УДК 681.51

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РЯДАМИ ВОЛЬТЕРРА

Цибизова Т.Ю.

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», Москва, e-mail: mumc@bmstu.ru

Работа посвящена вопросам идентификации нелинейных систем автоматического управления. Конструктивным подходом в решении данной задачи является использование фильтрующей структуры в виде последовательности Вольтерра. Рассматривается реализация фильтра Вольтерра 2-го порядка, его математическое описание, определяются линейный и квадратичный веса фильтра, минимизирующие среднюю квадратичную ошибку. Предложен адаптивный алгоритм реализации фильтра Вольтерра 2-го порядка, в котором операторы линейного и квадратичного фильтра могут быть скорректированы как расширение алгоритма наименьшего среднего квадратического. На основе средней квадратичной ошибки определен ее асимптотический остаток при адаптивной реализации. Сделан вывод о том, что применение адаптивного алгоритма может дать эффективные гибкие подходы для разработки и реализации фильтра Вольтерра 2-го порядка. С другой стороны, распространение полученных результатов на фильтр Вольтерра более высокого порядка является интересным объектом дальнейшего исследования.

Ключевые слова: идентификация нелинейных систем, адаптивный алгоритм, средняя квадратичная ошибка, линейный фильтр, квадратичный фильтр, оптимальный фильтр

ADAPTIVE ALGORITHM FOR IDENTIFICATION OF NONLINEAR SYSTEMS BY VOLTERRA SERIES

Tsibizova T.Yu.

Federal State Budgetary Education Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University», Moscow, e-mail: mumc@bmstu.ru

This article is devoted to identification of nonlinear systems of automatic control. A constructive approach to solving this problem is the use of filter structure as a sequence of Volterra. Describes the implementation of the Volterra filter of 2nd order, its mathematical description, are defined by linear and quadratic weight filter that minimizes the mean square error. The proposed adaptive algorithm for implementation of the Volterra filter of 2nd order in which the operators are linear and the quadratic filter can be adjusted as an extension of the algorithm of least mean square. On the basis of the mean square error defined by its asymptotic remainder in the adaptive implementation. It is concluded that the application of the adaptive algorithm can give an effective, flexible approaches to development and implementation of the Volterra filter of 2nd order. On the other hand, the distribution of the results on the Volterra filter of higher order is an interesting area for further research.

Keywords: identification of nonlinear systems, adaptive algorithm, mean square error, linear filter, quadratic filter, optimal filter

Решение задач управления динамическими объектами предполагает использование математической модели исследуемого процесса. Математические модели, полученные на основе физических или каких-либо других законов, в практических приложениях, как правило, не всегда точно отражают исследуемые процессы. Поэтому для уточнения структуры и параметров математической модели применяются различные алгоритмы идентификации и алгоритмы построения моделей [1, 2, 4, 5]. Алгоритмы построения моделей позволяют получить высокоточные математические модели исследуемых объектов, однако их использование для управления затруднительно, так как структура модели заранее неизвестна и вопрос проверки устойчивости требует дополнительных исследований. Алгоритмы идентификации позволяют определить отдельные параметры матрицы модели, структура которой задана априори. Для решения задачи идентификации нелинейных объектов разработано довольно много подходов и методов [3, 4, 6, 7]. На современном этапе возросли требования к точностным характеристикам применяемых алгоритмов идентификации. В связи с этим модифицируются классические подходы к решению задачи идентификации нелинейных систем с целью повышения их точности и уменьшения ограничений применения [1, 6, 10], а также универсальные поисковые методы, которые требуют минимальной априорной информации об идентифицируемой системе, но сложны в реализации.

В настоящей работе исследована проблема идентификации нелинейных систем.

В качестве основной трудности данной проблемы можно назвать необходимость обработки большой базы данных, характеризующей работу идентифицируемой системы. Конструктивным подходом в решении данной задачи является использование фильтрующей структуры в виде последовательности Вольтерра [3, 6, 8]. Однако одной из главных причин достаточно редкого применения методики фильтрации Вольтерра на практике является значительная сложность, связанная с реализацией фильтров Вольтерра [9, 11]. Таким образом, главной задачей является нахождение упрощений в разработке и реализации фильтра Вольтерра.

Фильтр Вольтерра 2-го порядка

Возьмем фильтр Вольтерра 2-го порядка (ФВ2), который состоит из параллельной комбинации линейного и квадратичного фильтров [8, 9]:

$$y(n) = h_0 + \sum_{j=0}^{N-1} a(j)x(n-j) + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} b(j,k)x(n-j)x(n-k), \qquad (1)$$

где $\{a(j)\}$ и $\{b(j, k)\}$ называются линейным и квадратичным весом соответственно, а N указывает длину фильтра (предполагается симметричность квадратичных весов фильтра, т.е. $b(j,k) = b(k,j)$).

Далее возьмем, что $x(n)$ и $s(n)$ – это случайные процессы с нулевым математическим ожиданием с дискретным параметром n. Нужно найти веса фильтра, которые минимизируют среднюю квадратичную ошибку (СКОШ) между $s(n)$ и выходом фильтра $y(n)$, т.е.

$$\xi = E\left[\left|s(n) - y(n)\right|^2\right], \qquad (2)$$

где предполагается строгая стационарность $s(n)$ и $x(n)$ с нулевым математическим ожиданием.

Первым шагом в определении минимума среднеквадратичной ошибки является требование бездрейфового выхода фильтра. Другими словами, должно быть $E[y(n)] = 0$, так как основной сигнал имеет нулевое математическое ожидание.

Тогда имеем следующее соотношение между h_0 и $b(j, k)$:

$$h_0 = -\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} b(j,k)\, r_x(j-k), \qquad (3)$$

где $r_x(j) = E\left[x(n)x(n-j)\right]$ обозначает автокорреляционную функцию $x(n)$. Важно включение члена нулевого порядка h_0. Некоторые из предыдущих исследователей не имели выхода нулевого порядка, но без этого выход минимальной средней квадратичной ошибки фильтра Вольтерра не является обязательно бездрейфовым и ошибка имеет, следовательно, тенденцию к увеличению, в отличие от фильтра Вольтерра 2-го порядка с h_0, выраженном в (3).

Подставляя в (1) выражение (3), получим формулу для определения фильтра Вольтера 2-го порядка:

$$y(n) = \sum_{j=0}^{N-1} a(j)x(n-j) + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} b(j,k)[x(n-j)x(n-k) - r_x(j-k). \qquad (4)$$

Следующий шаг – определение линейных и квадратичных весов фильтра $a(j)$ и $b(j, k)$, которые определяют минимум среднеквадратичной ошибки.

Выведем простое решение для оптимального фильтра Вольтерра 2-го порядка в предположении, что на входе фильтра гауссион. Во-первых, заметим, что (4) может быть переписано в виде [8, 9]:

$$y(n) = A^T X(n) + t_r\left\{B\left[X(n)X^T(n) - R_x\right]\right\}, \qquad (5)$$

где t_r – след матрицы B;

$$X(n) = \left[x(n),\ldots,x(n-N+1)\right]^T;$$

$$A = \left[a(0),\ldots,a(N-1)\right]^T;$$

$$B = \begin{bmatrix} b(0,0) & \ldots & b(0,N-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b(N-1,0) & \ldots & b(N-1,N-1) \end{bmatrix},$$

R_x указывает на $N{\times}N$ матрицу от $x(n)$, где $r_x(j, k) = r_x(j - k)$ – автокорреляционная функция входного сигнала $x(n)$. A и B – операторы линейного и квадратичного фильтра соответственно.

Перед выводом решения определим кросс-корреляционную $r_{sx}(j)$ и кросс-бикорреляционную $t_{sx}(j, k)$ функции между $x(n)$ и $s(n)$ следующим образом:

$$r_{sx}(j) = E\left[s(n)x(n-j)\right];$$

$$t_{sx}(j,k) = E\left[s(n)x(n-j)x(n-k)\right].$$

Поскольку предполагается, что $s(n)$ и $x(n)$ – строго стационарны, то как $r_{sx}(j)$, так и $t_{sx}(j, k)$ являются независимыми от переменной n. Кросс-бикорреляционная функция $t_{sx}(j, k)$ определяет статистическую зависимость между $s(n)$ и $x(n)$, которая является критичной при нахождении оптимального квадратичного оператора фильтра. Кроме того, надо сказать, что кросс-бикорреляционная функция является симметричной, т.е. $t_{sx}(j, k) = t_{sx}(k, j)$.

В матричной форме кросс-корреляционную и кросс-бикорреляционную функцию можно записать следующим образом:

$$R_{sx} = [r_{sx}(0), \ldots, r_{sx}(N-1)]^T;$$

$$T_{sx} = \begin{bmatrix} t_{sx}(0,0) & \ldots & t_{sx}(0,N-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{sx}(N-1,0) & \ldots & t_{sx}(N-1,N-1) \end{bmatrix}.$$

Отсюда линейный и квадратичный операторы фильтра Вольтерра 2-го порядка с минимальной среднеквадратичной ошибкой определяются следующим образом:

$$A_0 = R_x^{-1} R_{sx}; \quad (6)$$

$$B_0 = (1/2) R_x^{-1} T_{sx} R_x^{-1}. \quad (7)$$

Адаптивный алгоритм реализации

Алгоритм наименьшего среднего квадратического (НСК) для линейного фильтра хорошо известен и представляется в виде

$$A(n+1) = A(n) - 2\mu_A e(n) X(n). \quad (8)$$

Здесь $A(n)$ – оператор линейного фильтра в момент n и $e(n) = A^T(n)X(n) - s(n)$ – остаточная ошибка фильтра. Также μ_A – положительная константа, от которой зависит устойчивость и сходимость алгоритма.

Рассматривая адаптивную реализацию ФВ2, можно заметить, что оператор линейного фильтра может быть скорректирован, используя алгоритм (8), за исключением остаточной ошибки, представляемой в виде:

$$e(n) = A^T(n) X(n) + \\ + t_r\left\{B(n)\left[X(n)X^T(n) - R_x\right]\right\} - s(n). \quad (9)$$

Можно увидеть, что предыдущие результаты для стандартного НСК-алгоритма остаются в силе. Следовательно, необходимо рассмотреть только адаптацию оператора квадратичного фильтра.

Однако в (9) следует отметить, что выражение нулевого порядка $t_r\{B(n)R_x\}$ не является константой при адаптивной реализации. Вспомним, что выражение нулевого порядка необходимо для вычитания математического ожидания выходного значения квадратичного фильтра из выходного значения ФВ2 [9]. Следовательно, когда R_x неизвестно, рекурсивный алгоритм оценки (например, НЧ-фильтр) для уровня среднего выходного значения квадратичного фильтра можно заменить выражением нулевого порядка.

Для упрощения не будем изменять выражение нулевого порядка, поэтому его адаптация рассматриваться не будет. Как расширение НСК-алгоритма рассмотрим следующий адаптивный алгоритм для оператора квадратичного фильтра:

$$B(n+1) = B(n) - \mu_B e(n) X(n) X^T(n), \quad (10)$$

где μ_B – положительная константа.

Концептуально данный алгоритм имеет под собой основание, т.к.

$$\frac{\partial^2 e(n)}{\partial B(n)} = 2e(n)\, X(n) X^T(n),$$

и его реализация вполне приемлема.

Первая аппроксимация должна допускать, что $A(n)$ и $B(n)$ – независимы от пары $\{s(n), X(n)\}$. Тогда мы имеем

$$E\left[e(n) X(n) X^T(n)\right] = 2R_x E\left[B(n)\right] R_x - T_{sx}.$$

Таким образом, если мы определим $\delta B(n) = B(n) - B_0$, где B_0 – оптимум оператора квадратичного фильтра, определяемого с минимальной среднеквадратичной ошибкой следующим образом: $B_0 = \frac{1}{2} R_x^{-1} T_{sx} R_x^{-1}$, то математическое ожидание, взятое от обеих частей (10), даст

$$E\left[\delta B(n+1)\right] = E\left[B(n)\right] - 2\mu_B R_x E\left[\delta B(n)\right] R_x. \quad (11)$$

Заметим, что математическое ожидание оператора квадратичного фильтра сходится к оптимуму B_0 тогда и только тогда, когда $\left\|E\left[\delta B(n)\right]\right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Действительно, если $\left\|E\left[\delta B(n)\right]\right\| = 0$ для некоторого n, то это остается справедливым и для всех других n. Для $\left\|E\left[\delta B(n)\right]\right\| \neq 0$ $\left\|E\left[\partial B(n+1)\right]\right\| < \left\|E\left[\delta B(n)\right]\right\|$, если размер шага μ_B выбирается следующим образом:

$$0 < \mu_B < \lambda_{\max}^{-2}, \quad (12)$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее собственное значение матрицы R.

Отсюда средняя ошибка между $B(n)$ и B_0 монотонно снижается до 0 с увеличением времени. Далее при детальном рассмотрении процесса адаптации можно увидеть, что каждый элемент матрицы $E[\delta B(n)]$ состоит из набора компонент вида $e^{-\alpha t}$, в которых самое быстрое и самое медленное затухание определяется λ_{max} и λ_{min}.

В адаптивной реализации ФВ2 флуктуации операторов линейного и квадратичного фильтров добавляют некоторую дополнительную СКОШ в выходное значение фильтра даже при устойчивом положении адаптационного процесса. Таким образом, асимптотическая СКОШ адаптивного ФВ2 в общем случае больше, чем СКОШ оптимального ФВ2. Для оценки остатка СКОШ запишем СКОШ адаптивного ФВ2 в виде

$$\xi(n) = \xi_{opt} + \xi_A(n) + \xi_B(n);$$

причем остаток СКОШ линейного и квадратичного представляется:

$$\xi_A(n) = E\left[t_r\left\{\delta A^T(n) R_x \delta A(n)\right\}\right],$$

$$\xi_B(n) = E\left[t_r\left\{\delta B^T(n) R_x \delta B(n) R_x\right\}\right],$$

где $\delta A(n) = A(n) - A_0$ и $\delta B(n) = B(n) - B_0$ – суть отклонения $A(n)$ и $B(n)$ от их оптимальных значений.

Затем, получим следующие ограничения для остатка СКОШ:

$$\xi_A(n) \le \lambda_{max} E\left[\left\|\delta A(n)^2\right\|\right];$$

$$\xi_B(n) \le \lambda_{max}^2 E\left[\left\|\delta B(n)^2\right\|\right].$$

Так как нас интересуют главным образом асимптотические значения остатка СКОШ после достижения адаптивным процессом своего устойчивого состояния, то мы допускаем, что $A(n)$ и $B(n)$ близки к A_0 и B_0 соответственно. Отсюда выбираем μ_A и μ_B так, чтобы $0 \le \mu_A \le \lambda_{max}^{-1}$ и $0 \le \mu_B \le \lambda_{max}^{-2}$.

Таким образом, имеем

$$\delta A(n) = -2\mu_A e(n) X(n)$$

и

$$\delta B(n) = -\mu_B e(n) X(n) X^T(n).$$

Кроме того, при данных условиях как $X(n)$, так и $X(n)X^T(n)$ не коррелирует с остаточной ошибкой $e(n)$.

Следовательно, получаем следующие ограничения для асимптотического остатка СКОШ (АОСКОШ):

$$\xi_A \le 4\mu_A \xi_{opt} N r_x(0);$$

$$\xi_B \le 3\mu_B \xi_{opt} [N r_x(0)]^2.$$

Заключение

В работе представлены способы реализации фильтра Вольтерра 2-го порядка, связанные с упрощением его реализации. Показано, что простое решение для оптимального ФВ2, его адаптивный алгоритм могут дать эффективные гибкие подходы для разработки и реализации ФВ2. С другой стороны, распространение полученных результатов на фильтр Вольтерра более высокого порядка является интересным объектом дальнейшего исследования.

Список литературы

1. Воронов Е.М., Карпунин А.А., Ванин А.В. Оптимизация управления структурно сложными системами // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 10 (22). – URL http://engjournal.ru/articles/1080/1080.pdf. (дата обращения 10.09.2016).

2. Задорожная Н.М. Адаптивные системы автоматического управления с двумя эталонными моделями // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1–2; URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=20134.

3. Кобзев Г.К. К вопросу об идентификации ядер Вольтерра при моделировании нелинейных динамических систем // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2006. – № 4–1 (28). – С. 80–83.

4. Лукьянова Н.В., Кузнецов И.А. Идентификация нелинейных динамических систем на основе разложения функционалов методом Винера // Управление в морских и аэрокосмических системах: материалы конференции (УМАС-2014). – СПб., 2014. – С. 633–636.

5. Лукьянова Н.В. Модульный метод моделирования с использованием разложения Винера // Автоматизация. Современные технологии. – 2015. – № 9. – С. 17–22.

6. Павленко С.В., Положаенко С.А. Оптимизация вычислительных алгоритмов аппроксимационного метода идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра // Информатика и математические методы в моделировании. – 2013. – Т. 3. – № 2. – С. 103–112.

7. Пролетарский А.В., Неусыпин К.А., Кузнецов И.А. Разработка критерия степени идентифицируемости параметров динамических систем // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. – 2014. – № 4 (30). – С. 87–93.

8. Пупков К.А., Цибизова Т.Ю. Реализация фильтра Вольтерра второго порядка для идентификации нелинейных систем управления // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – 2006. – № 6. – URL http://technomag.edu.ru/doc/58741.html (дата обращения 10.09.2016).

9. Цибизова Т.Ю. Идентификация нелинейных систем автоматического управления при помощи фильтров Вольтерра // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2–14. – С. 3070–3074.

10. Цибизова Т.Ю. Методы идентификации нелинейных систем управления // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1–1; URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=17910.

11. Цибизова Т.Ю., Чан Н.Х. Способы реализации процедуры идентификации на основе фильтра Вольтерра // Автоматизация. Современные технологии. – 2015. – № 8. – С. 31–34.

References

1. Voronov E.M., Karpunin A.A., Vanin A.V. Optimizatsiya upravleniya strukturno slozhnymi sistemami, *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*, 2013, no. 10 (22), URL http://engjournal.ru/articles/1080/1080.pdf. (accessed 10.09.2016).

2. Zadorozhnaya N.M. Adaptivnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya s dvumya etalonnymi modelyami. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2015, no. 1–2; URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=20134.

3. Kobzev G.K. K voprosu ob identifikatsii yader Volterra pri modelirovanii nelineynykh dinamicheskikh system. *Vestnik Irkutskogo gos. tekhn. Universiteta*, 2006, no. 4–1 (28), pp. 80–83.

4. Lukyanova N.V., Kuznetsov I.A. Identifikatsiya nelineynykh dinamicheskikh sistem na osnove razlozheniya funktsionalov metodom Vinera. *Materialy konferentsii* «*Upravlenie v morskikh i aerokosmicheskikh sistemakh*» (Proc. of the conference «Management in the marine and aerospace systems»). Saint-Petersburg, 2014, pp. 633–636.

5. Lukyanova N.V. Modulnyy metod modelirovaniya s ispolzovaniem razlozheniya Vinera. *Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii,* 2015, no 9, pp. 17–22.

6. Pavlenko S.V., Polozhaenko S.A. Optimizatsiya vychislitelnykh algoritmov approksimatsionnogo metoda identifikatsii nelineynykh system v vide modeley Volterra. *Informatika i matematicheskie metody v modelirovanii*, 2013, Vol. 3, no. 2, pp. 103–112.

7. Proletarskiy A.V., Neusypin K.A., Kuznetsov I.A. Razrabotka kriteriya stepeni identifitsiruemosti parametrov dinamicheskikh system, *Trudy FGUP NPTSAP, Sistemy i pribory upravleniya*, 2014, no. 4 (30), pp. 87–93.

8. Pupkov K.A., Tsibizova T.Yu. Realizatsiya filtra Volterra vtorogo poryadka dlya identifikatsii nelineynykh system upravleniya, *Nauka i obrazovanie*, 2006, no. 6, URL http://technomag.edu.ru/doc/58741.html. (accessed 10.09.2016).

9. Tsibizova T.Yu. Identifikatsiya nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya pri pomoshchi filtrov Volterra. *Fundamentalnye issledovaniya,* 2015, no. 2–14, pp. 3070–3074.

10. Tsibizova T.Yu. Metody identifikatsii nelineynykh sistem upravleniya. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya,* 2015, no. 1–1; URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=17910.

11. Tsibizova T.Yu., Chan N.Kh. Sposoby realizatsii protsedury identifikatsii na osnove filtra Volterra. *Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii*, 2015, no. 8, pp. 31–34.