 4). pp. 605–610.

5. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York: Wiley, 1959.

6. Shukayev D.N., V.Z. Abdullina, N.O. Yergaliyeva, Zh.B. Lamasheva. Modeling the processes of distribution of resource flows // Proceedings of the Romanian academy, Series A. –2014. Vol. 15, no. 1. pp. 85–94.

7. Markowitz H.M. Portfolio Selection // Journal of Finance, no. 7, 1952, pp. 7–91.

8. Sharpe W.F. A simplified model for portfolio analysis // Management Science, 1963, pp. 277–293.

9. Lancaster K. Mathematical economics. New York. 1968. 464 p.

10. Shukaev D.N., Kim E.R. Extension method in location problem with discrete objects. Proceedings of the 21st IASTED International Conference «Modelling and Simulation (MS 2010)», Banff, Alberta, Canada, 2010, pp. 270–274.

11. Shukayev D.N., Kim Ye.R., Shukayev M., Kozhamkulova Zh. Modeling allocation of parallel flows with general resource. Proceeding of the 22st IASTED International Conference «Modelling and Simulation (MS 2011)», Calgary, Alberta, Canada, 2011, pp. 110–117.

12. Shukayev D.N., Kim E.R., Shukayev M.D., Ergalieva N.O., Mereke A.A. Modeling resource flows and allocations in systems with parallel structure. Proceeding of the IASTED International Conference «Applied Simulation and Modelling (ASM 2012)», Napoli, Italy, 2012, pp. 110–117.