

УДК 681.325:518.5

НЕАНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ МИКРОПРОЦЕССОРОВ

Булатникова И.Н., Гершунина Н.Н.*ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет»,
Краснодар, e-mail: adm@kgtu.kuban.ru*

Настоящая статья посвящена изложению принципов проектирования так называемых неаналитических алгоритмов. Они характеризуются тем, что строятся не вдоль аналитических выражений сущности преобразования информации, а на основе модельных свойств математических объектов (векторов, итерационных процессов и т.п.). Их появление вызвано широким распространением микропроцессоров, предъявляющих требование к алгоритмам – отсутствие операций умножений и делений (целочисленность алгоритмов). Предложено развитие разностно-итерационных алгоритмов, в том числе известного алгоритма Оранского и Рейхенберга. Произведена его модификация для обеспечения реализации широкого класса функциональных преобразований. Итоговая погрешность таких алгоритмов (точность на уровне 10–12 двоичных разрядов) позволяет успешно их использовать в микропроцессорных устройствах локальной автоматики.

Ключевые слова: микропроцессоры, быстродействующие целочисленные алгоритмы, устройства локальной автоматики

NON-ANALYTICAL METHODS OF CALCULATIONS FOR MICROPROCESSORS

Bulatnikova I.N., Gershunina N.N.*Federal state budgetary educational institution of higher professional education
Kuban State Technologic University, Krasnodar, e-mail: adm@kgtu.kuban.ru*

The present article is devoted to the presentation of the design principles of the so-called non-analytical algorithms. They are characterized by the fact that they are not built along the analytical expressions of the essence of the transformation of information, and on the basis of model properties of mathematical objects (vectors, iterative processes, etc.). Their appearance is caused by the widespread availability of microprocessors, represent the requirement for the algorithms – the absence of operations of multiplications and divisions (the integrality of the algorithms). There is proposed development of a differential-iterative algorithms, including the well-known algorithm of Oranskiy and Reichenberg, made modifications to ensure the realization of a wide class of functional transformations. The total error of such algorithms (accuracy at the level of 10–12 bits) allows to successfully use them in microprocessor-based local automation devices.

Keywords: microprocessors, fast integer algorithms, local automation devices

Широкое внедрение микропроцессорной техники потребовало особого алгоритмического и программного обеспечения, имеющего быстродействие, соизмеримое с аппаратным быстродействием самих микропроцессоров (МП). Дело в том, что в феномене МП резко обострились противоречия между машинным характером обработки информации и антропогенностью ее алгоритмов.

Ранее все ЭВМ считали вдоль аналитического выражения реализуемой функции преобразования информации, т.е. повторяли человеческие расчеты по формулам. Отсюда обязательность операций (+, –, ×, /). Но это не соответствовало идеологии МП (максимум быстродействия при минимуме аппаратных затрат).

Уже в 60-х годах прошлого столетия появились первые быстродействующие алгоритмы неаналитических вычислений, сокращавших аппаратные затраты. Это алгоритмы Волдера [6] и Меджитта [5], имевшие в русскоязычной технической литературе название «шаг за шагом» (от

английского “step by step”). Они имели исключительно аппаратное применение в быстродействующих специальных вычислителях (навигация, ракетное дело и др.). При всех преимуществах они имели ограниченный класс функций, реализуемых ими. Их развитие не происходило из-за сложности технической (аппаратурной) реализации. Будучи по сути разностно-итерационными алгоритмами (РИА), они требовали создания методологии проектирования новых функций. Один из авторов подобных РИА, А.М. Оранский, отмечает – «теория РИА разработана недостаточно, и синтез алгоритмов идет эвристическим путем» [3, с. 143].

В основе РИА лежат методы цифрового моделирования какого-либо математического или геометрического объекта (вращающийся вектор, как у [5, 6], или итерационный сходящийся процесс, конечным результатом которого будет искомая функция [3]). В последнем варианте – это будет геометрический объект в виде плоских фигур различной конфигурации.

Методы псевдповоротов вектора

Это частный случай алгоритмов Волдера [6] и Меджитта [5]. В их основу заложена такая замечательная особенность: два комплексных числа вида $(a + jb)$ и $(1 \pm j \cdot 2^{-i})$, где $i = 0, 1, 2, \dots$, могут быть легко перемножены с применением только линейных операторов, так как умножения на 2^{-i} заменяются арифметическими сдвигами

$$(a + jb) \cdot (1 \pm j \cdot 2^{-i}) = (a \pm b \cdot 2^{-i}) + j \cdot (b \pm a \cdot 2^{-i}). \quad (1)$$

Но эту процедуру (1) можно представить так: вектор (a, b) поворачивается на угол $\pm \arctg 2^{-i}$ и дополнительно удлинняется в $\sqrt{1 + 2^{-2i}}$ раз.

Организовав слежение за текущим углом поворота вектора, можно получить координаты его конца, пропорциональные косинусу и синусу этого угла. И, наоборот, следя за достижением проекцией конца вектора на оси определенного значения x , можем получить угол, равный $\arcsin x$ или $\arccos x$. Вот этот алгоритм:

$$E_{i-1} = \text{sign } Y_{i-1} = \begin{cases} +1, & \text{если } Y_{i-1} \geq 0; \\ -1, & \text{если } Y_{i-1} < 0; \end{cases}$$

$$Y_0 = y; \quad Y_i = Y_{i-1} - E_{i-1} \cdot 2^{-(i-1)} \cdot X_{i-1}; \quad Y_n \rightarrow 0;$$

$$X_0 = x; \quad X_i = X_{i-1} - E_{i-1} \cdot 2^{-(i-1)} \cdot Y_{i-1};$$

$$X_n \rightarrow k \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (2)$$

$$Q_0 = 0; \quad Q_i = Q_{i-1} - E_{i-1} \cdot 2^{-(i-1)} \cdot \frac{y}{x}; \quad Q_n \rightarrow \arctg \frac{y}{x},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – номер итерации; n – разрядность чисел; $k = \prod_{i=1}^n \sqrt{1 + 2^{-2i}}$.

Нами разработана модификация РИА (2) для реализации на МП. За основу взят более точный алгоритм Меджитта, а второй этап позаимствован из алгоритма Волдера. Получается более точный и более быстрый РИА:

$$E_{i-1} = \text{sign } Y_{i-1} = \begin{cases} +1, & \text{если } Y_{i-1} \geq 0; \\ -1, & \text{если } Y_{i-1} < 0; \end{cases}$$

$$Y_0 = y; \quad Y_{i+1} = 2(Y_i - E_{i-1} \cdot X_i); \quad Y_m \rightarrow 0;$$

$$X_0 = x; \quad X_{i+1} = X_i + E_{i-1} \cdot 2^{-2i} \cdot Y_i;$$

$$X_m \rightarrow k \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (3)$$

$$Q_0 = 0; \quad Q_{i+1} = Q_i + E_{i-1} \cdot \arctg 2^{-i};$$

$$Q_m \rightarrow \arctg \frac{y}{x},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, m$ – номер итерации; m – половинная разрядность чисел $m = \frac{(n+1)}{2}$.

Обращаем внимание на то, что число итераций сокращено вдвое.

При всех достоинствах РИА (2) и (3) они имеют недостаток – необходимость наличия констант $\arctg 2^{-i}$.

Простой разностно-итерационный алгоритм

Он называется РИА квазиделения без восстановления остатка и квазиумножения [3]. В немного модернизированном нами (для расширения области сходимости) он имеет такой вид:

$$q_{i-1} = \text{sign } W_{i-1} \cdot \text{sign } y;$$

$$W_0 = w; \quad W_i = W_{i-1} - q_{i-1} \cdot 2^{-i+1} \cdot y; \quad W_n \rightarrow 0;$$

$$V_0 = v; \quad V_i = V_{i-1} + q_{i-1} \cdot 2^{-i+1} \cdot x;$$

$$V_n \rightarrow v + \frac{w}{y} \rightarrow x; \quad (4)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – номер итерации; n – разрядность чисел.

Хотя он и называется самым простым, но его основные компоненты (строчки с итерационными выражениями) входят во многие другие более сложные РИА. Например, первая и вторая строки играют роль аддитивного разложения отношения $\frac{w}{y}$:

$$\frac{w}{y} = \sum_{i=1}^n q_{i-1} \cdot 2^{-i+1}. \quad (5)$$

Оно, в свою очередь, служит основой для последующих итерационных выражений, обеспечивающих разнообразные функциональные преобразования.

Известен и другой – мультипликативный вид разложения $\frac{w}{y}$ (при $w > y > 0$):

$$q_i = \begin{cases} +1, & \text{если } W_i \geq Y_i; \\ 0, & \text{если } W_i < Y_i; \end{cases}$$

$$W_0 = 2 \cdot (w - y); \quad W_{i+1} = 2 \cdot (W_i - q_i \cdot Y_i); \quad (6)$$

$$Y_0 = y; \quad Y_{i+1} = Y_i + q_i \cdot 2^{-i} \cdot Y_i,$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – номер итерации; n – разрядность чисел.

В итоге получаем разложения $\frac{w}{y}$ в виде

$$\frac{w}{y} = \prod_{i=0}^n (1 + 2^{-i})^{q_i}, \quad (7)$$

которое используется в следующих итерационных выражениях, обеспечивающих различные функциональные преобразования (возведение в целую положительную

степень отношения $\frac{w}{y}$, взятие логарифма $\log_a\left(\frac{w}{y}\right)$ и др.).

Алгоритм Оранского и Рейхенберга

Он изобретен [4] для аппаратурной реализации и имеет такой вид (для $x > 0, y > 0$):

$$q_{i-1} = \text{sign}(X_{i-1} - Y_{i-1}) = \begin{cases} +1, & \text{если } X_{i-1} \geq Y_{i-1}; \\ -1, & \text{если } Y_{i-1} < X_{i-1}; \end{cases}$$

$$X_0 = x; \quad X_i = X_{i-1} - q_{i-1} \cdot y \cdot 2^{-i};$$

$$X_n \rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x + y}; \quad (8)$$

$$Y_0 = y; \quad Y_i = Y_{i-1} + q_{i-1} \cdot x \cdot 2^{-i}; \quad Y_n \rightarrow X_n,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – номер итерации; n – разрядность чисел.

РИА (8) имеет ограниченную возможность, он вычисляет одну единственную функцию $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ от двух переменных.

С целью расширения области применимости РИА нами были произведены исследования его математической модели и на этой основе – модификация РИА [2].

$$q_{i-1} = \text{sign}(X_{i-1} - Y_{i-1}) \cdot \text{sign}(u + w);$$

$$X_0 = x; \quad X_i = X_{i-1} - q_{i-1} \cdot w \cdot 2^{-i+1};$$

$$X_n \rightarrow \frac{xu + yw}{u + w}; \quad (9)$$

$$Y_0 = y; \quad Y_i = Y_{i-1} + q_{i-1} \cdot u \cdot 2^{-i+1}; \quad Y_n \rightarrow X_n,$$

где i – то же самое, что и в (8).

Условие сходимости этого РИА (8) таковы:

$$\left| \frac{(x - y)}{(u + w)} \right| < 2^{p+1}, \quad (10)$$

где p ($p \geq 0$) – минимальное целое число, обеспечивающее выполнение неравенства

$$2 \cdot |u \cdot 2^p + w \cdot 2^p| > |x - y|. \quad (11)$$

Величина, вычисляемая с помощью РИА (9), является средневзвешенной двух величин x и y , взятых с весами u и w . То есть это функция четырех переменных.

Расширение областей применения РИА

Оно состоит в замене исходных значений итерируемых величин некоторыми функциями одного или двух аргументов, которые сами просто вычисляются (т.е. без операций умножения и деления). То есть переходом к сложным функциям (суперпозициям функций) РИА значительно расширя-

ют класс реализуемых функций. Например, простой РИА (4) сможет вычислять не только $V_n = F(v, w, y, x) = v + \frac{w}{y} \cdot x$, но и такую, на-

пример, функцию – $F(s, t) = \frac{s^2 + s - 2st + t^2}{s + t}$.

Деля ее числитель на знаменатель (как многочлен на многочлен – «уголком»), получаем нужное представление для РИА (4).

$$F(s, t) = (s + t + 1) - \frac{4s + 1}{s + t} \cdot t. \quad (12)$$

Заменяя $u = s + t + 1$; $w = -(4s + 1)$; $y = s + t$; $x = t$ и подставляя их в качестве исходных данных для РИА (4), в итоге получаем сложную функцию

$$F(s, t) = \frac{s^2 + s - 2st + t^2}{s + t}.$$

Еще большие возможности расширения класса реализуемых функций возникают, если исходные значения всех или некоторых итерируемых величин представить функциями одного аргумента t .

Приведем пример таких преобразований для модифицированного РИА (9). Представим x, y, u, w так:

$$x = k_x \cdot t + m_x; \quad w = k_w \cdot t + m_w;$$

$$y = k_y \cdot t + m_y; \quad u = k_u \cdot t + m_u. \quad (13)$$

Тогда

$$Y_n = X_n = \frac{At^2 + Bt + C}{Dt + E}, \quad (14)$$

где $A = k_x \cdot k_u + k_y \cdot k_w$;

$$B = k_x \cdot m_u + k_u \cdot m_x + k_y \cdot m_w + k_w \cdot m_y;$$

$$C = m_x \cdot m_u + m_y \cdot m_w;$$

$$D = k_u + k_w;$$

$$E = m_u + m_w.$$

Для того чтобы упростить предварительное вычисление x, y, u, w для заданного t , выберем k_i ($i \in \{x, y, u, w\}$), равным $0, \pm 1; \pm 0,5; \pm 0,25; \dots$ и т.д. Это позволит заменить умножение $k_i \cdot t$ арифметическим сдвигом вправо аргумента t с возможностью инвертирования знака результата, если знак у k_i – минус.

Если же требуется решить обратную задачу: назначить такие k_i и m_i , чтобы $Y_n = X_n$ были равны требуемой функции $F(t)$ на заданном интервале $t \in (\alpha, \beta)$, то находим одну из аппроксимаций $F(t)$ в виде (14), т.е. соответствующий набор коэффициентов A, B, C, D, E .

Абсолютная погрешность · 10³ при различных *t*

<i>t</i> (радиан)	0	0,08	0,16	0,24	0,32	0,44	0,56	0,68	0,78
tg(<i>t</i>)	0,944	0,873	0,731	0,345	0,223	0,452	0,510	0,310	0,259

Опираясь на них, составляем и решаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 k_x \cdot k_u + k_y \cdot k_w &= \gamma \cdot A; \\
 k_x \cdot m_u + k_u \cdot m_x + k_y \cdot m_w + k_w \cdot m_y &= \gamma \cdot B; \\
 m_x \cdot m_u + m_y \cdot m_w &= \gamma \cdot C; \\
 k_x + k_u &= \gamma \cdot D; \\
 m_u + m_w &= \gamma \cdot E,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где γ – технологический коэффициент, сокращающий дробь (14) до значений числителя и знаменателя, удобных для решения системы (15).

Авторами [2] разработан алгоритм и программы решения системы (15) на персональном компьютере с получением k_i и m_i ($i \in \{x, y, u, w\}$).

Например, для $F(t) = \text{tg}(t)$, $t \in (0, \pi/4)$ имеем такой набор коэффициентов k_i и m_i ($i \in \{x, y, u, w\}$), который позволяет вычислять функцию $F(t)$ (14), максимально приближенную к $\text{tg}(t)$ на указанном интервале

$$\begin{aligned}
 k_x &= 1; k_y = -1; k_u = 1; k_w = 1/8; \\
 m_x &= 0,041332; m_y = 1,000000; \\
 m_u &= -1,502386; m_w = 0,060741.
 \end{aligned}$$

В таблице приведены абсолютные погрешности вычисления функции $\text{tg}(t)$.

Заметим, что в погрешность вошла и погрешность аппроксимации.

Преимущество микропроцессорной реализации функций по РИА (9) с заменой переменных по формулам (13) состоит в том, что подпрограмма вычислений различных функций одна и та же. Меняются только коэффициенты k_i и m_i . Кроме того, этот путь позволяет реализовать не только аналитически, но и таблично заданные функции.

Для этого в нашей работе [2] разработаны алгоритмы и программы вычисления коэффициентов для табличных функций, в том числе экспериментально снятых зависимостей.

Ограниченная точность предлагаемых РИА и их модификаций (обеспечивают точность в пределах 10–12 двоичных разрядов) не препятствует их использованию

в микропроцессорных системах локальной автоматизации. Микропроцессоры оперируют с входными данными от 10–12-разрядных аналого-цифровых преобразователей и выдают такой же точности выходные данные на цифро-аналоговые преобразователи и исполнительные органы управления [1].

Список литературы

1. Булатникова И.Н., Ключко В.И. и др. Информационные технологии с использованием целочисленной арифметики // Аналитический научно-технический журнал «Геоинжиниринг», НИПИ «Инжгео». – 2011. – № 2(11). – С. 54–58.
2. Гершунина Н.Н. Частиков А.П. и др. Автоматизированный информационно-вычислительный пункт экспресс-анализа качества для пиво- и безалкогольных производств // Изв. вузов. Пищевая технология. – 1999. – № 1. – С. 34–36.
3. Оранский А.М. Аппаратные методы в цифровой вычислительной технике. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 208 с.
4. А.с. 744595 СССР, МК12 G06F7/34. Цифровой функциональный преобразователь / А.М. Оранский, А.Л. Рейхенберг. Оpubл. 30.06.1980 г. Бюл. № 24.
5. Meggitt J.E. Pseudo division and pseudo multiplication processes // IBM J. Res. And Develop. – 1962. – Vol. 6. – № 2. – P. 220–226.
6. Volder J.E. The CORDIC trigonometric computing // The Trans. On Electric Corp. – 1959. – Vol. 8. – № 3. – P. 330–340.

References

1. Bulatnikova I.N., Kljuchko V.I. i dr. Informacionnye tehnologii s ispolzovaniem celochislennoj arifmetiki // Analiticheskij nauchno-tehnicheskij zhurnal «Geoinzhiniring», NIPI «Inzhgeo». 2011. no. 2(11). pp. 54–58.
2. Gershunina N.N. Chastikov A.P. i dr. Avtomatizirovannyj informacionno-vychislitelnyj punkt jekspress-analiza kachestva dlja pivo- i bezalkogolnyh proizvodstv // Izv. Vuzov. Pishhevaja tehnologija. 1999. no. 1. pp. 34–36.
3. Oranskij A.M. Apparatnye metody v cifrovoj vychislitelnoj tehnikе. Minsk: Izd-vo BGU, 1977. 208 p.
4. A.s. 744595 SSSR, MK12 G06F7/34. Cifrovoy funkcionálny preobrazovatel / A.M. Oranskij, A.L. Rejhenberg. Opubl. 30.06.1980 g. Bjul. no. 24.
5. Meggitt J.E. Pseudo division and pseudo multiplication processes // IBM J. Res. And Develop. 1962. Vol. 6. no. 2. pp. 220–226.
6. Volder J.E. The CORDIC trigonometric computing // The Trans. On Electric Corp. 1959. Vol. 8. no. 3. pp. 330–340.

Рецензенты:

Ключко В.И., д.т.н., профессор кафедры информационных систем и программирования Кубанского государственного технологического университета, г. Краснодар;
 Анишин Н.С., д.т.н., профессор, Академия маркетинга и социально-информационных технологий, г. Краснодар.