УДК 519.85: 541.13

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕРНСТА – ПЛАНКА И ПУАССОНА В ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Коваленко А.В.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар, e-mail: savanna-05@mail.ru

При моделировании переноса в мембранных системах в сверхпредельных токовых режимах обычно используются краевые задачи для системы одномерных уравнений Нернста, Планка и Пуассона. Использование приближенных решений краевых задач для одномерных, а не двумерных уравнений объясняется математическими сложностями исследования. В данной работе приводится асимптотическое представление решения краевой задачи для системы двумерных уравнений Нернста, Планка и Пуассона в области пространственного заряда. Рассмотрены различные численные методы решения систем уравнений асимптотического представления, в том числе метод простой итерации и метод линеаризации (Ньютона – Канторовича или Ньютона – Рафсона). При моделировании различных явлений, например электроконвекции, в первую очередь важно знать решение в области пространственного заряда. Полученные в данной статье результаты могут быть использованы при решении подобных задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, 2D-моделирование, уравнения Нернста – Планка – Пуассона

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF EQUATIONS NERNST – PLANK AND POISSON IN THE SPACE CHARGE

Kovalenko A.V.

Kuban State University, Krasnodar, e-mail: savanna-05@mail.ru

When modeling transport in membranous systems of to overlimiting current modes are typically used boundary value problems for a system of one-dimensional equations of Nernst, Planck and Poisson. Use of approximate solutions of boundary value problems for one-dimensional explained by mathematical complexity of the study. In this paper the asymptotic representation of the solution of the boundary value problem for the two-dimensional equations of Nernst, Planck and Poisson in the space charge region. Various numerical methods for solving systems of equations of the asymptotic representation, including the method of simple iteration and linearization method (Newton – Kantorovich or Newton – Raphson). When the simulation of various phenomena, such as electroconvection primarily important to know the solution to the space charge region. The results obtained in this paper results can be used to solve similar problems.

Keywords: mathematical modeling, 2D – simulation, equations Nernst, Planck, Poisson

При моделировании переноса в мембранных системах в сверхпредельных токовых режимах обычно используются краевые задачи для системы уравнений Нернста – Планка и Пуассона [1–3, 5–10, 17].

В своих работах С.С. Духин и Н.А. Мищук [14], И. Рубинштейн [16] первыми дали теоретическое объяснение сверхпредельного тока электроконвекцией. Для этого они использовали двумерные уравнения Навье – Стокса для расчета течения раствора электролита и одномерные уравнения Нернста – Планка и Пуассона для расчета величины электрической силы. Аналогичные модели развивались в работах [11, 13, 19].

Использование приближенных решений краевых задач для одномерных, а не двумерных уравнений Нернста – Планка и Пуассона объясняется математическими сложностями исследования двумерных уравнений.

Впервые исследование электроконвекции на основе численного решения двумерной системы уравнений Нернста – Планка и Пуассона и Навье – Стокса проведено в работах [12, 15, 18] с некоторыми ограничениями на величины начальной концентрации, скорости протока раствора. Таким образом, возникает актуальная проблема асимптотического решения краевых задач для двумерных систем уравнений Нернста – Планка и Пуассона.

В работе [4] нами было получено асимптотическое представление для решения краевой задачи для двумерных систем уравнений НП с условием электронейтральности, удобное для сращивания с асимптотическим представлением в области пространственного заряда путем введения промежуточного слоя. В данной работе предлагается асимптотическое представление решения краевой задачи для двумерных систем уравнений Нернста – Планка и Пуассона в области пространственного заряда (ОПЗ).

Постановка задачи

1. Исходная система уравнений

Безразмерная система уравнений Нернста – Планка и Пуассона:

$$\vec{j}_i = z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \nabla C_i + Pe C_i \vec{V}, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$Pe\frac{\partial C_i}{\partial t} = -div\vec{j}_i, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\varepsilon div\vec{E} = z_1 C_1 + z_2 C_2; \quad (3)$$

$$\vec{I} = z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2. \quad (4)$$

Асимптотическое представление в области пространственного заряда

1. Преобразование уравнений

Положим $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{E}$, $C_i = \sqrt{\varepsilon}\tilde{C}_i$, тогда

$$\vec{j}_i = z_i D_i \tilde{C}_i \tilde{E} - \sqrt{\varepsilon} D_i \nabla \tilde{C}_i + \sqrt{\varepsilon} Pe \tilde{C}_i \vec{V}, \quad i = 1, 2;$$

$$\sqrt{\varepsilon} Pe\frac{\partial \tilde{C}_i}{\partial t} = -div\vec{j}_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\sqrt{\varepsilon} div\tilde{E} = \sqrt{\varepsilon} z_1 \tilde{C}_1 + \sqrt{\varepsilon} z_2 \tilde{C}_2;$$

$$\vec{I} = z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2.$$

2. Асимптотическое упрощение

Полагаем $\sqrt{\varepsilon} \to 0$, $Pe\sqrt{\varepsilon} \to 0$ в преобразованных уравнениях, тогда получим

$$\vec{j}_i = z_i D_i \tilde{C}_i \tilde{E}, \quad i = 1, 2; \quad (5)$$

$$div\,\vec{j}_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad (6)$$

$$div\tilde{E} = z_1 \tilde{C}_1 + z_2 \tilde{C}_2; \quad (7)$$

$$\vec{I} = z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2.$$

Из уравнения (6) следует, что потоки $\vec{j}_i$, $i = 1, 2$, и, соответственно, плотность тока $\vec{I}$, соленоидальные вектора. Кроме того, поскольку в уравнения (5)–(7) время явно не входит, процесс переноса в ОПЗ в первом приближении является стационарным.

3. Преобразование системы упрощенных уравнений

Поделим уравнения (5) на D_i, $i = 1, 2$, умножим на z_i, $i = 1, 2$ и сложим, тогда

$$\vec{J} = (z_1 \tilde{C}_1 + z_2 \tilde{C}_2)\tilde{E}, \quad (8)$$

где $\vec{J} = \frac{z_1}{D_1}\vec{j}_1 + \frac{z_2}{D_2}\vec{j}_2$ – некоторый соленоидальный вектор.

Уравнение (8) с учетом (7) примет вид

$$\tilde{E}div\tilde{E} - \vec{J} = 0. \quad (9)$$

Уравнения для $\tilde{C}_i$, $\tilde{E}$, не зависящие от неизвестных соленоидальных векторов $\vec{j}_i$, $i = 1, 2$, $\vec{I}$ и $\vec{J}$, можно получить, применив операцию div к обеим частям (5), (9):

$$div(\tilde{C}_i \tilde{E}) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (10)$$

$$div(\tilde{E}div\tilde{E}) = 0. \quad (11)$$

При решении системы уравнений (10), (11) возникают трудности в нахождении дополнительных краевых условий, т.к. порядок этих уравнений повысился. В связи с этим возникает проблема непосредственного решения уравнения (9).

Вывод уравнения для функции η

Рассмотрим условие разрешимости уравнения $\tilde{E}div\tilde{E} - \vec{J} = 0$, где $\vec{J}$ является соленоидальным вектором. Так как $\vec{J}$, соленоидальный вектор (т.е. $div\vec{J} = 0$), то существует такая функции η, что $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -J_1$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = J_2$.

Введем оператор $r(\vec{u}) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$, который является двумерным аналогом оператора *rot*, называется завихренностью и обладает следующими свойствами:

а) $r(u\vec{a}) = ur(\vec{a}) + (\nabla u, \vec{a})_1$;

б) $r(\nabla u) = 0$;

в) здесь $(\vec{a}, \vec{b})_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ – кососимметричное скалярное произведение.

$$r(\vec{J}) = \left(\frac{\partial J_2}{\partial x} - \frac{\partial J_1}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) = -\Delta\eta. \quad (12)$$

С другой стороны, с учетом $\tilde{E}div\tilde{E} = \vec{J}$ получим

$$r(\vec{J}) = r(\tilde{E}div\tilde{E}) = div\tilde{E}r(\tilde{E}) + (\nabla div\tilde{E}, \tilde{E})_1.$$

Так как $\tilde{E} = -\nabla\varphi$ и $\nabla div\tilde{E} = \Delta\tilde{E}$, то $r(\vec{J}) = (\Delta\tilde{E}, \tilde{E})$. Следовательно, для функции η получаем уравнение

$$\Delta\eta = -(\Delta\tilde{E}, \tilde{E})_1. \quad (13)$$

Уравнение (13) является условием разрешимости уравнения (9).

Таким образом, уравнение (9) эквивалентно системе уравнений

$$\tilde{E}div\tilde{E} - \vec{J} = 0;$$

$$\Delta\eta = -(\Delta\tilde{E}, \tilde{E})_1,$$

где $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -J_1$; $\frac{\partial \eta}{\partial x} = J_2$.

Преобразование системы уравнений (9), (13)

Из уравнения $\tilde{E}div\tilde{E} - \vec{J} = 0$, следует, что $\tilde{E} = u\vec{J}$, где u некоторая скалярная функция. Тогда

$$udiv(u\vec{J})\vec{J} = \vec{J},$$

следовательно, $udiv(u\vec{J}) = 1$. Так как

$$div\left(u\vec{J}\right) = udiv\vec{J} + \left(\nabla u, \vec{J}\right) = \left(\nabla u, \vec{J}\right),$$

то для u получим уравнение $u(\nabla u, \vec{J}) = 1$ или $(\nabla u^2, \vec{J}) = 2$. Обозначим $u^2 = w$, тогда для w получим уравнение $(\nabla w, \vec{J}) = 2$.

Преобразуем теперь уравнение

$$\Delta\eta = -(\Delta\tilde{E}, \tilde{E})_1.$$

Заменим в уравнении $\tilde{E}$ с учетом $\Delta\tilde{E} = \nabla div\tilde{E}$, $\tilde{E} = u\vec{J}$. Кроме того, из

$$div\tilde{E} = div(u\vec{J}) = (\nabla u, \vec{J}) = \frac{1}{u}$$

следует, что

$$\Delta\tilde{E} = \nabla div\tilde{E} = \nabla\frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2}\nabla u.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\Delta\eta = \frac{1}{u}(\nabla u, \vec{J})_1.$$

С учетом $(\nabla u, \vec{J})_1 = (\nabla u, \nabla\eta)$ получим, что это уравнение запишется в виде

$$\Delta\eta = \frac{1}{u}(\nabla u, \nabla\eta) \quad \text{или} \quad \Delta\eta = (\nabla(\ln u), \nabla\eta).$$

С учетом замены $u^2 = w$ получаем для функций w и η систему уравнений

$$(\nabla w, \vec{J}) = 2, \tag{14}$$

$$\Delta\eta = \frac{1}{2}(\nabla(\ln w), \nabla\eta). \tag{15}$$

Замечание 1. Система уравнений (9), (13) может быть преобразована к виду (14), (15) и несколько другим способом.

Положим, $u = div\tilde{E}$, тогда система уравнений запишется в виде

$$\tilde{E} = \frac{1}{u}\vec{J} \quad \text{и} \quad \Delta\eta = -(\nabla u, \tilde{E})_1.$$

Здесь опять использовано равенство $\Delta\vec{E} = \nabla div\vec{E}$.

Заменим во втором уравнении $\tilde{E}$, тогда с учетом $(\nabla u, \vec{J})_1 = (\nabla u, \nabla\eta)$ получим, что система этих уравнений запишется в виде

$$\tilde{E} = \frac{1}{u}\vec{J} \quad \text{и} \quad \Delta\eta = -\frac{1}{u}(\nabla u, \nabla\eta).$$

Для того чтобы вывести уравнение для u, найдем div от обеих частей первого уравнения, тогда

$$div\tilde{E} = div\left(\frac{1}{u}\vec{J}\right).$$

Откуда получаем уравнение для u:

$$u = div\left(\frac{1}{u}\vec{J}\right) \quad \text{или} \quad u = \frac{1}{u}div(\vec{J}) - \frac{1}{u^2}\left(\nabla u, \vec{J}\right).$$

Так как $div\vec{J} = 0$, то $u = -\frac{1}{u^2}\left(\nabla u, \vec{J}\right)$, или, умножая обе части уравнения на u^2, получим $\left(\nabla u, \vec{J}\right) = -u^3$. Это уравнение является квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка относительно u.

Таким образом, для двух функций u, η получим систему из двух уравнений:

$$(\nabla u, \vec{J}) = -u^3; \quad \Delta\eta = -\frac{1}{u}(\nabla u, \nabla\eta),$$

где $\frac{\partial\eta}{\partial y} = -J_1$; $\frac{\partial\eta}{\partial x} = J_2$. Систему уравнений

$$\left(\nabla u, \vec{J}\right) = -u^3 \quad \text{и} \quad \Delta\eta = -\frac{1}{u}(\nabla u, \nabla\eta)$$

перепишем в виде

$$(\nabla u^{-2}, \vec{J}) = 2 \quad \text{и} \quad \Delta\eta = \left(\nabla\left(\ln\frac{1}{u}\right), \nabla\eta\right).$$

Полагая $w = u^{-2}$, снова получим систему уравнений (14)–(15).

Замечание 2. Систему уравнений (9), (13) можно упростить и по-другому, если сделать замену $w = \ln u$, тогда система уравнений запишется в виде

$$(\nabla w, \vec{J}) = -e^{2w}; \tag{16}$$

$$\Delta\eta = -\left(\nabla w, \nabla\eta\right). \tag{17}$$

Методы решения системы уравнений (14), (15):

1. Метод простой итерации

Эту систему уравнений (14)–(15) можно решать, например, следующим методом последовательных приближений:

1. Пусть $\vec{J}^{(0)}$ – некоторое начальное приближение к $\vec{J}$.

2. Определим $w^{(0)}$ как решение линейного уравнения переноса: $\left(\nabla w, \vec{J}^{(0)}\right) = 2$.

3. Определим $\eta^{(0)}$ как решение линейного уравнения:

$$\Delta\eta = -\frac{1}{2}\left(\nabla\ln w^{(0)}, \nabla\eta\right).$$

4. Определим $\vec{J}^{(1)}$ по формулам

$$J_1^{(1)} = -\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y}; \quad J_2^{(1)} = \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x}.$$

5. Проверим условие сходимости $\left\| \vec{J}^{(0)} - \vec{J}^{(1)} \right\| \le \delta$, где δ – заданная точность. Если условие сходимости выполняется, то принимаем $\vec{J} \approx \vec{J}^{(1)}$, $u \approx \frac{1}{\sqrt{w^{(0)}}}$, $\tilde{E} \approx \frac{1}{u}\vec{J}$, иначе полагаем $\vec{J}^{(0)} = \vec{J}^{(1)}$ и идем к п. 2

Замечание 3. Систему уравнений (16), (17) можно решать, например, методом последовательных приближений, аналогичным методу 5.1.

Метод линеаризации (Ньютона – Канторовича или Ньютона – Рафсона)

Систему уравнений (14), (15) можно решать методом линеаризации.

1. Пусть $\eta^{(0)}$, $\vec{J}^{(0)}$ и $w^{(0)}$ некоторые начальные приближения к η, $\vec{J}$ и w, причем

$$J_1^{(0)} = -\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y}, \quad J_2^{(0)} = \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x}.$$

2. Определим $\eta^{(1)}$, $\vec{J}^{(1)}$, $w^{(1)}$ как решения системы линейных уравнений

$$\left(\nabla w^{(0)}, \vec{J}^{(1)}\right) + \left(\nabla w^{(1)}, \vec{J}^{(0)}\right) = 2 + \left(\nabla w^{(0)}, \vec{J}^{(0)}\right);$$

$$\Delta \eta^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\nabla \ln\left(w^{(0)}\right), \nabla \eta^{(1)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w^{(0)}}\nabla w^{(1)}, \nabla \eta^{(0)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w^{(0)}}\nabla w^{(0)}, \nabla \eta^{(0)}\right),$$

причем $J_1^{(1)} = -\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y}$, $J_2^{(1)} = \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x}$.

3. Проверим условие сходимости

$$\left\| \vec{J}^{(0)} - \vec{J}^{(1)} \right\| + \left| \eta^{(0)} - \eta^{(1)} \right| + \left| w^{(0)} - w^{(1)} \right| \le \delta,$$

где δ заданная точность. Если условие сходимости выполняется, то принимаем

$$\vec{J} \approx \vec{J}^{(1)}, \quad u \approx \frac{1}{\sqrt{w^{(1)}}}, \quad \tilde{E} \approx \frac{1}{u}\vec{J}^{(1)},$$

иначе полагаем $\eta^{(0)} = \eta^{(1)}$, $w^{(0)} = w^{(1)}$ и идем к п. 2.

Замечание 4. Метод линеаризации можно применить и к системе уравнений (16), (17).

Замечание 5. Для конкретной реализации предложенных выше методов решения необходимо определить границы ОПЗ и соответствующие краевые условия. Эти проблемы можно решить путем использования различных физических гипотез, либо с использованием условий сращивания.

Заключение

В работе предлагается асимптотическое представление решения краевой задачи для двумерных систем уравнений Нернста – Планка и Пуассона в области пространственного заряда. Рассмотрены различные численные методы решения уравнений асимптотического представления, в том числе метод простой итерации и метод линеаризации. При моделировании различных явлений, например, электроконвекции, в первую очередь важно знать решение в области пространственного заряда. Полученные выше результаты можно использовать при решении таких задач. В то же время результаты этой работы совместно с результатами работы [4] дают асимптотическое представление решения краевой задачи для системы уравнений Нернста – Планка и Пуассона в основных областях, а именно в области электронейтральности и пространственного заряда.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края, гранты: № 13-08-93106-НЦНИЛ_а и 13-08-96525 р_юг_а.

Список литературы

1. Графов Б.М. Прохождение постоянного тока через раствор бинарного электролита / Б.М. Графов, А.А. Черненко // Журнал физической химии. – 1963. – Т. 37. – С. 664.

2. Графов Б.М. Теория прохождения постоянного тока через раствор бинарного электролита / Б.М. Графов, А.А. Черненко // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 146. № 1. – С. 135–138.

3. Духин С.С. Исчезновение феномена предельного тока в случае гранулы ионита / С.С. Духин, Н.А. Мищук // Коллоидный журнал. – 1989. – Т. 51. – № 4. – С. 659.

4. Коваленко А.В. 2D моделирование переноса 1:1 электролита в электромембранных системах при выполнении условия электронейтральности // Политематический сетевой электронный научный журнал КубГАУ – Краснодар: КубГАУ, 2015. – № 06(110).

5. Коваленко А.В. Краевые задачи для системы электродиффузионных уравнений. Часть 1. Одномерные задачи / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. – 2011. – 281 с.

6. Листовничий А.В. Прохождение токов больше предельного через систему электрод-раствор электролита // Электрохимия. – 1989. – Т. 25. – № 12. – С. 1651.

7. Никоненко В.В. Электроперенос ионов через диффузионный слой с нарушенной электронейтральностью / В.В. Никоненко, В.И. Заболоцкий, Н.П. Гнусин // Электрохимия. – 1989. – Т.25. № 3. – С. 301.

8. Ньюмен Дж. Электрохимические системы. – М.: Мир, 1977. – 463 с.

9. Уртенов М.Х. Анализ решения краевой задачи для уравнений Нернста-Планка-Пуассона. Случай 1:1 электролита / М.Х. Уртенов, В.В. Никоненко // Электрохимия. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 239.

10. Уртенов М.Х. Асимптотический и численный анализ уравнений Нернста-Планка-Пуассона // Деп. № 6968-В86.М.: ВИНИТИ, – 1986. 18 с.

11. Уртенов М.Х. Математические модели электромембранных систем очистки воды (монография) / М.Х. Уртенов, Р.Р. Сеидов. – Краснодар: КубГУ, 2000. – 140 с.

12. Уртенов М.Х. Математическое моделирование электроконвекции в канале обессоливания электродиализатора с учетом вынужденной конвекции / М.Х. Уртенов, А.В. Коваленко, В.В. Никоненко, А.М. Узденова // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – Краснодар: КубГУ, 2011. – № 4. – С. 68–74.

13. Belashova E.D. Overlimiting mass transfer through cation-exchange membranes modified by Nafion film and carbon nanotubes / E.D. Belashova, N.A. Melnik, N.D. Pismenskaya, K.A. Shevtsova, K.A. Lebedev, V.V. Nikonenko // Electrochim. Acta – 59 (2012) – P. 412.

14. Dukhin S.S. Unlimited increase in the current through an ionite granule / S.S. Dukhin, N.A. Mishchuk // Kolloid. Zh. – 49 (8) (1987) – P. 1197.

15. Kwak R. Shear flow of an electrically charged fluid by ion concentration polarization: scaling laws for convection vortices/ R. Kwak, V.S. Pham, J. Han // Phys. Rev. Lett. – 110 (2013) – P. 114501.

16. Rubinstein I. Role of the membrane surface in concentration polarization at ion-exchange membrane/ I. Rubinstein, E. Staude, O. Kedem, // Desalination – 69 (1988) – P. 101.

17. Rubinstein I. Voltage against current curves of cation-exchange membranes / I. Rubinstein, L. Shtilman // J. Chem. Soc., Faraday Trans. – 1979 (75). – P. 231.

18. Urtenov M.K. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells / M.K. Urtenov, A.M. Uzdenova, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, A.V. Kovalenko, V.I. Vasileva, P. Sistat, G. Pourcelly // Journal of Membrane Science – 447. USA. ELSEVIER. – 2013. – С. 190–202.

19. Zabolotsky V.I. Coupled transport phenomena in overlimiting current electrodialysis / V.I. Zabolotsky, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, E.V. Laktionov, M.Kh. Urtenov, H. Strathmann, M. Wessling, G.H. Koops // Separ. Purif. Technol. – 14 (1998) – P. 255.

References

1. Grafov B.M. Prohozhdenie postojannogo toka cherez rastvor binarnogo jelektrolita / B.M. Grafov, A.A. Chernenko // Zhurnal fizicheskoj himii. 1963. T.37. pp. 664.

2. Grafov B.M. Teorija prohozhdenija postojannogo toka cherez rastvor binarnogo jelektrolita/ B.M. Grafov, A.A. Chernenko // Dokl. AN SSSR. 1962. T. 146. no. 1. pp. 135–138.

3. Duhin S.S. Ischeznovenie fenomena predelnogo toka v sluchae granuly ionita / S.S. Duhin, N.A. Mishhuk// Kolloidnyj zhurnal 1989. T.51. no. 4. pp. 659.

4. Kovalenko A.V. 2D modelirovanie perenosa 1:1 jelektrolita v jelektromembrannyh sistemah pri vypolnenii uslovija jelektronejtralnosti // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal KubGAU Krasnodar: KubGAU, 2015. no. 06(110).

5. Kovalenko A.V. Kraevye zadachi dlja sistemy jelektrodiffuzionnyh uravnenij. Chast 1. Odnomernye zadachi. / A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. 2011. 281 p.

6. Listovnichij A.V. Prohozhdenie tokov bolshe predelnogo cherez sistemu jelektrod-rastvor jelektrolita // Jelektrohimija. 1989. T.25. no. 12. pp. 1651.

7. Nikonenko V.V. Jelektroperenos ionov cherez diffuzionnyj sloj s narushennoj jelektronejtralnostju / V.V. Nikonenko, V.I. Zabolockij, N.P. Gnusin // Jelektrohimija. 1989. T.25. no. 3. pp. 301.

8. Njumen Dzh. Jelektrohimicheskie sistemy. M.: Mir, 1977, 463 p.

9. Urtenov M.H. Analiz reshenija kraevoj zadachi dlja uravnenij Nernsta-Planka-Puassona. Sluchaj 1:1 jelektrolita / M.H. Urtenov, V.V. Nikonenko // Jelektrohimija. 1993. T.29. no. 2. pp. 239.

10. Urtenov M.H. Asimptoticheskij i chislennyj analiz uravnenij Nernsta-Planka-Puassona // Dep. no. 6968-V86.M.: VINITI, 1986. 18 p.

11. Urtenov M.H. Matematicheskie modeli jelektromembrannyh sistem ochistki vody (monografija) / M.H. Urtenov, R.R. Seidov Krasnodar: KubGU, 2000. 140 p.

12. Urtenov M.H. Matematicheskoe modelirovanie jelektrokonvekcii v kanale obessolivanija jelektrodializatora s uchetom vynuzhdennoj konvekcii / M.H. Urtenov, A.V. Kovalenko, V.V. Nikonenko, A.M. Uzdenova // Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov ChJeS. Krasnodar: KubGU. no. 4. 2011. pp. 68–74

13. Belashova E.D. Overlimiting mass transfer through cation-exchange membranes modified by Nafion film and carbon nanotubes / E.D. Belashova, N.A. Melnik, N.D. Pismenskaya, K.A. Shevtsova, K.A. Lebedev, V.V. Nikonenko // Electrochim. Acta 59 (2012) pp. 412.

14. Dukhin S.S. Unlimited increase in the current through an ionite granule / S.S. Dukhin, N.A. Mishchuk // Kolloid. Zh. 49 (8) (1987) pp. 1197.

15. Kwak R. Shear flow of an electrically charged fluid by ion concentration polarization: scaling laws for convection vortices / R. Kwak, V.S. Pham, J. Han// Phys. Rev. Lett. 110 (2013) R. 114501.

16. Rubinstein I. Role of the membrane surface in concentration polarization at ion-exchange membrane / I. Rubinstein, E. Staude, O. Kedem, // Desalination 69 (1988) R.101.

17. Rubinstein I. Voltage against current curves of cation-exchange membranes / I. Rubinstein, L. Shtilman // J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1979 (75) pp. 231.

18. Urtenov M.K. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells / M.K. Urtenov, A.M. Uzdenova, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, A.V. Kovalenko, V.I. Vasileva, P. Sistat, G. Pourcelly // Journal of Membrane Science 447. USA. ELSEVIER. 2013. pp. 190–202

19. Zabolotsky V.I. Coupled transport phenomena in overlimiting current electrodialysis / V.I. Zabolotsky, V.V. Nikonenko, N.D. Pismenskaya, E.V. Laktionov, M.Kh. Urtenov, H. Strathmann, M. Wessling, G.H. Koops // Separ. Purif. Technol. 14 (1998) pp. 255.

Рецензенты:

Халафян А.А., д.т.н., доцент, профессор, Кубанский государственный университет, г. Краснодар;

Павлова А.В., д.ф.-м.н., доцент, профессор, Кубанский государственный университет, г. Краснодар.