УДК 537.61 536.42

ТЕОРИЯ СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ФЕРРОМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ T_{2G}-ИОНЫ

Борлаков Х.Ш., Борлакова А.Х., Биджиев А.А., Китова К.С.

ФГБОУ ВПО «Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия» Минобрнауки России, Черкесск, e-mail: borlakov@mail.ru

Метод локальной (узельной) матрицы плотности применен для построения теории спин-орбитального фазового перехода при ферромагнитном упорядочении спинов в кубическом кристалле. Показано, что параметр порядка, описывающий появление узельных токов на узлах с ян-теллеровскими T_{2g}-ионами, пропорционален компонентам орбитальной части вектора спонтанной намагниченности. Для различных возможных типов осей легкого намагничивания установлена взаимосвязь между компонентами параметра порядка и вероятностями заселения каждого из состояний орбитального триплета. Показано, что появление орбитальной намагниченности совместимо с возможностью существования одновременного зарядового упорядочения на тех же узлах. Сформулированы необходимые условия сосуществования орбитального магнетизма и зарядового упорядочения на узлах, занятых T_{2g}-ионами. Результаты теоретического анализа сравнены с экспериментальными данными для феррита-шпинели Fe_2TiO_4.

Ключевые слова: изотропная магнитная фаза, матрица плотности, орбитальное упорядочение, теория Ландау фазовых переходов, ульвошпинель

THEORY OF THE SPIN-ORBIT PHASE TRANSITION IN THE FERROMAGNETIC CRYSTALS WITH THE T_{2G}-IONS

Borlakov K.S., Borlakova A.K., Bidzhiev A.A., Kitova K.S.

North Caucasian State Humanitarian Technological Academy, Cherkessk, e-mail: borlakov@mail.ru

The local density matrix method is used to develop the theory of spin-orbit phase transition under the ferromagnetic ordering of the spins in a cubic crystal. The study shows that the order parameter that describes appearance of interstitial currents on the sites that have Jahn-Teller T_{2g}-ions is proportional to the orbital components of the spontaneous magnetization vector. For various types of light magnetization axes, relation is established between components of the order parameter and probabilities of populating the states of the orbital triplet. This study shows that the emergence of the orbital magnetization is compatible with existence of charge ordering at the same nodes. Necessary conditions are formulated for co-existence of orbital magnetism and charge ordering at the nodes occupied with the T_{2g}-ions. Theoretical findings are compared with the experimental data on spinel-ferrite Fe_2TiO_4.

Keywords: an isotropic magnetic phase, the density matrix, orbital ordering, Landau theory of phase transitions, ulvospinel

Ранее, в работах [1, 2] и ряде других публикаций одного из авторов данной работы была построена общая феноменологическая теория магнитных фазовых переходов (ФП) в 3d-элементах и их магнитных соединениях. Было показано, что в этих кристаллах магнитная анизотропия возникает не в точке Кюри – Нееля (при $T = T_c$), а при более низкой температуре $T = T_{ls}$, так, что в интервале $T_{ls} < T < T_c$ существует магнитная фаза без анизотропии, свойства которой обусловлены только обменными взаимодействиями. В простейшем случае ферромагнетика намагниченность можно представить в виде суммы двух слагаемых $\vec{M} = \vec{S} + \vec{c}$, где $\vec{S}$ – спиновая (обменная) часть, $\vec{c}$ – вклад в намагниченность, обусловленный релятивистскими взаимодействиями. В парамагнитной фазе оба этих слагаемых равны нулю, а ниже точки Кюри возникает чисто спиновая часть $\vec{S}$, причем вектор $\vec{S}$ является критическим параметром порядка (ПП) для перехода в точке Кюри. Вклад релятивистских взаимодействий в намагниченность $\vec{c}$ возникает в точке перехода в анизотропную фазу T_{ls}, а вектор $\vec{c}$ является критическим ПП для перехода из изотропной фазы в анизотропную. На кривой температурной зависимости намагниченности $M(T)$ включение орбитального вклада $c(T)$ ниже температуры T_{ls} должно отобразиться в виде появления на графике «горбика» в окрестности точки $T = T_{ls}$, если орбитальный вклад направлен по направлению вектора $\vec{S}$ и «впадины», если направление орбитального вклада противоположно. И действительно, для кристалла медного феррита $CuFe_2O_4$ – типичного обменного магнетика, на экспериментальной кривой $M(T)$ при температуре перехода из кубической (изотропной) в тетрагональную (анизотропную) фазу имеется хорошо выраженный «горбик» [12].

Предложенная в [1, 2] теория носила чисто феноменологический характер и не учитывала какой-либо специфики того, что при спин-орбитальном переходе происходит упорядочение орбиталей, вызывающее появление орбитальных токов и, как следствие, орбитального магнитного момента, вносящего вклад в намагниченность. В данной работе мы имеем намерение связать орбитальный вклад в намагниченность с квантовомеханическими величинами, описывающими орбитальное упорядочение, и с орбитальными токами. Анализ механизма кооперативного спин-орбитального эффекта рассмотрим на примере кристаллов со структурой шпинели. Весьма показателен в этом отношении феррит титана (ульвошпинель) Fe_2TiO_4. В точке Кюри – Нееля при $T_c = 147$ К кристалл ульвошпинели переходит в магнитоупорядоченное состояние – становится Неелевским антиферромагнетиком. При $T_{JT} = 115$ K кристалл испытывает структурный переход из кубической фазы в тетрагональную, который сопровождается резким увеличением магнитной анизотропии и появлением слабого ферромагнетизма [8]. Принято считать [9, 11] переход при $T_{JT} = 115$ K ян-теллеровским переходом, обусловленным двухвалентными ионами железа. При $T_2 = 77$ K кристалл испытывает еще один структурный переход из тетрагональной в моноклинную фазу [6]. Катионное распределение в ульвошпинели имеет следующий вид: $Fe^{+2}[Fe^{+2}Ti^{+4}]O^{-2}_4$. При таком распределении катионов ян-теллеровскими являются ионы железа и в тетраэдрической, и в октаэдрической подрешетках. При этом катионы Fe^{+2} в октаэдрической подрешетке имеют трехкратно вырожденные орбитальные состояния, а ионы в тетраэдрической подрешетке являются e_g-ионами [10]. Таким образом, в последовательности фазовых переходов, происходящих в ульвошпинели, спиновое и орбитальное упорядочение, а также их взаимовлияние играет самую непосредственную роль. Обратимся к подробному рассмотрению этого вопроса.

Кристаллы со структурой шпинели характеризуются в парамагнитной фазе ОЦК решеткой, симметрия которой описывается пространственной группой O_h^7. Симметрия кристаллической решетки сохраняется и в изотропной магнитной фазе и изменяется только ниже точки спин-орбитального фазового перехода. Переход из изотропной в анизотропную ферромагнитную фазу описывается трехмерным ПП $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ [1], который преобразуется по неприводимому представлению (НП) F_{1g} группы симметрии кристалла O_h^7. Для корректного описания ФП, связанных с изменением квантовых орбитальных состояний 3d-электронов, ПП должен быть выражен через элементы матрицы плотности [3].

Состояния ян-телллеровского (ЯТ-) иона, находящегося в постоянном взаимодействии с кристаллом, по общим правилам квантовой механики должны описываться с помощью матрицы плотности, оператор которой в собственном базисе имеет вид [3, 6]

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{n} w_i \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right| = \sum_{i,k=1}^{n} w_i \delta_{ik} \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_k\right|;$$

$$\rho_{ik} = w_i \delta_{ik} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \qquad (1)$$

где δ_{ik} – символ Кронеккера; $\left|\psi_i\right\rangle$ – собственные векторы $\hat{\rho}$; w_i – вероятности пребывания ЯТ-иона в состояниях $\left|\psi_i\right\rangle$; $\rho_{ik} = w_i\delta_{ik}$ – матричные элементы. В исходной фазе вероятности заселенностей w_i всех n состояний одинаковы: $w_i = 1/n$, поэтому $n\rho^0_{kj} = \delta_{kj}$, т.е. в исходной фазе матрица плотности пропорциональна единичной. Поэтому в низкосимметричной фазе $\hat{\rho}$ можно записать так:

$$n\hat{\rho} = \left(\hat{E} + \Delta\hat{\rho}\right), \qquad (2)$$

где $\hat{E}$ – единичная $n\times n$-матрица, а второе слагаемое $\Delta\hat{\rho}$ – бесследная часть оператора $\hat{\rho}$, возникающая ниже точки ФП, причем $Sp\Delta\hat{\rho} = 0$. Величина $\Delta\hat{\rho}$, согласно (2) описывает появление новых свойств в низкосимметричной фазе. Для любой бесследной эрмитовой $n\times n$-матрицы существует линейно-независимый набор бесследных $n\times n$-матриц $\hat{\sigma}_\alpha$, по которым ее можно разложить [3, 6]:

$$\Delta\hat{\rho} = \sum_{\alpha} \eta_\alpha \hat{\sigma}_\alpha, \qquad (3)$$

где $\eta_\alpha = \left\langle\hat{\sigma}_\alpha\right\rangle = Sp\left(\hat{\rho}\hat{\sigma}_\alpha\right)$,

где α – номер НП, входящего в тензорное (ян-теллеровское) представление, реализующееся на $\Delta\rho_{ik}$. Размерность s легко вычислить. В общем случае комплексная $n\times n$-матрица зависит от $2n^2$ произвольных действительных параметров. Условие равенства нулю следа матрицы и n^2 условий эрмитовости дают $s = 2n^2 - n^2 - 1 = n^2 - 1$. Следовательно, многомерный ПП $\vec{\eta}$, описывающий снятие вырождения и упорядочение T_{2g}-орбиталей, имеет 8 компонент. Так как у кубической группы O_h нет НП с размерностями больше 3-х, $\vec{\eta}$ преобразуется по приводимому представлению и из его компонент можно выделить неприводимые составляющие. Ниже мы приведем результат такого анализа.

Нам необходимо связать η_α с вероятностями занятия орбитальных состояний w_i. Для этого следует в (1) перейти от собственного базиса $|\psi_i\rangle$ к произвольному ортонормированному базису $|\varphi_j\rangle$ с помощью некоторого унитарного преобразования $\hat{U}$: $|\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} U_{ij}|\varphi_j\rangle$. Тогда матричные элементы оператора $\hat{\rho}$ будут выражены через вероятности w_i и матричные элементы унитарного оператора $\hat{U}$

$$\rho_{ik} = \sum_{j=1}^{n} w_j U^+_{kj}\, U_{ji}. \tag{4}$$

Выразим матрицу $\hat{\rho}$, по формулам (2), (3) задавая явный вид базисных матриц $\hat{\sigma}_\alpha$. В качестве базисных 3×3 матриц $\hat{\sigma}_\alpha$ [3, 6]:

$$\sigma_1 = \sigma_2^* = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix};\quad \sigma_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие, получаем следующие уравнения связи η_α с w_i и U_{ij}:

$$\eta_1 = \eta_2^* = \sum_i w_i \left[\varepsilon |u_{i1}|^2 + \varepsilon^2 |u_{i2}|^2 + |u_i|^2 \right];$$

$$\eta_3 = \sum_i w_i \left[u_{i2}u_{i3}^* + u_{i3}u_{i2}^* \right];$$

$$\eta_6 = \sum_i w_i \left[u_{i3}u_{i2}^* - u_{i2}u_{i3}^* \right]; \tag{6}$$

$$\eta_4 = \sum_i w_i \left[u_{i1}u_{i3}^* + u_{i3}u_{i1}^* \right];$$

$$\eta_7 = \sum_i w_i \left[u_{i3}u_{i1}^* - u_{i1}u_{i3}^* \right];$$

$$\eta_5 = \sum_i w_i \left[u_{i1}u_{i2}^* + u_{i2}u_{i1}^* \right];$$

$$\eta_8 = \sum_i w_i \left[u_{i2}u_{i1}^* - u_{i1}u_{i2}^* \right].$$

В качестве базисных электронных волновых функций трехкратно вырожденного T_{2g}-уровня обычно выбирают набор вещественных волновых функций φ_1, φ_2, φ_3, определяемых соотношениями

$$r^2\varphi_1 = yz;\; r^2\varphi_2 = zx;\; r^2\varphi_3 = xy. \tag{7}$$

Итак, мы имеем восемь компонент приводимого ПП η. Какие из них соответствуют ферромагнитному переходу по НП F_{1g}? Для ответа на этот вопрос надо разложить приводимое представление $\Gamma(\eta)$ по НП группы O_h. Используя метод приводящей матрицы в применении к образам генераторов группы O_h и приведя их к блочно-диагональной форме, мы получили следующее разложение исходного представления на два трехмерных и двукратное одномерное

$$\Gamma(\vec{\eta}) = F_{1g} + F_{2g} + 2A_{2g}. \tag{8}$$

Как показал наш анализ, по псевдовекторному НП F_{1g} преобразуется трехкомпонентный вектор $\vec{m} = (\eta_6, \eta_7, \eta_8)$. По НП F_{2g} преобразуется еще один трехкомпонентный вектор $\vec{u} = (\eta_3, \eta_4, \eta_5)$. Наконец, две компоненты η_1 и η_2 восьмимерного ПП η преобразуются независимо друг от друга – по одному и тому же одномерному НП A_{2g}. Физическая роль НП, входящих в правую часть разложения (8), совершенно различна. ПП $\vec{m} = (\eta_6, \eta_7, \eta_8)$, преобразующийся по НП F_{1g}, определяет всю физику фазового перехода в ближайшей окрестности точки спин-орбитального перехода $T = T_{ls}$ – изменение симметрии кристалла, температурные зависимости основных термодинамических величин. Это критический параметр порядка, и, соответственно, F_{1g} – критическое НП. Остальные НП в правой части (8) описывают сопутствующие фазовому переходу явления – эти НП называются некритическими, а им соответствуют вторичные ПП. Для каждого возможного критического НП можно вычислить сопутствующие ему

НП – и этот набор – критическое НП и совокупность некритических НП – образует так называемый полный конденсат [5]. В полный конденсат критического НП F_{1g}, кроме указанных в (8), входят еще двумерное НП E_g и единичное НП A_{1g}. Термодинамика ФП с критическим НП F_{1g} была подробно рассмотрена [1–2], и специфика орбитального упорядочения не привносит в нее ничего нового. Новой является физическая интерпретация явлений, описываемых вторичными параметрами порядка, соответствующим НП F_{2g} и A_{2g}.

Рассмотрим это подробнее. Как было показано в [3], часть компонент ПП $\vec{\eta}$ описывает изменение плотности заряда на узле, занятом ЯТ-ионом, а другая часть описывает возникновение узельного тока, и эти два набора не пересекаются. Но, как известно уже из курса общей физики, с замкнутым круговым током связан соответствующий магнитный момент этого тока. Поэтому, спин-орбитальный переход в анизотропную магнитную фазу описывается теми из восьми компонент $\vec{\eta}$, которые входят в выражение для плотности узельного тока.

Из общей квантовомеханической формулы <**A**> = $Sp(A\rho)$, примененной к матрице оператора тока

$$2\vec{J}_{ik} = 2\langle \varphi_i | \hat{\vec{J}} | \varphi_k \rangle = \left(\varphi_i \nabla \varphi_k^* - \varphi_k \nabla \varphi_i^*\right). \quad (9)$$

Получается следующее выражение для плотности среднего узельного тока [10]:

$$\langle \vec{J} \rangle = \eta_6 \vec{J}_1 + \eta_7 \vec{J}_2 + \eta_8 \vec{J}_3, \quad (10)$$

а базисные токи имеют вид

$$\vec{J}_1 = (\varphi_3 \nabla \varphi_2 - \varphi_2 \nabla \varphi_3);$$

$$\vec{J}_2 = (\varphi_3 \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_3);$$

$$\vec{J}_3 = (\varphi_2 \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_2). \quad (11)$$

Аналогичным образом для матрицы оператора плотности заряда с элементами $d_{ik} = \varphi_i \varphi_k$ получается выражение для среднего значения заряда, на узле, занятом ЯТ-ионом:

$$3\langle \hat{d} \rangle = \left(1 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2\right)|\varphi_1|^2 + \left(1 + \varepsilon^2\eta_1 + \varepsilon\eta_2\right)|\varphi_2|^2 + (1 + \eta_1 + \eta_2)|\varphi_3|^2 +$$
$$+2\left(\eta_5 \operatorname{Re}\varphi_1\varphi_2^* + \eta_4 \operatorname{Re}\varphi_1\varphi_3^* + \eta_3 \operatorname{Re}\varphi_2\varphi_3^*\right) + 2\left(\eta_6 \operatorname{Im}\varphi_2\varphi_3^* + \eta_7 \operatorname{Im}\varphi_1\varphi_3^* + \eta_8 \operatorname{Im}\varphi_1\varphi_2^*\right). \quad (12)$$

Отсюда видно, что в случае действительных волновых функций (7) слагаемые с η_6, η_7, η_8 выпадают из плотности заряда. Конкретная пространственная конфигурация электронного тока на узле определяется координатной зависимостью электронных волновых функций. Так, для тока <*J*> легко получить, при $\eta_6 = \eta_7 = 0$, $\eta_8 = 1$

$$\langle j_r \rangle = \langle j_\theta \rangle = 0; \ \langle j_\phi \rangle = 3\sin\theta\cos^2\theta. \quad (13)$$

Таким образом, спин-орбитальный ФП должен описываться трехмерным ПП $\vec{m} = (\eta_6, \eta_7, \eta_8)$. Этот ПП преобразуется по НП F_{1g} и пропорционален классическому ПП $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, использованному в работах [1, 2].

В работах [1, 2] были найдены магнитоанизотропные фазы (таблица) и проведен термодинамический анализ фазовых превращений, как по критическим степеням свободы, так и по некритическим. Эти результаты остаются в силе и при явном учете орбитальных состояний. Однако теперь мы можем точно вычислить величины орбитальных магнитных моментов и соответствующих им узельных токов для каждой из четырех низкосимметричных фаз, приведенных в таблице. Отметим, что при переходе в тригональную $\vec{c} = (c, c, c)$ и тетрагональную $\vec{c} = (c, 0, 0)$ фазы 3-кратное вырождение орбитального состояния может сниматься не полностью. Может оказаться, что основное состояние ниже перехода – это дублет. Тогда снятие этого вырождения произойдет уже при дальнейшем переходе в моноклинную или триклинную фазы.

Низкосимметричные фазы,
индуцированные НП F_{1g} группы O_h^7

$\vec{c}$	*ccc*	*occ*	*coo*	$c_1c_2c_3$
G_D	C_{3i}^2	C_{2h}^3	C_{4h}^6	C_i^1

Данная таблица позволяет получить важную информацию о типах орбитального упорядочения, соответствующих приведенным там низкосимметричным фазам. Модуль параметра порядка $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ имеет размерность намагниченности, а модуль вектора $\vec{m} = (\eta_6, \eta_7, \eta_8)$ есть величина безразмерная. При этом модуль $\vec{m}$ не превосходит единицы. Поэтому линейная связь между $\vec{c}$ и $\vec{m}$ должна иметь следующий вид:

$$\vec{c} = An\mu_B\vec{m}; \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}, \qquad (14)$$

где A – константа; n – число примитивных ячеек в единице объема; μ_B – магнетон Бора. Таким образом, в соответствии с таблицей и соотношением (14) компоненты (η_6, η_7, η_8) восьмимерного ПП $\vec{\eta}$ принимают вполне определенные значения и подчиняются определенным правилам пропорций, тогда как остальные компоненты равны нулю. Подставляя эти значения (η_6, η_7, η_8) в систему уравнений (6), мы получаем возможность вычислить зависимость вероятностей реализации w_i определенных орбитальных состояний от термодинамических параметров, если была определена предварительно зависимость от этих параметров модуля ПП $\vec{c}$. Кроме вероятностей, из той же системы определяются матричные элементы унитарного оператора $\hat{U}$. Это позволяет проследить за изменением спинового и орбитального упорядочений в соответствии с изменением значений термодинамических параметров.

Таким образом, метод локальной матрицы плотности позволяет естественным и непротиворечивым образом объединить методы термодинамики и квантовой механики и построить теорию спин-орбитального фазового перехода и тем самым подтвердить гипотезу Гуденафа [7] и Кугеля – Хомского [4] о существовании таких переходов.

Список литературы

1. Борлаков Х.Ш. Об одном следствии из гипотезы о существовании спин-орбитальных фазовых переходов // Физика металлов и металловедение. – 1999. – Т. 88. – № 1. – С. 19–27.

2. Борлаков Х.Ш. Изменение физических свойств и симметрии кристаллической решетки никеля при изменении температуры // Кристаллография. – 2001. – Т. 46. – № 1. – С. 88–91.

3. Гурин О.В., Будрина Г.Л., Сыромятников В.Н., Термодинамическое описание фазовых переходов в кристаллах с вырожденными локализованными уровнями // ЖЭТФ. – 1989. – Т. 95, Вып. 4. – С. 770–775.

4. Кугель К.И., Хомский Д.И. Эффект Яна-Теллера и магнетизм: соединения переходных металлов // УФН. – 1982. – Т. 136, № 4. – С. 621–664.

5. Сахненко В.П., Таланов В.М., Чечин Г.М. Теоретико-групповой анализ полного конденсата, возникающего при структурных фазовых переходах // ФММ. – 1986. – 62, № 5. – С. 847–856.

6. Blum Karl, Density Matrix Theory and Applications. – New York: Plenum Press, 1996. – 323 p.

7. Goodenough, J.B., Magnetism and Chemical Bond. – N. Y.–Lnd., Interscience Publ., 1963.

8. Ishikawa Y., Sato S., Syono Y. Neutron and Magnetic Studies of a Single Crystal of Fe2TiO4 // Journ. Phys. Soc. Jap. – 1971. – Vol. 31, № 2. – P. 452–460.

9. Kataoka M. Theory of the Giant Magnetostriction in Fe2TiO4 // Journ. Phys. Soc. Jap. – 1974. – Vol. 36, № 2. – P. 456–463.

10. Krupichka S. Physik der Ferrite. – Band 1–2, Prag, Academia, 1973.

11. Nakamura Sh. and Fuva A. Local and dynamic Jahn-Teller distortion in ulvospinel Fe2TiO4 // Hyperfine Interactions April. – 2014. – Vol. 226, Issue 1–3. – P. 267–274.

12. Onyszkiewicz I., Malafaev N.T., Murakhovskii A.A., Pietrzak J. Magnetic EMR Ivestigation of the Structural Phase Transition in Cu-Ferrite with Cooperative Jahn-Teller Effect // Physica. status. solidi. A. – 1982. – Vol. 73. – P. K243–K247.

References

1. Borlakov H.Sh. Ob odnom sledstvii iz gipotezy o sushhestvovanii spin-orbitalnyh fazovyh perehodov, Fizika metallov i metallovedenie. 1999. T. 88. no. 1. pp. 19–27.

2. Borlakov H. Sh. Izmenenie fizicheskih svojstv i simmetrii kristallicheskoj reshetki nikelja pri izmenenii temperatury, Kristallografija. 2001.T. 46. no. 1. pp. 88–91.

3. Gurin O.V., Budrina G.L., Syromjatnikov V.N., Termodinamicheskoe opisanie fazovyh perehodov v kristallah s vyrozhdennymi lokalizovannymi urovnjami, ZhJeTF, 1989, tom 95, vyp. 4, pp. 770–775.

4. Kugel K.I., Homskij D.I. Jeffekt Jana-Tellera i magnetizm: soedinenija perehodnyh metallov, UFN, 1982, T. 136, no. 4, pp. 621–664.

5. Sahnenko V.P., Talanov V.M., Chechin G.M., Teoretiko-gruppovoj analiz polnogo kondensata, voznikajushhego pri strukturnyh fazovyh perehodah, FMM, 1986, 62, no. 5, pp. 847–856.

6. Blum Karl, Density Matrix Theory and Applications, New York: Plenum Press, 1996. 323 p.

7. Goodenough, J.B., Magnetism and Chemical Bond, N. Y.–Lnd., Interscience Publ., 1963.

8. Ishikawa Y., Sato S., Syono Y. Neutron and Magnetic Studies of a Single Crystal of Fe_2TiO_4 *Journ.Phys.Soc.Jap.,* 1971, Vol. 31, no. 2, pp. 452–460.

9. Kataoka M. Theory of the Giant Magnetostriction in Fe_2TiO_4, *Journ. Phys. Soc. Jap.,* 1974 Vol. 36, no. 2, pp. 456–463

10. Krupichka S. Physik der Ferrite. Band 1–2, Prag, Academia,1973.

11. Nakamura Sh. and Fuva A. Local and dynamic Jahn-Teller distortion in ulvospinel Fe2TiO4, *Hyperfine Interactions* April 2014, Vol. 226, Issue 1–3, pp. 267–274.

12. Onyszkiewicz I., Malafaev N.T., Murakhovskii A.A., Pietrzak J. Magnetic EMR Ivestigation of the Structural Phase Transition in Cu-Ferrite with Cooperative Jahn-Teller Effect, Physica. status. solidi. A., 1982., Vol. 73, pp. K243–K247.

Рецензенты:

Диканский Ю.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой общей физики, Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь;

Эдиев Д.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры математики, Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, г. Черкесск.