

УДК 539.3:539.374

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Сибгатуллин Э.С., Исламов К.Ф.

*Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Naberezhnye Chelny, e-mail: cibes@mail.ru*

В работе рассмотрена трёхслойная металлокерамическая полая сферическая оболочка (два наружных слоя – из мягкой стали, внутренний слой – из магнезита). Опираемость оболочки по контуру – шарнирная. Статическая внешняя нагрузка в виде сосредоточенной силы имеет произвольное направление и может быть приложена в любой точке оболочки. Решена задача о предельном состоянии оболочки (по прочности). Использован кинематический метод теории предельного равновесия. Для определения лучшей верхней оценки предельной нагрузки использован аппарат линейного программирования. Предварительно построены определённые сечения предельной поверхности для рассматриваемого слоистого материала в пространстве внутренних сил и моментов, которые аппроксимированы вписанными многогранниками, использован принцип максимума Мизеса для записи ограничений задачи линейного программирования. В результате решения задачи определены разрушающее значение внешней нагрузки и механизм разрушения оболочки.

**Ключевые слова:** полая сферическая оболочка, металлокерамика, предельная несущая способность по прочности

## ESTIMATING THE BEARING CAPABILITY OF CERMET SPHERICAL SHELL

Sibgatullin E.S., Islamov K.F.

*Kazan Federal University, Naberezhnye Chelny Institute, Naberezhnye Chelny, e-mail: cibes@mail.ru*

The three-layer metal-ceramic shallow spherical shell (the two outer layers are soft steel, the inner layer is magnesite) is considered at this work. The shell is supported by the hinge round contour. Static external load in the form of a concentrated force has an arbitrary direction and can be applied anywhere to the shell. Calculating the limiting strength state of the shell task is solved. The kinematic method of the limit equilibrium theory is used. The linear programming unit was used to determine the best upper bound limit load. Some specific cuts of the limiting surface of the multilayer material in the space of internal forces and moments were pre-build. Those cuts were approximated by inscribed polyhedras. The Mises' principle of maximum was used for deriving equations of the linear programming method limitations. The result of the task solving are identified destroying value of the external load and destroying mechanism of the shell.

**Keywords:** shallow spherical shell, cermet, ultimate bearing capacity by strength

Расчёт элементов конструкций с использованием уравнений теории пластичности позволяет лучше использовать прочностные ресурсы материалов и конструкций, создавать экономически более выгодные изделия. Решение полной системы нелинейных уравнений теории пластичности в общем случае представляет собой сложную математическую задачу. Поэтому при определении несущей способности конструкций часто используют

так называемые статический и кинематический методы теории предельного равновесия, основоположником которых является А.А. Гвоздев [1]. В данной работе для решения рассматриваемых задач использован кинематический метод.

В работе [2] получены параметрические уравнения гиперповерхности прочности (пластичности) для слоистых гибридных композитных оболочек и пластин в пространстве обобщенных сил  $T_{mi}$ :

$$T_{mi} = \sum_{j=1}^n \left[ 0,5 \sum_{k=1}^N \delta_{ik}^j (I_m^j \dot{e}_{0k} + I_{m+1}^j \dot{e}_{1k}) - \Delta_{ij}^j h_j z_j^m \right] / \Delta_j; \quad m = \overline{0,1}; \quad i = \overline{1,N}. \quad (1)$$

В случае кратковременного статического нагружения, например, эти уравнения принимают следующий вид:

$$T_i = \sum_{j=1}^n \left[ 0,5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^j (I_{1j} \dot{e}_k + I_{2j} \dot{x}_k) - \Delta_{ij} h_j \right] / \Delta_j;$$

$$M_i = \sum_{j=1}^n \left[ 0,5 \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}^j (I_{2j} \dot{e}_k + I_{3j} \dot{x}_k) - \Delta_{ij} h_j z_j \right] / \Delta_j; \quad i = \overline{1,3};$$

$$Q_{31} = 0,25 \sum_{j=1}^n (N_j \dot{\gamma}_{1j} - M_j \dot{\gamma}_{2j}) I_{1j} / \theta_j; \quad (2)$$

$$Q_{32} = 0,25 \sum_{j=1}^n (K_j \dot{\gamma}_{2j} - M_j \dot{\gamma}_{1j}) I_{1j} / \theta_j.$$

Здесь и далее  $T_\alpha \equiv T_{\alpha\alpha}$ ,  $M_\alpha \equiv M_{\alpha\alpha}$  ( $\alpha = \overline{1,2}$ ),  $T_3 \equiv T_{12}$ ,  $M_3 \equiv M_{12}$ ,  $Q_{31}$ ,  $Q_{32}$  – обобщенные силы;  $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$  – скорости соответствующих обобщенных перемещений;  $h_j$  – толщина  $j$ -го слоя;  $z_j$  – координата срединной поверхности  $j$ -го слоя (в системе  $\alpha_1 \alpha_2 z$ , ось  $z$  перпендикулярна поверхности приведения  $S_0$  оболочки, рис. 1);  $z_{1j} < z_{2j}$  – координаты наружных поверхностей  $j$ -го слоя.

Определение несущей способности металлокерамической сферической оболочки выполняем с использованием варианта кинематического метода, описанного в работе [2].

В данном методе предполагается, что разрушение конструкции происходит вдоль отдельных бесконечно тонких слоев, перпендикулярных поверхности приведения  $S_0$ , а области между ними остаются «жесткими».

Уравнение баланса мощностей имеет следующий вид [2]:

$$\sum_{k=1}^m \int_{l_k} N dl = \mu \int_S p_i^0 v_i dS + \int_S p_i^1 v_i dS. \quad (3)$$

Здесь  $l_k$  – длина  $k$ -й линии разрушения;  $m$  – число линий разрушения;  $S$  – площадь

поверхности приведения сил;  $N$  – мощность внутренних обобщенных сил, приходящаяся на единицу длины линии разрушения;  $v_i$  – компоненты вектора скорости движения точки оболочки, где приложена сила  $p_i$ ;  $\mu$  – параметр, пропорционально которому растут внешние нагрузки. По повторяющемуся индексу  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) производится суммирование.

Предельную поверхность аппроксимируем выпуклым многогранником,  $i$ -ая вершина которого определяется вектором  $\{\vec{R}_i^*, \vec{M}_i^*\}^T$ ,  $i = \overline{1,k}$ ,  $k$  – число вершин аппроксимирующего многогранника. Здесь  $R_i, M_i$  – погонные силы и моменты, приложенные к сечению поверхности  $S_0$ .

На мощности погонных внутренних сил и моментов на концах линий разрушения  $O_1 O_2$  (рис. 1), развиваемые ими на разрывах скоростей соответствующих перемещений и поворотов, согласно постулату Друккера [2], можно наложить следующие ограничения [3]:

$$N_1 \geq \vec{R}_{1i}^* \Delta \vec{v}_1 + \vec{M}_{1i}^* \Delta \vec{\omega}, \quad i = \overline{1, k_1};$$

$$N_2 \geq \vec{R}_{2i}^* \Delta \vec{v}_2 + \vec{M}_{2i}^* \Delta \vec{\omega}, \quad i = \overline{1, k_2}. \quad (4)$$

Здесь  $k_1, k_2$  – количество вершин предельных многогранников, подходящих точкам  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

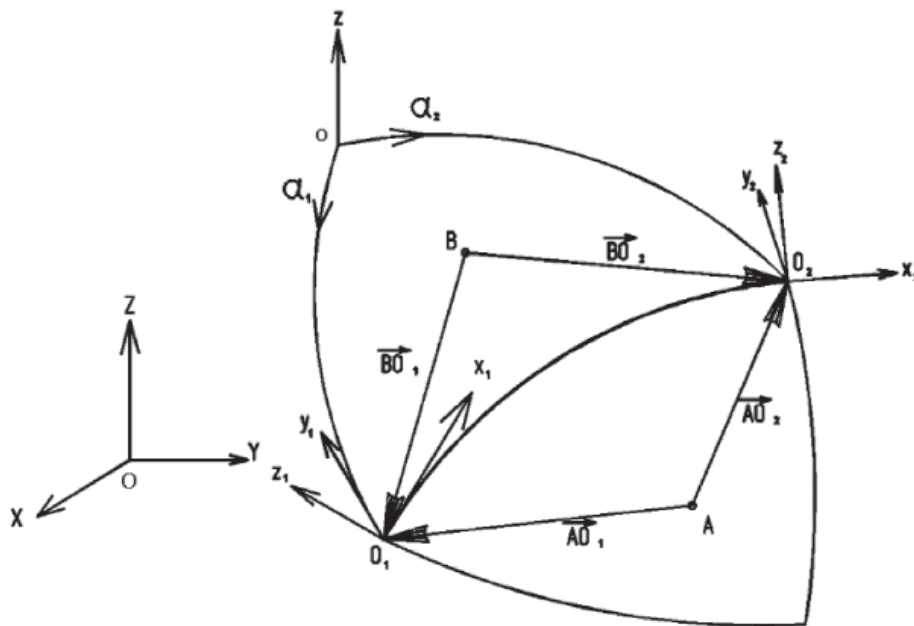


Рис. 1. Схема расположения линии разрушения  $O_1 O_2$  на границе абсолютно жестких конечных элементов

Вдоль линий разрушения используем линейную аппроксимацию функции  $N$ . В итоге получаем следующую задачу линейного программирования: найти  $\min m^+$ , где

$$\mu^+ = 0,5 \sum_{k=1}^m (N_{1k} + N_{2k}) l_k - \sum_{j=1}^{n_2} (\vec{F}_j^1 \vec{v}_j + \vec{M}_j^1 \vec{\omega}_j) \quad (5)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n_1} (\vec{F}_j^0 \vec{v}_j + \vec{M}_j^0 \vec{\omega}_j) = 1 \quad (6)$$

и при соблюдении ограничений вида (4). Здесь  $j$  – номер жесткого элемента;  $n_1$  – число жестких элементов, на которые действуют нагрузки, зависящие от параметра  $m$ ;  $n_2$  – число жестких элементов, на которые действуют нагрузки, не зависящие от параметра  $\mu$ . Здесь внешние силы, действующие в пределах отдельного жесткого диска, приведены к его полюсу. Результатом этого являются сосредоточенные силы  $\vec{F}_j$  и сосредоточенные моменты  $\vec{M}_j$ , приложенные к соответствующим полюсам.

Рассмотрим трёхслойную составную оболочку с относительно небольшой стрелой подъёма, где два наружных слоя стальные, внутренний слой – керамический.

Характеристики слоёв приведены в табл. 1.

С использованием уравнений (2) были построены некоторые сечения гиперповерхности прочности для трёхслойной оболочки (рис. 2, 3, 4). Алгоритм построения аналогичных сечений проведён, например, в [4].

На рис. 5 показана проекция металло-керамической сферической оболочки с радиусом 1,3 м и диаметром опорной окружности 1 м на плоскость  $XOY$  (рис. 1), нагруженной в точке 5 сосредоточенной силой, направляющие косинусы которой равны (0,5; 0,5; -0,7071); общая толщина оболочки – 22 мм; опирание – шарнирное по контуру. Здесь же показано разбиение на жесткие элементы и линии разрушения между ними. Прочностные характеристики слоёв и их толщины приведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер слоя	Материал	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа	Предел прочности на срез, МПа	Толщина слоя, мм
1	Сталь строительная	210	210	121,24	1
2	Магнезит	220	2480	127	20
3	Сталь строительная	210	210	121,24	1

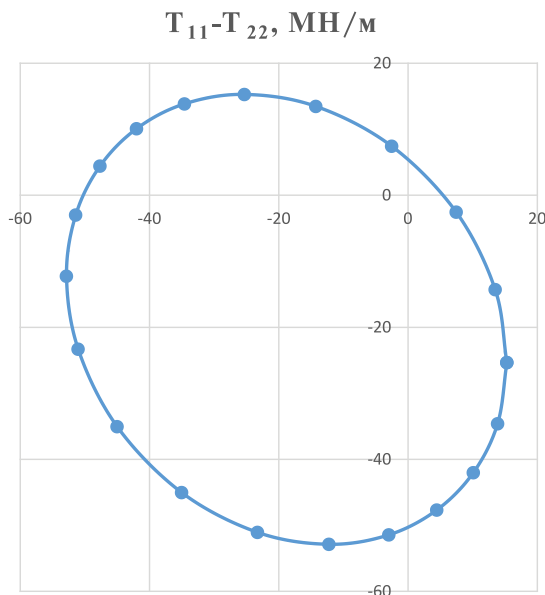


Рис. 2. Сечение гиперповерхности прочности плоскостью  $T_{11}-T_{22}$  (МН/м)

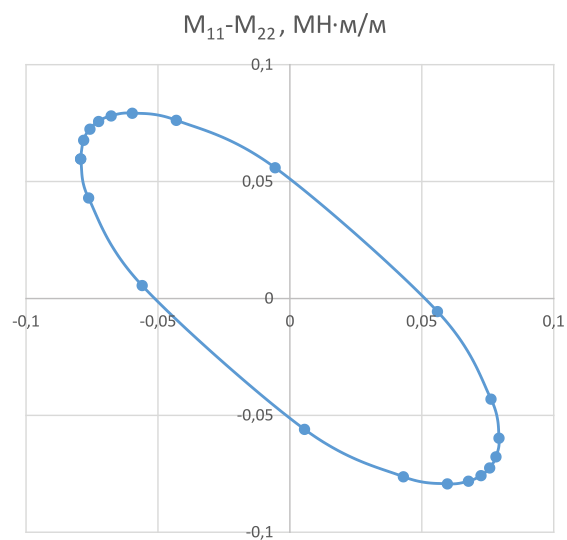


Рис. 3. Сечение гиперповерхности прочности плоскостью  $M_{11}-M_{22}$  (МН·м/м)

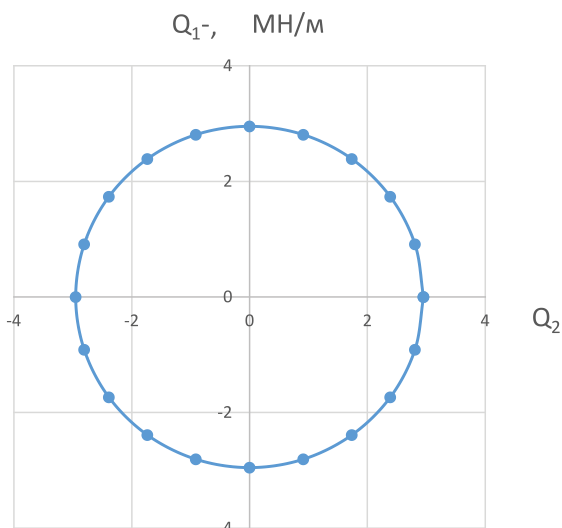


Рис. 4. Сечение гиперповерхности прочности плоскостью  $Q_1-Q_2$  (МН/м)

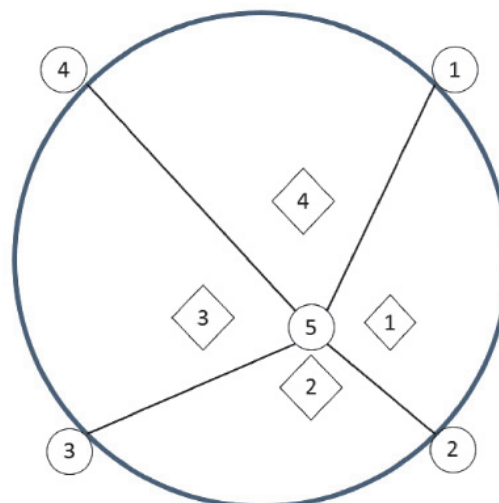


Рис. 5. Схема абсолютно жёстких конечных элементов

Таблица 2

Номер диска	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$
1	0,297712912	-2,60916E-10	0,425199463	-1,15351E-09	4,008818979	2,34017E-09
2	-0,011828885	-0,073201254	0,153232323	1,118379532	0,063881829	0,03692074
3	-0,112102382	0	0,295982852	0	-1,195951323	0
4	1,89042E-10	-0,327072792	-0,820870118	3,869618848	-2,46112E-09	6,83448E-10

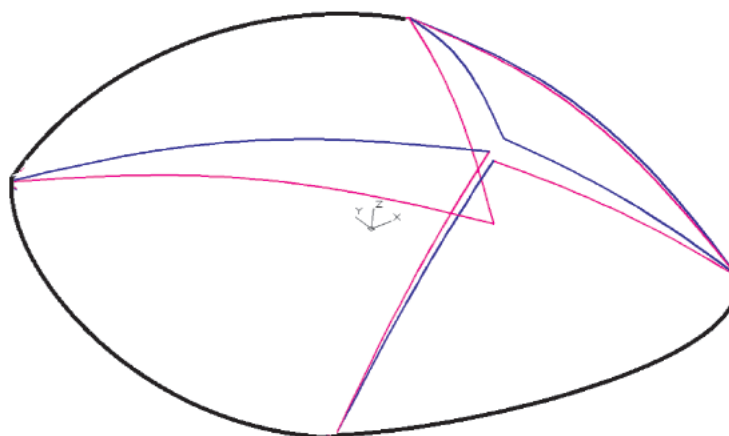


Рис. 6. Схема перемещений АЖКЭ

В результате решения соответствующей задачи линейного программирования получено значение  $\mu^+ = 6,9686$  МН. В табл. 2 приведены соответствующие скорости перемещений полюсов жестких дисков  $v_x, v_y, v_z$  и их поворотов  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  относительно полюсов.

На рис. 6 показаны линии разрушения, построенные с использованием табл. 2.

На рис. 7 приведена схема распределения  $N$  вдоль линий разрушения, построенная с использованием табл. 3.

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  являются мощностями, развиваемыми на концах линий разрушения; они имеют размерность МН/с.

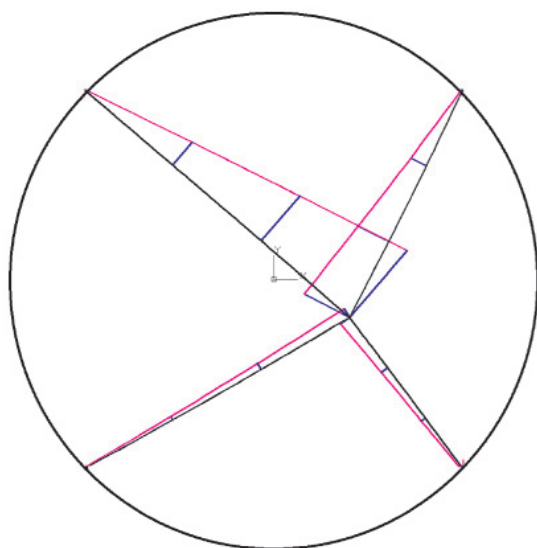
Рис. 7. Эпюры  $N$ 

Таблица 3

Номер линии	$N_1$	$N_2$
1: 1–2	1,35805E-09	1,57143E-09
2: 2–3	0,074079904	0,08811367
3: 3–4	0	0
4: 4–1	6,00853E-09	3,17175E-09
5: 5–1	7,360269481	0,1344356
6: 2–5	0,241773329	1,593845102
7: 3–5	0,121253623	1,464734888
8: 4–5	0,121157338	12,78241597

В заключение отметим, что составленные нами соответствующие алгоритм и программа для ЭВМ позволяют достаточно эффективно решать задачи, аналогичные рассмотренной выше.

### Список литературы

1. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
3. Сибгатуллин Э.С. Математическое моделирование прочности и несущей способности анизотропных и композитных элементов конструкций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Набережные Челны, 2001. – 405 с.
4. Сибгатуллин Э.С., Исламов К.Ф. Рациональное армирование железобетонного купола с вырезами // Вестник Тамбовского политехнического университета. Серия Естественные и технические науки. – Тамбов, 2006. – Т. 11. – Вып. 4. – С. 579–582.
5. Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С. Критерий разрушения для многослойных композитных пластин и оболочек // Механика композитных материалов. – 1990. – № 1. – С. 74–79.

### References

1. Gvozdev A.A. Raschet nesushhej sposobnosti konstrukcij po metodu predelnogo ravnovesija. M.: Strojizdat, 1949. 280 p.
2. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1979. 744 p.
3. Sibgatullin Je.S. Matematicheskoe modelirovanie prochnosti i nesushhej sposobnosti anizotropnyh i kompozitnyh jelementov konstrukcij: diss. doktora fiz.-mat. nauk. g. Nab. Chelny, 2001. 405 p.
4. Sibgatullin Je.S., Islamov K.F. Racionalnoe armirovanie zhelezobetonnoego kupola s vyrezami // Vestnik Tambovskogo politehnicheskogo universiteta. Serija Estestvennye i tehnicheckie nauki. Tambov. 2006. Tom 11. Vypusk 4. pp. 579–582.
5. Teregulov I.G., Sibgatullin Je.S. Kriterij razrushenija dlja mnogoslujnyh kompozitnyh plastin i obolochek // Mehanika kompozitnyh materialov. 1990. no. 1. pp. 74–79.

### Рецензенты:

Астащенко В.И., д.т.н., профессор кафедры материалов, технологий и качества, Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Набережные Челны;

Панкратов Д.Л., д.т.н., профессор кафедры машиностроения, Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Набережные Челны.