УДК 517.926

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Желдашева А.О., Лесев В.Н.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: diff@kbsu.ru

В работе сформулирована и исследована краевая задача для смешанного уравнения второго порядка в ограниченной области с локальными краевыми условиями. На линии изменения типа уравнения применены разрывные условия сопряжения для следа функции и следа производной. В качестве основного метода доказательства разрешимости поставленной задачи был использован метод конечных интегральных преобразований. При этом вопрос разрешимости задачи был эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствующих частях смешанной области. В частности, в области параболичности исходного уравнения было получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого представлено в виде комбинации общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Определив коэффициенты в полученных общих интегралах дифференциальных уравнений, решение исследуемой задачи можно найти после применения обратного интегрального преобразования.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, краевая задача, разрывные условия сопряжения, интегральное преобразование Фурье

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MIXED EQUATIONS IN LIMITED AREA

Zheldasheva A.O., Lesev V.N.

Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: diff@kbsu.ru

The paper was formulated and studied a mixed boundary value problem for second-order equations in a bounded domain with local boundary conditions. In the Line of changing the type of equation used explosive coupling conditions for the following functions and the following derivatives. As the main method of proof of the solvability of the problem, we used the method of integral transformations. At the same time, the question was equivalent to the solvability of the problem is reduced to the question of the solvability of ordinary differential equations in the relevant parts of the mixed area. In particular in the field of parabolic initial equation was obtained ordinary differential equation of the first order, the solution of which is represented by a combination of the general solution of the homogeneous equation and a particular solution of inhomogeneous. Determine the coefficient obtained in the general integrals of differential equations, the solution of the problem can be found after the application of the inverse integral transform.

Keywords: partial differential equation, boundary value problem, discontinuous coupling conditions, the Fourier integral

Исследование разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных является одним из основных разделов обширной теории дифференциальных уравнений. Особое место в подобных исследованиях занимают задачи для смешанных и смешанно-составных уравнений. Это обусловлено непосредственными связями уравнений смешанного типа с теорией интегральных уравнений, теорией интегральных преобразований и специальных функций, а также их прикладной значимостью в математической физике и биологии.

В настоящей работе в ограниченной односвязной области исследована классическая краевая задача для линейного неоднородного смешанного уравнения с переменными коэффициентами. Помимо классических краевых условий в постановке использованы разрывные условия сопряжения на линии изменения типа уравнения и условия согласования. Доказательство разрешимости задачи проведено методом конечных интегральных преобразований.

Постановка задачи

В области $\Omega = \{z\colon\ 0 < x < \ell,\ -t_2 < t < t_1\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x,\ t)$ рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} 0 = u_{xx} + a_1(t)\cdot u_{tt} + b_1(t)\cdot u_t + c_1(t)\cdot u - d_1(x,t), \text{ при } t > 0; \\ u_{xx} + a_2(t)\cdot u_{tt} + b_2(t)\cdot u_t + c_2(t)\cdot u - d_2(x,t), \text{ при } t < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где ℓ, t_1, t_2 – const > 0, a_i, b_i, c_i, d_i – достаточно гладкие функции ($i = 1, 2$).

Введем обозначения:

$$J = \{z: 0 < x < \ell,\ t = 0\},$$

$$\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0); \quad \Omega_2 = \Omega \cap (t < 0);$$

$$\tau_i(x) = \lim_{t\to 0\pm} u(x,t); \quad \nu_i(x) = \lim_{t\to 0\pm} u_t(x,t),$$

причем $i = 1$ если $t \to 0+$; $i = 2$ если $t \to 0-$.

Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая

Задача А. Найти регулярное в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ решение $u(x, t)$ уравнения (1) из класса

$$C(\bar{\Omega}_1) \cap C(\bar{\Omega}_2) \cap C^1(\Omega_1 \cup J) \cap C^1(\Omega_2 \cup J),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi_1(t);\ u(\ell, t) = \psi_1(t),\ t \ge 0; \qquad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_2(t);\ u(\ell, t) = \psi_2(t),\ t \le 0; \qquad (3)$$

$$u(x, t_1) = f_1(x);\ u(x, -t_2) = f_2(x),\ 0 \le x \le \ell; \qquad (4)$$

условиям сопряжения

$$\tau_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \tau_2(x);$$

$$\nu_1(x) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \nu_2(x) \qquad (5)$$

и условиям согласования

$$f_1(0) = \varphi_1(t_1); \quad f_1(\ell) = \psi_1(t_1);$$

$$\varphi_1(0) = \alpha_1 + \alpha_2\cdot\varphi_2(0); \quad \psi_1(0) = \alpha_1 + \alpha_2\cdot\psi_2(0);$$

$$f_2(0) = \varphi_2(-t_2); \quad f_2(\ell) = \psi_2(-t_2),$$

где φ_i, ψ_i, f_i – заданные функции из C^1, а α_i, β_i – заданные постоянные, такие, что $\alpha_2\cdot\beta_2 \ne 0$.

Доказательство разрешимости задачи А проведем методом конечных интегральных преобразований, по аналогии с работами [3, 8, 7].

Заметим, что краевые задачи в характеристических и прямоугольных областях для уравнений, представляющих частный случай уравнения (1), исследовались в работах [1, 2, 4, 5, 6].

Для сформулированной задачи необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) $a_i(t) \ne 0$;

2) $a_i(t) = 0$;

3) $a_1(t)a_2(t) = 0$, но $a_1^2(t) + a_2^2(t) \ne 0$.

Легко видеть, что в случаях (2) и (3) оба или одно из условий (4) являются переопределяющими задачу.

В настоящей работе рассмотрим более подробно последний случай.

Пусть, например, $a_1(t) = 0$, а $a_2(t) \ne 0$. Тогда уравнение (1) в области Ω_1 является уравнением параболического типа и принимает вид:

$$u_{xx} + b_1(t)\cdot u_t + c_1(t)\cdot u = d_1(x,t).$$

Далее проведем ряд преобразований пренебрегая первым из условий (4).

Применяя к последнему равенству конечное синус-преобразование Фурье [9]:

$$S_n[u] = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,$$

$$n = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

по переменной x на отрезке $[0, \ell]$ к уравнению (1) при $t > 0$, будем иметь

$$\frac{2}{l}\int_0^l u_{xx}(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = \frac{2}{l}u_x(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_0^l -$$

$$-\frac{2\pi n}{l^2}u(x,t)\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_0^l - \frac{2(\pi n)^2}{l^3}\int_0^l u(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx;$$

$$\frac{2}{l}\int_0^1 b_1(t)\cdot u_t(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = b_1(t)\frac{du_1}{dt}; \quad \frac{2}{l}\int_0^l c_1(t)\cdot u(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = c_1(t)\cdot u_1,$$

где $u_1 = u_{1n}(t)$ – результат преобразования функции $u(x, t)$ в Ω_1.

Подставляя полученные выражения в уравнение (6), приходим к параметрическому обыкновенному дифференциальному уравнению

$$b_1\cdot u_1' + p_1\cdot u_1 = q_1. \qquad (7)$$

Здесь

$$p_1(t) = c_1 - \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \qquad n = \overline{1,\infty};$$

$$q_1(t) = \delta_1 + \frac{2\pi n}{\ell^2}\cdot\left[(-1)^n\cdot\psi_1(t) - \varphi_1(t)\right],$$ – результат преобразования функции $d_1(x, t)$.

Аналогично при $t < 0$ получим

$$\frac{2}{l}\int_0^l u_{xx}(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx = \frac{2}{l}u_x(x,t)\cdot sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\Bigg|_0^l -$$

$$-\frac{2\pi n}{l^2}u(x,t)\cdot cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\Bigg|_0^l - \frac{2(\pi n)^2}{l^3}\int_0^l u(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx;$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l a_2(t)\cdot u_{tt}\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx = a_2(t)\frac{d^2u_2}{dt^2};$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l b_2(t)\cdot u_t(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx = b_2(t)\frac{du_2}{dt};$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l c_2(t)\cdot u(x,t)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx = c_2(t)\cdot u_2,$$

где $u_2 = u_2(t)$ – результат преобразования функции $u(x, t)$ в Ω_2,

Подставляя полученные соотношения в уравнение (1) при $t < 0$, приходим к следующему уравнению:

$$a_2\cdot u_2'' + b_2\cdot u_2' + p_2\cdot u_2 = q_2. \qquad (8)$$

Здесь

$$p_2(t) = c_2 - \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad n = \overline{1,\infty};$$

$$q_2(t) = \delta_2 + \frac{2\pi n}{\ell^2}\cdot\left[(-1)^n\cdot\psi_2(t) - \varphi_2(t)\right],$$

$$n = \overline{1,\infty}.$$

$\delta_2 = \delta_2(t)$ – результат преобразования функции $d_2(x, t)$.

Точно так же из (5) будем иметь

$$u_1(0) = \alpha_1 + \alpha_2\cdot u_2(0);$$

$$u_1'(0) = \beta_1 + \beta_2\cdot u_2'(0). \qquad (9)$$

Далее, проинтегрируем уравнения (7), (8). Если $b_1(t) = 0$, то $u_1(t)$ сразу определяется из (7), в противном случае, как известно (например [10]), общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u_1(t) = \gamma_1\cdot F_1(t) + F_2(t), \qquad (10)$$

где γ_1 – произвольная постоянная; $F_1(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $F_2(t)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение уравнения (7) может быть представлено в виде [2, с. 115]:

$$u_2(t) = \Phi_1(t) + \gamma_2\cdot\Phi_2(t) + \gamma_3\cdot\Phi_3(t), \qquad (11)$$

где γ_2, γ_3 – произвольные постоянные; $\Phi_1(t)$ – частное решение неоднородного уравнения; $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ – линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения.

Из (10) и (11), с учетом (9), а также принимая во внимание (4), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных γ_1, γ_2, γ_3:

$$\begin{cases}\gamma_1\cdot F_1(0) - \gamma_2\cdot\alpha_2\cdot\Phi_2(0) - \gamma_3\cdot\alpha_2\cdot\Phi_3(0) = \alpha_1 + \alpha_2\cdot\Phi_1(0) - F_2(0);\\ \gamma_1\cdot F_1'(0) - \gamma_2\cdot\beta_2\cdot\Phi_2'(0) - \gamma_3\cdot\beta_2\cdot\Phi_3'(0) = \beta_1 + \beta_2\cdot\Phi_1'(0) - F_2'(0);\\ \gamma_2\cdot\Phi_2(-t_2) + \gamma_3\cdot\Phi_3(-t_2) = \tilde{f}_2 - \Phi_1(-t_2),\end{cases} \qquad (12)$$

где $\tilde{f}_2 = \text{const}$ – результат преобразования функции $f_2(x)$.

Таким образом, вопрос однозначной разрешимости задачи (1)–(5) редуцирован к вопросу разрешимости системы (12). Применяя обратное преобразование [9]:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n[u]\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$$

к функциям u_1, u_2, получим решение задачи (1)–(5) в областях Ω_1, Ω_2 в виде соответствующих рядов Фурье.

В заключение отметим, что случаи (1) и (2) исследуются аналогично.

Список литературы

1. Елеев В.А., Гучаева З.Х. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболо-параболического типа второго порядка в прямоугольной области // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2011. – № 6. – С. 34–40.

2. Елеев В.А., Жемухова З.Х. О некоторых краевых задачах для одного смешанного уравнения с разрывными коэффициентами в прямоугольной области // Владикавказский математический журнал. – 2002. – Т. 4. – № 4. – С. 8–18.

3. Лесев В.Н. Исследование разрешимости краевых задач для уравнения четвертого порядка методом конечных интегральных преобразований // Современные проблемы математики: материалы международной конференции. – Махачкала: ДГТУ, 2006. – С. 44–46.

4. Лесев В.Н., Желдашева А.О. Неклассическая краевая задача для смешанного уравнения второго порядка с интегральными условиями сопряжения // Известия смоленского государственного университета. – 2013. – № 3 (23). – С. 379–386.

5. Лесев В.Н., Желдашева А.О. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в характеристической области // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. – 2012. – № 3 (106). – С. 52–56.

6. Лесев В.Н., Желдашева А.О. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения с разрывными условиями сопряжения // Известия смоленского государственного университета. – 2012. – № 3 (19). – С. 392–399.

7. Лесев В.Н., Шарданова М.А. О разрешимости краевых задач для неоднородного уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами // Theoretical & Applied Science. – 2014. – № 12 (20). – С. 101–103.

8. Лесев В.Н., Шарданова М.А. Применение метода конечных интегральных преобразований к исследованию краевой задачи для уравнения высокого порядка // Theoretical & Applied Science. – 2014. – № 5 (13). – С. 1–4.

9. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

References

1. Eleev V.A., Guchaeva Z.H. Ob odnoj kraevoj zadache dlya uravneniya giperbolo-parabolicheskogo tipa vtorogo poryadka v pryamougolnoj oblasti. Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN. 2011. no. 6. pp. 34–40.

2. Eleev V.A., Zhemuhova Z.H. O nekotoryh kraevyh zadachah dlya odnogo smeshannogo uravneniya s razryvnymi koehfficientami v pryamougolnoj oblasti. Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal. 2002. T. 4. no. 4. pp. 8–18.

3. Lesev V.N. Issledovanie razreshimosti kraevyh zadach dlya uravneniya chetvertogo poryadka metodom konechnyh integralnyh preobrazovanij. Materialy mezhdunarodnoj konferencii: Sovremennye problemy matematiki. Mahachkala: DGTU, 2006. pp. 44–46.

4. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Neklassicheskaya kraevaya zadacha dlya smeshannogo uravneniya vtorogo poryadka s integralnymi usloviyami sopryazheniya. Izvestiya smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013. no. 3 (23). pp. 379–386.

5. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Nelokalnaya kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa vtorogo poryadka v harakteristicheskoj oblasti.Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki, 2012. no. 3 (106). pp. 52–56.

6. Lesev V.N., Zheldasheva A.O. Ob odnoj kraevoj zadache dlya smeshannogo uravneniya s razryvnymi usloviyami sopryazheniya. Izvestiya smolenskogo gosudarstvennogo universiteta. 2012. no. 3 (19). pp. 392–399.

7. Lesev V.N., Shardanova M.A. O razreshimosti kraevyh zadach dlya neodnorodnogo uravneniya vysokogo poryadka s peremennymi koehfficientami. Theoretical & Applied Science, 2014. no. 12 (20). pp. 101–103.

8. Lesev V.N., Shardanova M.A. Primenenie metoda konechnyh integralnyh preobrazovanij k issledovaniyu kraevoj zadachi dlya uravneniya vysokogo poryadka. Theoretical & Applied Science, 2014. no. 5 (13). pp. 1–4.

9. Farlou S. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov: Per. s angl. M.: Mir, 1985.

10. Ehlsgolc L.EH. Differencialnye uravneniya i variacionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1969.

Рецензенты:

Журтов А.Х., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой геометрии и высшей алгебры, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик;

Хаширова Т.Ю., д.т.н., профессор, заведующая кафедрой системного анализа и компьютерных технологий управления, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, г. Нальчик.