

УДК 539.3

ИНВАРИАНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МКЭ ДЛЯ УЧЕТА СМЕЩЕНИЯ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА

Гуреева Н.А., Киселев А.П., Киселёва Р.З., Николаев А.П.
ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный аграрный университет»,
Волгоград, e-mail: vhs2010@yandex.ru

На алгоритме формирования матрицы жесткости шестигранного объемного конечного элемента оболочки вращения с узловыми неизвестными в виде перемещений и их производных показано, что использование инвариантной аппроксимации перемещений обеспечивает решение общеизвестной проблемы МКЭ – учета смещения как твердого тела. Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента выполнялась в двух вариантах: с использованием скалярной аппроксимации компонент вектора перемещения; с использованием разработанной нами инвариантной аппроксимации полей перемещения. При прочностных расчетах в криволинейных системах координат скалярная аппроксимация является некорректной, так как в ней отсутствуют параметры, характеризующие используемую криволинейную систему координат. Отсюда и возникает проблема учета смещения конечного элемента как твердого тела, для решения которой служит разработанная векторная аппроксимация искомых величин.

Ключевые слова: МКЭ, объёмный шестигранный конечный элемент, узловые неизвестные, инвариантная аппроксимация перемещений, учет смещения элемента как твердого тела

INVARIANT APPROXIMATION OF DISPLACEMENT IN FEM TO ACCOUNT FOR THE DISPLACEMENT OF THE FINITE ELEMENT AS A RIGID BODY

Gureeva N.A., Kiselev A.P., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P.
Volgograd State Agricultural University, Volgograd, e-mail: vhs2010@yandex.ru

The algorithm of formation of the stiffness matrix hexahedron hexagonal finite element shell of revolution with nodal unknown in the form of displacements and their derivatives is shown that the use of invariant approximation of displacements provides a solution well – known problem of the FEM – accounting displacement as a rigid body. Approximation of the displacement of the inner points of finite element was performed in two variants: with the use of the scalar approximation the component of the displacement vector; by using our invariant approximation of displacement fields. In strength calculations in curvilinear coordinate systems scalar approximation is incorrect, as it does not contain parameters describing the used curvilinear coordinate system. Hence arises the problem of the displacement of the finite element as a rigid body, which is developed by vector approximation of the desired quantities.

Keywords: FEM, three-dimensional hexahedron finite element, the nodal unknowns, invariant approximation of displacement, displacement as a rigid body

Геометрия оболочки вращения

В декартовой системе координат $oxuz$ положение точки M срединной поверхности оболочки вращения определяется радиус-вектором

$$\vec{R} = x\vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}, \quad (1)$$

где r – радиус вращения точки M относительно оси ox ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат; θ – угол, отсчитываемый от вертикального диаметра против часовой стрелки.

Векторы локального базиса точки M определяются выражениями

$$\vec{e}_1 = \vec{R}_{,s} = x_{,s} \vec{i} + r_{,s} \sin \theta \vec{j} + r_{,s} \cos \theta \vec{k};$$

$$\vec{e}_2 = \vec{R}_{,r0} = \cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{k};$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{i} r_{,s} + \vec{j} x_{,s} \sin \theta + \vec{k} x_{,s} \cos \theta, \quad (2)$$

где $r_{,s} = r_{,x} x_{,s}$ – производная радиуса вращения по дуге меридиана s .

Соотношение (2) можно представить в матричном виде:

$$\{\vec{e}\} = [s] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{i}\} = [s]^{-1} \{\vec{e}\}, \quad (3)$$

где $\{\vec{e}\}^T = \{\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3\}$; $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}\}$.

Дифференцированием (1) при использовании (3) можно получить производные векторов (2) в базисе этих же векторов

$$\{\vec{e}_{,x}\} = [s_{,x}] [s]^{-1} \{\vec{e}\} = [l] \{\vec{e}\};$$

$$\{\vec{e}_{,r0}\} = [s_{,r0}] [s]^{-1} \{\vec{e}\} = [d] \{\vec{e}\}. \quad (4)$$

Радиус-вектор произвольной точки оболочки M^ζ , отстоящей на расстоянии ζ от срединной поверхности имеет вид

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R} + \zeta \vec{e}_3, \quad (5)$$

Базисные векторы точки M^s определяются дифференцированием (5) с учетом (4)

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \bar{R}_{,s}^\zeta = \bar{e}_1 (1 + \zeta l_{31}) + \zeta l_{32} \bar{e}_2 + \zeta l_{33} \bar{e}_3; \\ \bar{a}_2 &= \bar{R}_{,r_0}^\zeta = \zeta d_{31} \bar{e}_1 + (1 + \zeta d_{32}) \bar{e}_2 + \zeta d_{33} \bar{e}_3; \quad (6) \\ \bar{a}_3 &= \bar{R}_{,\zeta} = \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Точка M^s под действием на оболочку заданной нагрузки займет положение M^{s*} , которое определяется вектором \bar{v} , представляемым компонентами в базисе точки M

$$\bar{v} = v_i \bar{e}_i = \{\bar{e}\}_{1 \times 3} \{v\}. \quad (7)$$

Производные вектора (7) определяются дифференцированием с учетом (4):

$$\begin{aligned} \bar{v}_{,s} &= t_1^1 \bar{e}_1 + t_1^2 \bar{e}_2 + t_1^3 \bar{e}_3 = \{\bar{e}\}^T \{t_1\}; \\ \bar{v}_{,r_0} &= t_2^1 \bar{e}_1 + t_2^2 \bar{e}_2 + t_2^3 \bar{e}_3 = \{\bar{e}\}^T \{t_2\}; \\ \bar{v}_{,\zeta} &= v_{,\zeta}^1 \bar{e}_1 + v_{,\zeta}^2 \bar{e}_2 + v_{,\zeta}^3 \bar{e}_3 = \{\bar{e}\}^T \{v_{,\zeta}\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\{t_1\}^T = \{t_1^1 + t_1^2 + t_1^3\}$;
 $\{t_2\}^T = \{t_2^1 + t_2^2 + t_2^3\}$; $\{v_{,\zeta}\}^T = \{v_{,\zeta}^1 + v_{,\zeta}^2 + v_{,\zeta}^3\}$;
 $t_1^1 = v_{,s}^1 + v^1 l_{11} + v^2 l_{21} + v^3 l_{31} \bar{e}_1$;
 – функции компонент вектора перемещения и их производных.

Ковариантные компоненты тензора деформации определяются выражениями [5]

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (a_{mn}^* - a_{mn}) = \frac{1}{2} (\bar{a}_m \cdot \bar{v}_{,n} + \bar{a}_n \cdot \bar{v}_{,m}), \quad (9)$$

где a_{mn}^* , \bar{a}_{mn} – ковариантные компоненты метрических тензоров в деформированном и исходном состояниях.

С использованием (6) и (8) соотношение (9) можно представить в матричном виде

$$\{\varepsilon\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \{v\}_{3 \times 1}, \quad (10)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} 2\varepsilon_{23}\}$;
 $\{v\}^T = \{v^1 v^2 v^3\}$; $[L]$ – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

Закон Гука

Соотношения между напряжениями и деформациями принимаются в виде [3]

$$\sigma^{mn} = \lambda I_1(\varepsilon) a^{mn} + 2\mu a^{mi} a^{nj} \varepsilon_{ij}, \quad (11)$$

где σ^{mn} – контравариантные компоненты тензора напряжений; ε_{mn} – ковариантные компоненты тензора деформаций; λ , μ – параметры Ламе; a^{mn} – контравариантные компоненты метрического тензора; $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{mn} a^{mn}$ – первый инвариант тензора деформаций.

Соотношение (11) можно записать в матричном виде

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (12)$$

где $\{\sigma\}_T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}\}$.

Матрица жесткости шестигранного конечного элемента

Объемный конечный элемент, принимается в координатной системе x, θ, ζ в виде шестигранника с узлами i, j, k, l на нижней грани по координате ζ и узлами m, n, p, h по верхней грани [1–4, 6]. Для выполнения численного интегрирования шестигранник отображается на куб с локальными координатами a, b, c , изменяющимися в пределах $-1 \leq a, b, c \leq 1$, с использованием трилинейных функций

$$\begin{aligned} x &= \{\varphi(a, b, c)\}_{1 \times 8}^T \{x_y\}_{8 \times 1}; \quad \theta = \{\varphi(a, b, c)\}^T \{\theta_y\}; \\ \zeta &= \{\varphi(a, b, c)\}^T \{\zeta_y\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\{x_y\}^T = \{x^i x^j x^k x^l x^m x^n x^p x^h\}$;
 $\{\theta_y\}^T = \{\theta^i \theta^j \theta^k \theta^l \theta^m \theta^n \theta^p \theta^h\}$;

$\{\zeta_y\}^T = \{\zeta^i \zeta^j \zeta^k \zeta^l \zeta^m \zeta^n \zeta^p \zeta^h\}$ – матрицы-строки глобальных координат узлов шестигранника.

Дифференцированием (13) определяют производные глобальных координат в локальной системе $x_{,a}, x_{,b}, x_{,c}, \theta_{,a}, \theta_{,b}, \theta_{,c}, \zeta_{,a}, \zeta_{,b}, \zeta_{,c}$ и локальных координат в глобальной системе $a_{,x}, a_{,\theta}, a_{,\zeta}, b_{,x}, b_{,\theta}, b_{,\zeta}, c_{,x}, c_{,\theta}, c_{,\zeta}$.

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента определяется выражением

$$\bar{v} = v_i \bar{e}_i. \quad (14)$$

Аппроксимация компонент вектора перемещения (14) через узловые неизвестные выполнялась в двух вариантах.

Скалярная аппроксимация компонент вектора перемещения

Узловые неизвестные конечного элемента перемещения и их производные

представляются в локальной и глобальной системах матрицами-строками

$$\begin{aligned} \left\{v_{ty}^n\right\}_{1 \times 32}^T &= \left\{v_1^i \dots v_i^h : v_{t,a}^i \dots v_{t,b}^i \dots v_{t,c}^i \dots v_{t,c}^h\right\}; \\ \left\{v_{ty}^\Gamma\right\}_{1 \times 32}^T &= \left\{v_1^i \dots v_i^h : v_{t,x}^i \dots v_{t,\theta}^i \dots v_{t,\zeta}^i \dots v_{t,\zeta}^h\right\}; \\ &t = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (15)$$

Узловые величины (15) связаны матричной зависимостью

$$\left\{v_y^m\right\}_{32 \times 1} = [T] \left\{v_y^t\right\}_{32 \times 32} \left\{v_y^t\right\}_{32 \times 1}; \quad (t = 1, 2, 3), \quad (16)$$

где элементами матрицы [T] являются производные глобальных координат x, θ, ζ в локальной системе a, b, c для узловых точек конечного элемента.

Каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты матричным выражением

$$\left\{v_t\right\}_{1 \times 32} = \left\{\psi\right\}_{32 \times 1}^T \left\{v_{ty}^n\right\}_{32 \times 1} = \left\{\psi\right\}_{32 \times 1}^T [T] \left\{v_{ty}^\Gamma\right\}_{32 \times 1}, \quad (17)$$

где $\left\{\psi\right\}^T$ – аппроксимирующая матрица, элементами которой являются полиномы Эрмита третьей степени.

На основе скалярной аппроксимации (17) выражение (10) представляется в матричном виде

$$\left\{\varepsilon\right\}_{6 \times 1} = [L] \left\{v\right\}_{6 \times 3} = [L] [A] \left\{v_y\right\}_{3 \times 96} = [B] \left\{v_y^n\right\}_{96 \times 1}, \quad (18)$$

где $\left\{v_y^n\right\}_{1 \times 96}^T = \left\{\left\{v_{1y}^n\right\}_{1 \times 32}^T \left\{v_{2y}^n\right\}_{1 \times 32}^T \left\{v_{3y}^n\right\}_{1 \times 32}^T\right\}$ – строка уз-

ловых неизвестных шестигранного конечного элемента;

$$[A] = \begin{bmatrix} \left\{\psi\right\}^T & \left\{0\right\}^T & \left\{0\right\}^T \\ \left\{0\right\}^T & \left\{\psi\right\}^T & \left\{0\right\}^T \\ \left\{0\right\}^T & \left\{0\right\}^T & \left\{\psi\right\}^T \end{bmatrix}_{3 \times 96}$$

Векторная аппроксимация перемещений

В качестве узловых неизвестных конечного элемента принимаются векторы перемещений узловых точек и их первые произ-

$$\left\{t_y\right\}_{1 \times 96}^T = \left\{v_1^i v_2^i v_3^i \dots v_1^h v_2^h v_3^h : t_1^i t_1^i t_1^i \dots t_2^i t_2^i t_2^i \dots v_{1,\zeta}^i v_{2,\zeta}^i v_{3,\zeta}^i \dots v_{1,\zeta}^h v_{2,\zeta}^h v_{3,\zeta}^h\right\}; \quad (25)$$

$[\bar{G}]$ – матрица, ненулевыми элементами которой являются базисные векторы узловых точек конечного элемента $\left\{\bar{e}_1^\omega, \bar{e}_2^\omega, \bar{e}_3^\omega\right\}$ ($\omega = 1, 2, \dots, 8$).

водные в локальной и глобальной системах координат и представляются матрицами-строками

$$\begin{aligned} \left\{\bar{v}_y^n\right\}_{1 \times 32}^T &= \left\{\bar{v}^i \dots \bar{v}^h : \bar{v}_a^i \dots \bar{v}_b^i \dots \bar{v}_c^i \dots \bar{v}_c^h\right\}; \\ \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{1 \times 32}^T &= \left\{\bar{v}^i \dots \bar{v}^h : \bar{v}_{r,x}^i \dots \bar{v}_{r,\theta}^i \dots \bar{v}_{r,\zeta}^i \dots \bar{v}_{r,\zeta}^h\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Между столбцами (19) имеет место матричное соотношение

$$\left\{\bar{v}_y^n\right\} = [T] \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}. \quad (20)$$

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через узловые неизвестные (19) матричной зависимостью

$$\left\{\bar{v}\right\}_{1 \times 32} = \left\{\psi\right\}_{32 \times 1}^T \left\{\bar{v}_y^n\right\}_{32 \times 1} = \left\{\psi\right\}_{32 \times 1}^T [T] \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{32 \times 1} = \left\{\gamma\right\}_{1 \times 32}^T \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{32 \times 1}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \Psi_t; \\ \gamma_{8+t} &= \Psi_{8+t} x_{r,a}^\omega + \Psi_{16+t} x_{r,b}^\omega + \Psi_{24+t} x_{r,c}^\omega; \\ \gamma_{16+t} &= \Psi_{8+t} r \theta_a^\omega + \Psi_{16+t} r \theta_b^\omega + \Psi_{24+t} r \theta_c^\omega; \\ \gamma_{24+t} &= \Psi_{8+t} \zeta_a^\omega + \Psi_{16+t} \zeta_b^\omega + \Psi_{24+t} \zeta_c^\omega; \end{aligned}$$

$$\omega = i, j, k, l, m, n, p, h;$$

$$t = 1, 2, \dots, 8. \quad (22)$$

Производные вектора перемещения внутренней точки конечного элемента определяются дифференцированием (21)

$$\begin{aligned} \left\{\bar{v}_{r,x}\right\}_{1 \times 32} &= \left\{\gamma_{,xy}\right\}_{1 \times 32}^T \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{32 \times 1}; \\ \left\{\bar{v}_{r,\theta}\right\}_{1 \times 32} &= \left\{\gamma_{,r\theta}\right\}_{1 \times 32}^T \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{32 \times 1}; \\ \left\{\bar{v}_{r,\zeta}\right\}_{1 \times 32} &= \left\{\gamma_{,r\zeta}\right\}_{1 \times 32}^T \left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{32 \times 1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Столбец узловых неизвестных в глобальной системе координат на основе (7) и (8) можно представить матричным соотношением

$$\left\{\bar{v}_y^\Gamma\right\}_{32 \times 1} = [\bar{G}] \left\{t_y\right\}_{96 \times 1}, \quad (24)$$

где

На основании соотношений (3) можно базисные векторы узловых точек выразить через базисные векторы рассматриваемой внутренней точки конечного элемента

$$\{\bar{e}^{\omega}\} = [s^{\omega}] [s]^{-1} \{\bar{e}\} = [z^{\omega}] \{\bar{e}\}, \quad (26)$$

где $[s^{\omega}]$ – матрица, элементы которой определяются параметрами узловой точки ω .

После замены на основе (26) базисных векторов узловых точек в матрице $[\bar{G}]$ аппроксимирующие матрицы (21) и (23) можно представить матричными соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \{\bar{e}\}^T \begin{bmatrix} \gamma_1 [z^i]^T & \dots & \gamma_8 [z^h]^T \\ \gamma_9 [z^i]^T & \dots & \gamma_{17} [z^i]^T \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \dots \\ & \gamma_{25} [z^i]^T \dots \gamma_{32} [z^h]^T = \{\bar{e}\} [H] \{t_y\}; \\ \bar{v}_{,x} &= \{\bar{e}\} [H_{,x}] \{t_y\}; \quad \bar{v}_{,r0} = \{\bar{e}\} [H_{,r0}] \{t_y\}; \\ \bar{v}_{,\zeta} &= \{\bar{e}\} [H_{,\zeta}] \{t_y\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Приравняв правые части выражений (7), (8) и (27), можно получить аппроксимирующие выражения для компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента

$$\begin{aligned} \{v\} &= [H] \{t_y\}; \quad \{t_1\} = [H_{,x}] \{t_y\}; \\ \{t_2\} &= [H_{,r0}] \{t_y\}; \quad \{t_3\} = [H_{,\zeta}] \{t_y\}. \end{aligned} \quad (28)$$

С использованием (28) деформации (10) во внутренней точке конечного элемента определяется матричным выражением

$$\{\varepsilon\} = [L] \{v\} = [L] [H] [N] \{v_y^{\Gamma}\} = [B] \{v_y^{\Gamma}\}, \quad (29)$$

где использовано преобразование

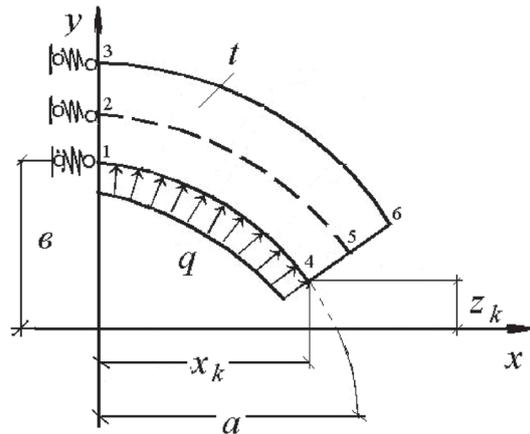
$$\{t_y\} = [N] \{v_y^{\Gamma}\}.$$

С использованием соотношений (18), (29) и (12) по алгоритму [1] формируется матрица жесткости конечного элемента

$$[K] \{v_y^{\Gamma}\} = \{F\} \quad (30)$$

в двух вариантах: на основе скалярной аппроксимации перемещений и на основе векторной аппроксимации. Символом $\{F\}$ обозначен вектор узловых сил конечного элемента.

Пример. Рассматривалась усеченная эллипсоидная оболочка (рисунок), находящаяся под действием внутреннего давления интенсивности q . Были приняты следующие исходные данные: $b = 0,1$ м; $t = 0,01$ м; $r_k = 0,005$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $h = 0,01$ м; $q = 2,5$ МПа.



Усеченный эллипсоид вращения, нагруженный внутренней равномерно распределенной нагрузкой

Расчеты выполнялись для трех усеченных оболочек с размерами больших полуосей $a = 0,5$ м; $a = 1,0$ м; $a = 1,5$ м. Остальные размеры остались неизменными.

Меридиональные напряжения в точках 1, 2, 3 оказались практически равными для всех оболочек и при каждом варианте аппроксимации перемещений в конечном элементе ($\sigma_{ss} = 123,5$ МПа), что примерно на 0,344% отличалось от числовых значений меридиональных напряжений, полученных из уравнения равновесия

$$\sigma_{ss} = \frac{q\pi(b^2 - r_k^2)}{2\pi(b + t/2) \cdot t} = 124,1 \text{ МПа.}$$

Оказались равными и значения окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в точках 1, 2, 3 для обоих вариантов аппроксимации перемещений в конечном элементе.

a , м	$\sigma_{\theta\theta}$, МПа	$\sigma_{\theta\theta}$, МПа	$\sigma_{\theta\theta}$, МПа	δ_{sk} , %	δ_b , %
1	2	3	4	5	6
0,5	45,32	49,97	51,45	11,9	2,9
0,1	21,42	26,64	27,90	23,20	4,5
1,5	15,51	19,94	20,83	25,5	4,2

В таблице приведены окружные напряжения в точках 5 (на срединных поверхностях оболочек на правом краю). В первой колонке приведены значения полуосей a усеченных оболочек. Во второй колонке приведены окружные напряжения, полученные при использовании скалярной аппроксимации перемещений конечного элемента. В третьей колонке даются окружные напряжения в точках 5, полученные при использовании векторной аппроксимации перемещений. В четвертой колонке даются окружные напряжения, полученные по равенству Лапласа (в данном случае приближенному)

$$\frac{\sigma_{ss}^k}{R_s^k} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^k}{R_\theta^k} = \frac{q}{t},$$

где $\sigma_{ss}^k = 0$ на правом краю оболочки; $R_\theta^k = \frac{r_k}{\cos \psi_k}$ – радиус вращения в конечной точке; ψ_k – угол наклона касательной к отчетному меридиану в конечной точке. Окружные напряжения из соотношения Лапласа определяются выражением

$$\sigma_{\theta\theta}^k = \frac{q}{t} \cdot R_\theta^k.$$

В колонке 5, 6 таблицы приведены расхождения между значениями окружных напряжений.

δ_{sk} – расхождения между числовыми значениями напряжения колонки 2 и колонки 4; δ_b – расхождения между числовыми значениями напряжения колонки 3 и колонки 4.

Как видно значения окружных напряжений, полученные при использовании векторной аппроксимации перемещений (колонка 4) находятся в гораздо лучшем соответствии с результатами, полученными на основе соотношения Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-41-02346/16).

Список литературы

1. Гуреева Н.А. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента / Н.А. Гуреева, А.П. Киселев, Р.З. Киселева // Известия ВолгГТУ. – 2010. – № 4. – С. 125–128.
2. Киселев А.П. Векторная аппроксимация полей перемещений объемного шестигранного конечного элемента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 1. – С. 21–24.
3. Киселёв А.П. Использование трёхмерных конечных элементов в расчётах прочности многослойных панелей / А.П. Киселев, Н.А. Гуреева, Р.З. Киселёва // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 37–40.
4. Киселева Р.З. Расчет многослойных оболочек вращения и пластин с использованием объемного конечного элемента / Р.З. Киселёва, А.П. Киселев, Н.А. Гуреева // Изв. Вузов, сер. «Строительство». – 2010. – № 1. – С. 106–112.
5. Седов А.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – т. 1. – 535 с.
6. Nikolaev A. The finite elements of a quadrilateral shape for analysis of shells taking into consideration a displacement of a body with rigid body modes / A. Nikolaev, A. Kiselyev, Yu. Klochkov // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 3. – С. 49–59.

References

1. Gureeva N.A. Raschet mnogoslojnoj obolochki s ispolzovaniem obemnogo konechnogo jelementa / N.A. Gureeva, A.P. Kiselev, R.Z. Kiseleva // Izvestija VolgGTU. 2010. no. 4. pp. 125–128.
2. Kiselev A.P. Vektornaja approksimacija polej peremeshenij ob#emnogo shestigrannogo konechnogo jelementa // Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2007. no. 1. pp. 21–24.
3. Kisel'jov A.P. Ispolzovanie trjohmernih konechnyh jelementov v raschjotah prochnosti mnogoslojnyh panelej / A.P. Kiselev, N.A. Gureeva, R.Z. Kisel'jova // Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2009. no. 4. pp. 37–40.
4. Kiseleva R.Z. Raschet mnogoslojnyh obolochek vrashhenija i plastin s ispolzovaniem ob#jmnogo konechnogo jelementa / R.Z. Kisel'jova, A.P. Kiselev, N.A. Gureeva // Izv. Vuzov, ser. «Stroitelstvo». 2010. no. 1. pp. 106–112.
5. Sedov A.I. Mehanika sploshnoj sredy. M.: Nauka, 1976. t. 1. 535 p.
6. Nikolaev A. The finite elements of a quadrilateral shape for analysis of shells taking into consideration a displacement of a body with rigid body modes / A. Nikolaev, A. Kiselyev, Yu. Klochkov // Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2011. no. 3. pp. 49–59.